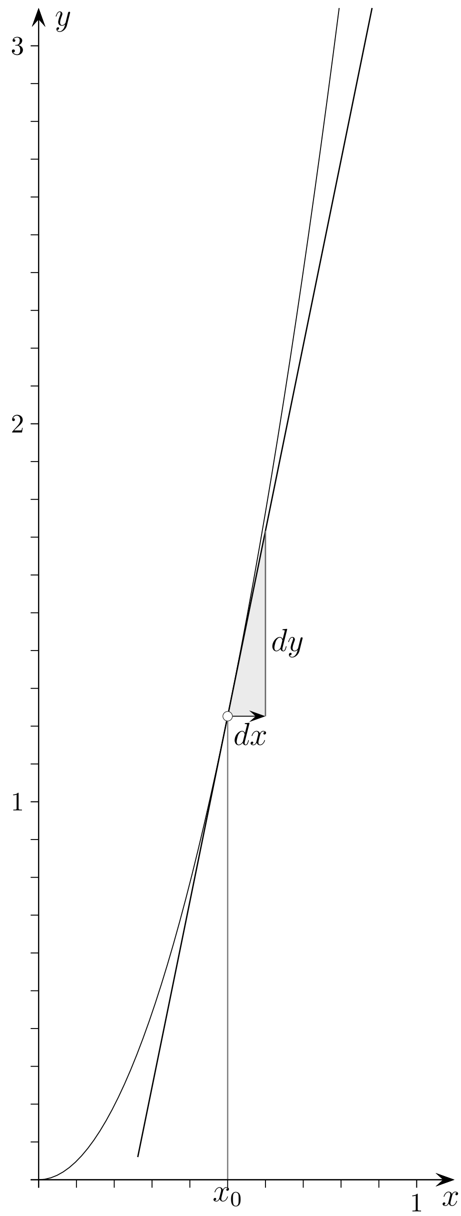
Für den Anfang geeignet

↑ Momentane Änderungsrate



Der freie Fall (im Vakuum) eines Körpers wird durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}gx^2 \qquad \text{beschrieben,}$$

y ist die Fallstrecke in m, x die Zeit in sec, $g = 9{,}81$.

Die Ableitung an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$$

wird als momentane (lokale) Änderungsrate (in diesem Fall auch Momentangeschwindigkeit) bezeichnet. Ein Verstreichen der Zeit um dx bewirkt eine (näherungsweise) Zunahme der durchfallenen Strecke um $dy = f'(x_0)\,dx$. Die Näherung ist umso besser, je kleiner dx und je geringer die Krümmung der Kurve ist.

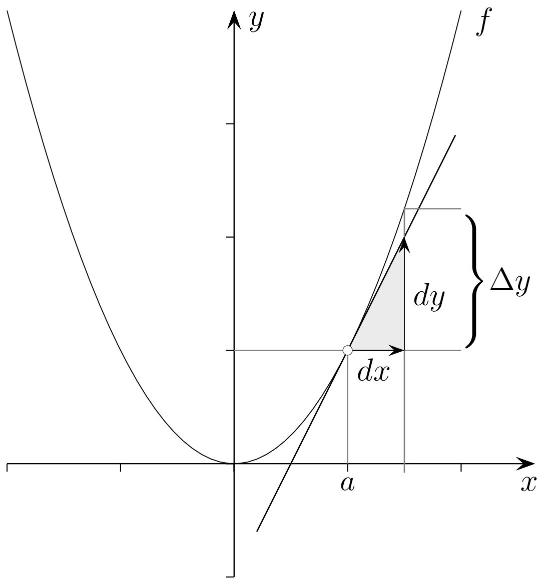
1. Welche Bedeutung hat die Ableitung einer Funktion, die folgenden Zusammenhang beschreibt?
   a) Wachstum einer Bakterienkultur in Abhängigkeit von der Zeit
   b) Temperatur eines sich abkühlenden Gegenstandes in Abhängigkeit von der Zeit
   c) Entwicklung der Gesamtkosten in Abhängigkeit von der produzierten Menge (Output)
   d) Höhe des Flüssigkeitsspiegels eines leerlaufenden Gefäßes in Abhängigkeit von der Zeit

Wenn Informationen über die lokalen Änderungsraten $f'(x)$ vorliegen, können Aussagen über die Funktion $f(x)$ gemacht werden.

2. Welche Bedeutung hat die Funktion $f(x)$, falls
   a) die Durchflussgeschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem Rohr in Abhängigkeit von der Zeit gegeben ist,
   b) die Geschwindigkeit eines Fahrzeuges in jedem Zeitpunkt bekannt ist?

3. Wie verläuft die Entwicklung einer Population, deren Änderungsrate
   a) konstant,
   b) proportional zum Bestand ist?

↑ Änderungen



Für Funktionsänderungen an einer vorgegebenen Stelle a gilt:

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(a+\Delta x) - f(a) \\ dy &= f'(a) \cdot dx \\ \Delta y &\approx dy \qquad\qquad \text{für} \quad \Delta x = dx \end{aligned}$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ mittlere Änderungsrate

$\dfrac{dy}{dx} = f'(a)$ lokale Änderungsrate

1. Eine Gesamtkostenfunktion lautet: $f(x) = \dfrac{1}{8000}x^3 - \dfrac{1}{75}x^2 + \dfrac{3}{5}x + 12.$
   Um wieviel (exakt und genähert) steigen die Gesamtkosten an, falls die Ausbringung von 60 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

2. Eine Gewinnfunktion lautet: $f(x) = 150 - 20 \cdot 10^{-0{,}02x}$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigt der Gewinn an, falls die Ausbringung von 40 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

↑ Änderungen

1. Eine Gesamtkostenfunktion lautet: $f(x) = \frac{1}{8000}x^3 - \frac{1}{75}x^2 + \frac{3}{5}x + 12$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigen die Gesamtkosten an, falls die Ausbringung von 60 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

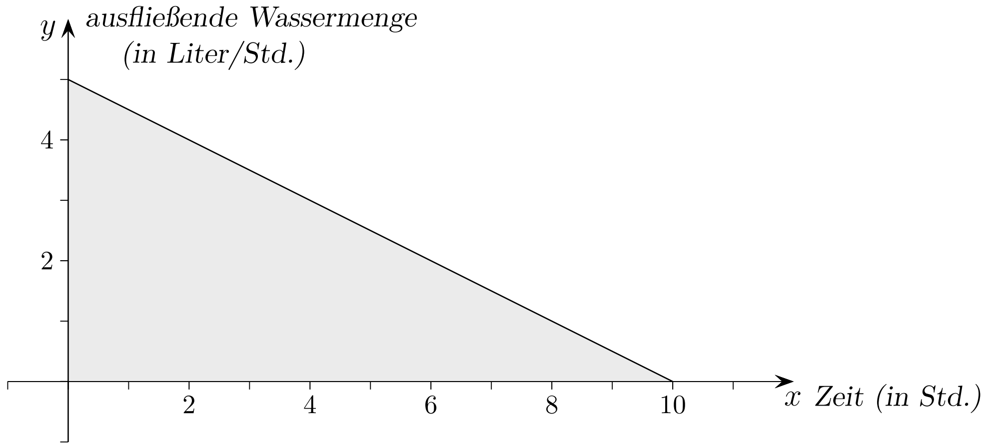
2. Eine Gewinnfunktion lautet: $f(x) = 150 - 20 \cdot 10^{-0{,}02x}$.
   Um wieviel (exakt und genähert) steigt der Gewinn an, falls die Ausbringung von 40 Einheiten um 0,5 (1; 2) Produktionseinheiten gesteigert wird?

Lösungen:

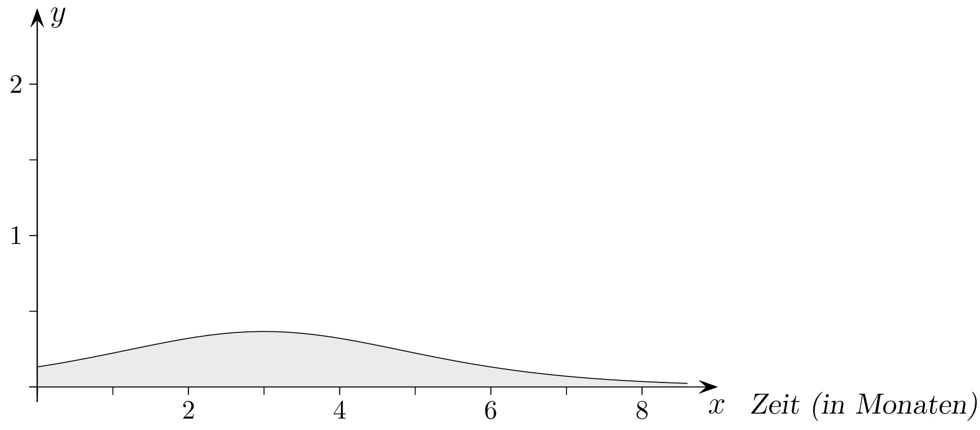
1.	$\Delta x = 0{,}5$	$\Delta y = 0{,}177$	$dy = 0{,}175$
	$\Delta x = 1$	$\Delta y = 0{,}359$	$dy = 0{,}350$
	$\Delta x = 2$	$\Delta y = 0{,}738$	$dy = 0{,}700$
2.	$\Delta x = 0{,}5$	$\Delta y = 0{,}072$	$dy = 0{,}073$
	$\Delta x = 1$	$\Delta y = 0{,}143$	$dy = 0{,}146$
	$\Delta x = 2$	$\Delta y = 0{,}279$	$dy = 0{,}292$

↑ Momentane Änderungsrate   Aufgaben

1. Aus einem Ventil, das langsam geschlossen wird, fließt Wasser.
   Genaueres ist der Grafik zu entnehmen.
   Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

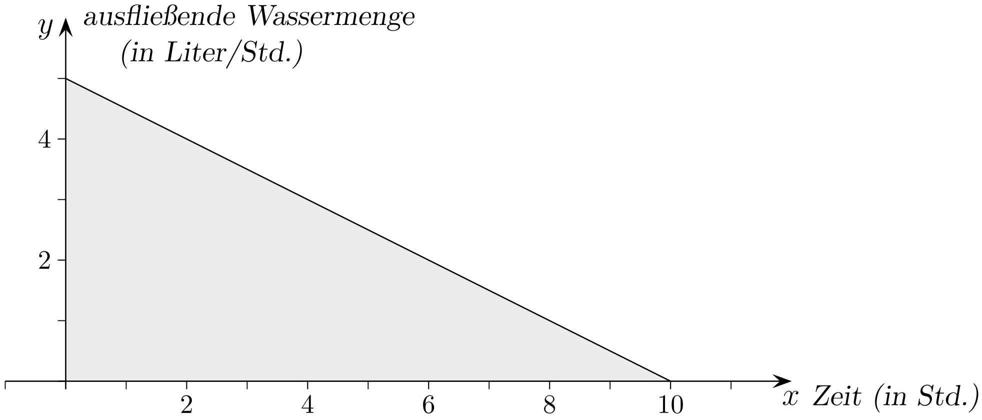


2. Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in $m/Monat$) von Sonnenblumen.
   Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe 0,20 m.



 Momentane Änderungsrate   Aufgaben mit Lösungen

1. Aus einem Ventil, das langsam geschlossen wird, fließt Wasser.
Genaueres ist der Grafik zu entnehmen.
Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?



Die Geradengleichung lautet:

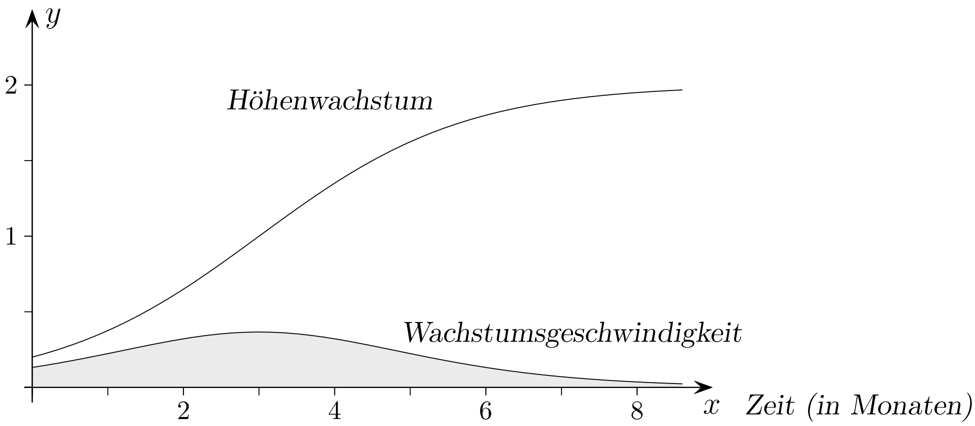
$$y = -\frac{1}{2}x + 5$$

Wenn $f(x)$ die Gesamtmenge des ausgeflossenen Wassers angibt, so ist:

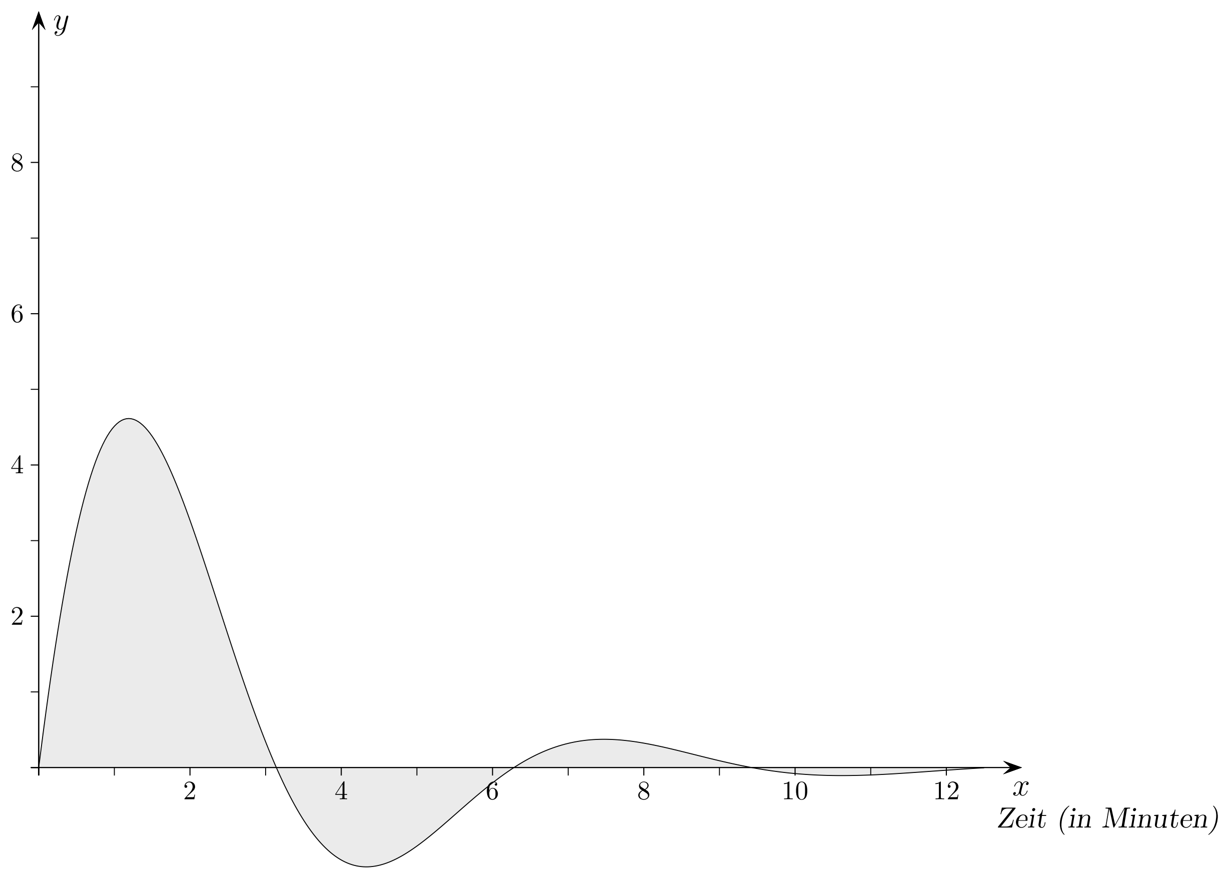
$$f'(x) = -\frac{1}{2}x+5 \quad \text{und damit} \quad f(x) = -\frac{1}{4}x^2+5x \quad \text{(beachte: } f(0)=0), \quad f(10) = 25 \ \textit{(Liter)}$$

Es bietet sich im Unterricht an, den Zusammenhang mit der Dreiecksfläche zu erörtern.
Hier hilft eine Betrachtung mit stückweise konstanter Ausfließgeschwindigkeit weiter.
Vertiefung: Die Frage nach dem Inhalt der Fläche, die eine nach unten geöffnete Parabel mit den positiven Achsen einschließt, führt hier zur Interpretation der quadratischen Funktion als Ausfließgeschwindigkeit $f'(x)$, so dass $f(x)$ und damit der Flächeninhalt bestimmt werden kann.

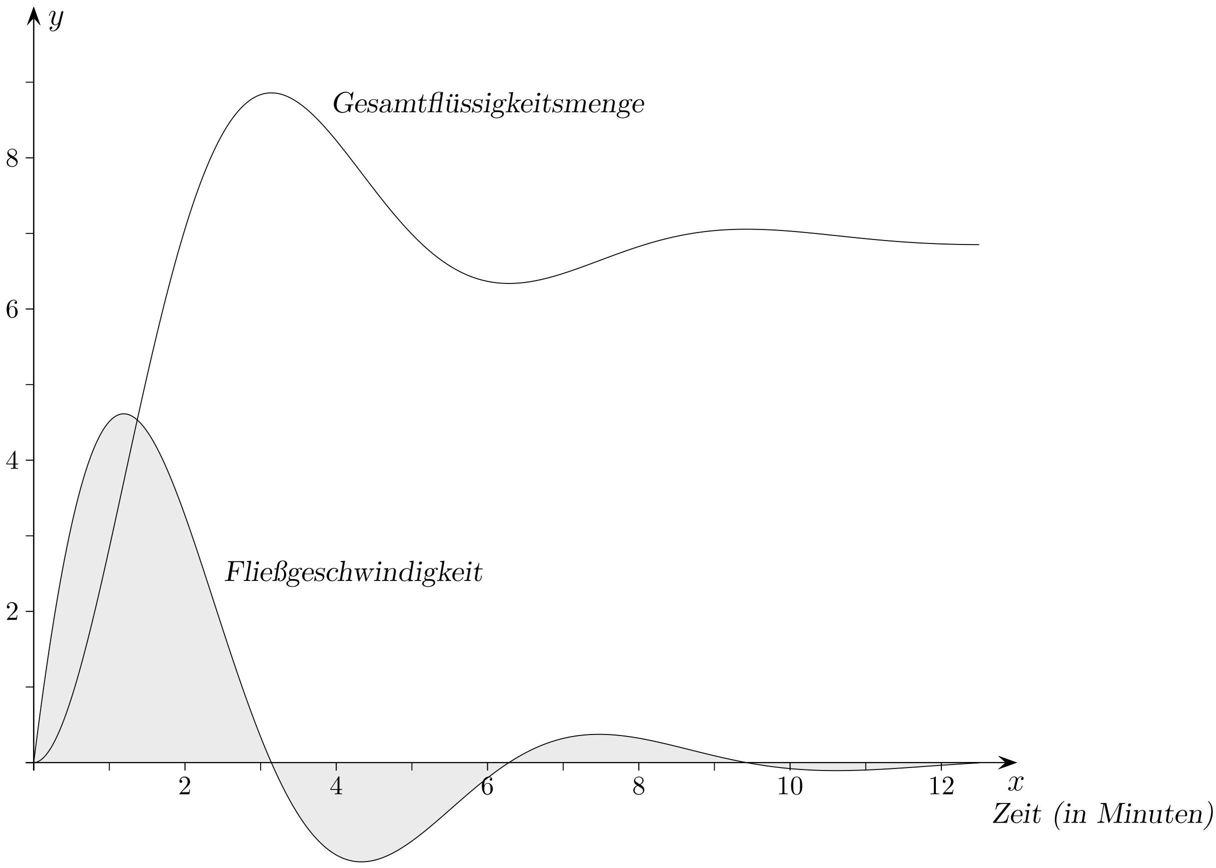
2. Gegeben ist die Wachstumsgeschwindigkeit (in *m/Monat*) von Sonnenblumen.
Zeichne den Verlauf des Höhenwachstums in Abhängigkeit von der Zeit, zur Zeit $x = 0$ beträgt die Höhe 0,20 *m*.



3. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).



3. Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).



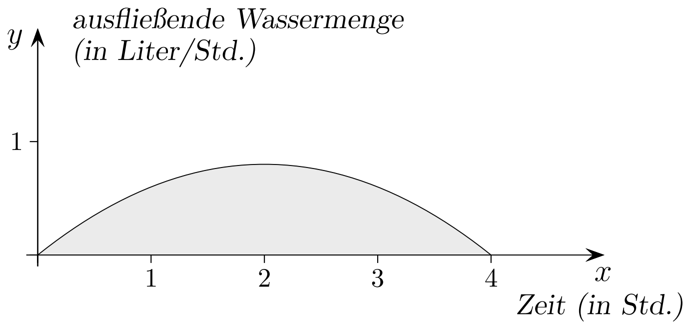
↑ Ausfließendes Wasser

Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4)\,, \quad 0 \le x \le 4$

Stelle auch den Bezug der Fragestellung zur Berechnung der Fläche her, die von der Parabel und der x-Achse eingeschlossen wird.

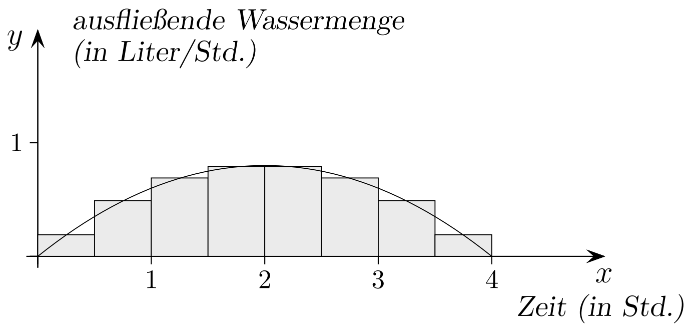


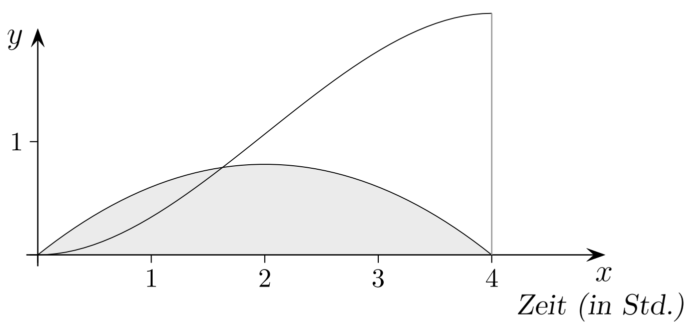
↑ Ausfließendes Wasser Lösung

Welche Wassermenge ist insgesamt ausgeflossen?

Bekannt ist die lokale Änderungsrate:

$f'(x) = -\frac{1}{5}x(x-4)\,, \quad 0 \le x \le 4$





Ergebnis:

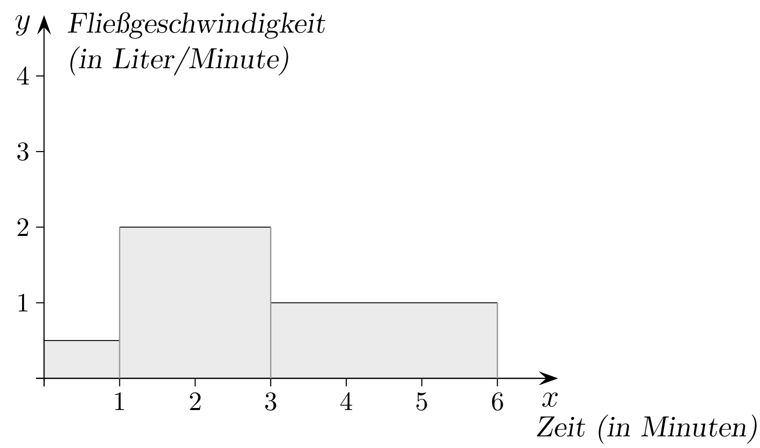
$f(4) = \frac{32}{15}$ Liter

Wenn die Menge des ausfließenden Wassers als konstant, z. B. c (Liter/Std.) für ein Zeitintervall Δx (Std.) angenommen wird, so ergibt sich für die in dieser Zeit ausgeflossene Wassermenge $c \cdot \Delta x$. Die Summe der Inhalte aller eingezeichneten Rechtecke stellt daher einen Näherungswert für die ausgeflossene Wassermenge dar, der umso genauer ist, je kleiner die Rechtecksbreite Δx gewählt wird.

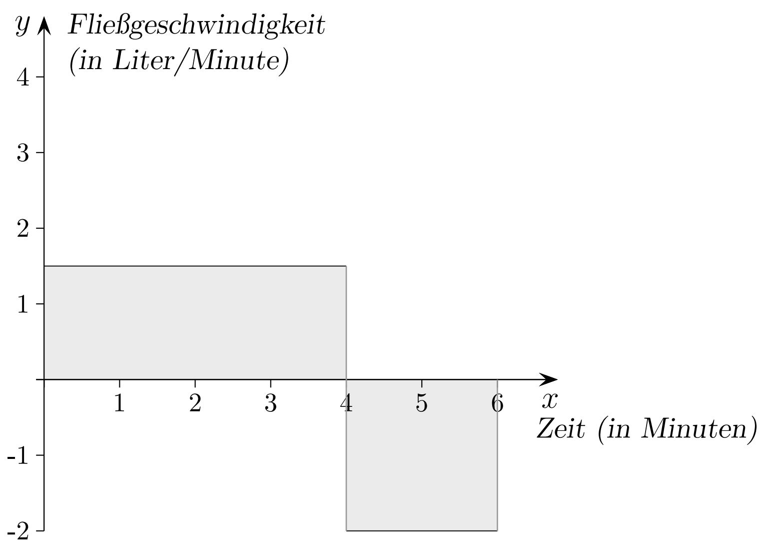
↑ Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 6 Minuten im Behälter?

a)



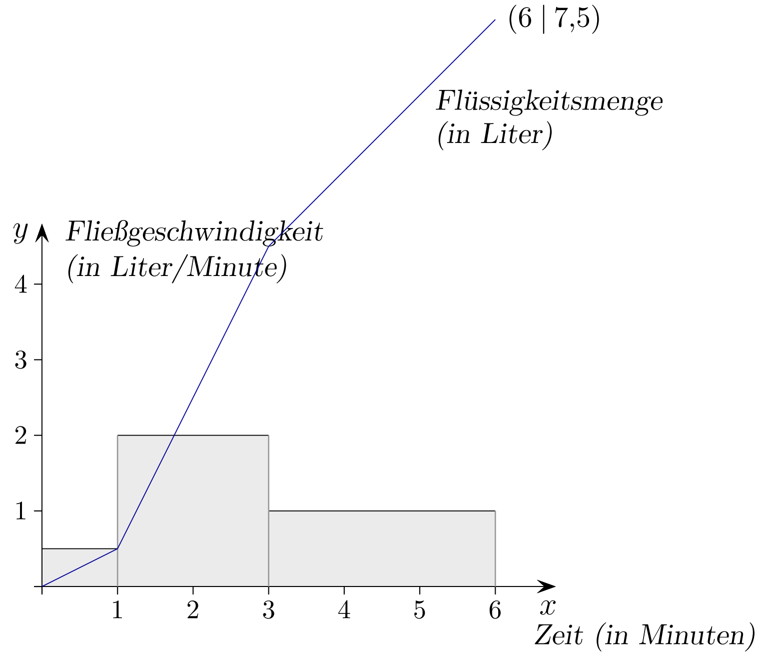
b)



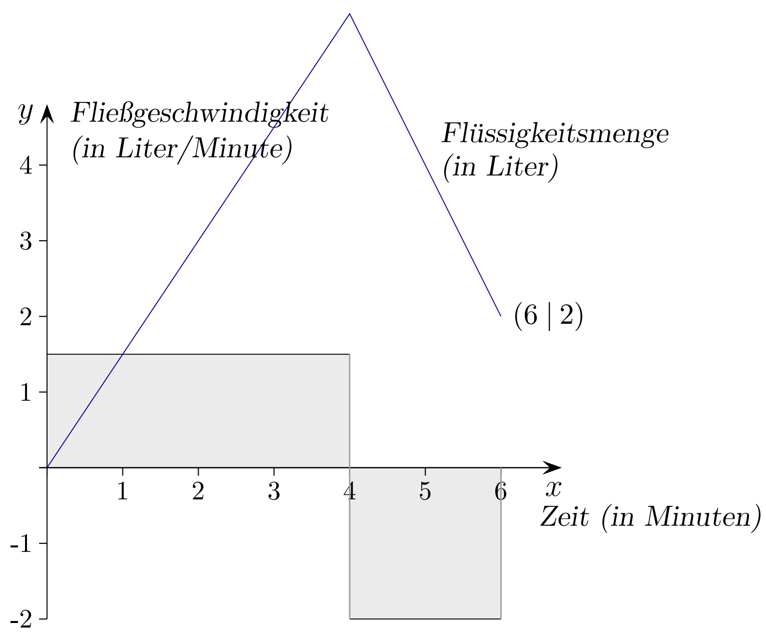
↑ Zu- und Abfluss   Lösung

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss (*Liter/Minute*) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Zeichne den zeitlich abhängigen Verlauf der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 6 Minuten im Behälter?

a)

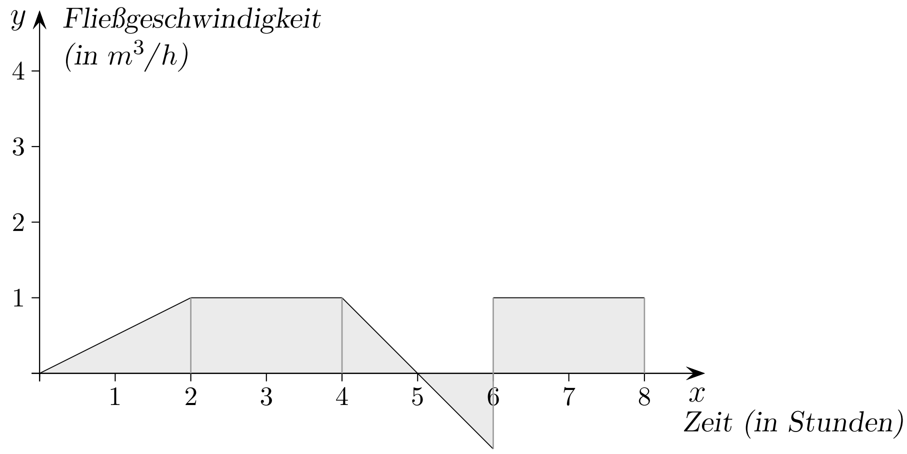


b)



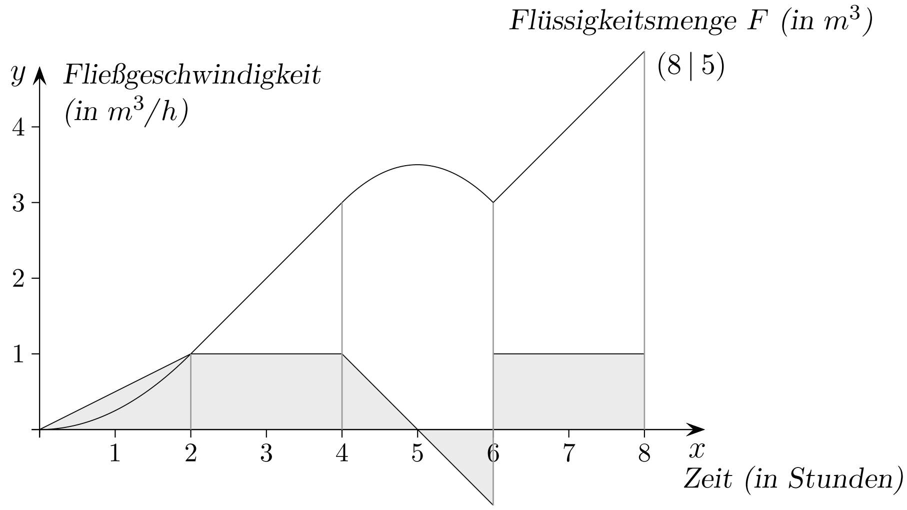
↑ Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



↑ Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter (zur Zeit $x = 0$ ist der Behälter noch leer).
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?

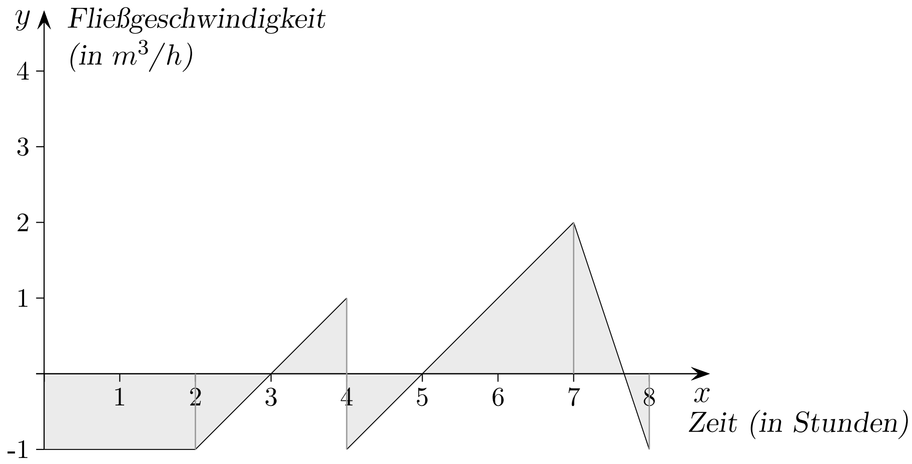


$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 & 0 \le x \le 2 \\ x - 1 & 2 < x \le 4 \\ -\frac{1}{2}(x-4)^2 + (x-4) + 3 & 4 < x \le 6 \\ x - 3 & 6 < x \le 8 \end{cases}$$

Die Teilfunktionen (die erste ausgenommen) ergeben sich aus einer Verschiebung in x- und y-Achsenrichtung.
Beachte, dass F an der Stelle $x = 6$ nicht differenzierbar ist, im Gegensatz zu den Stellen $x = 2$ und $x = 4$. Hier haben die angrenzenden Teilfunktionen von F dieselben Steigungen.

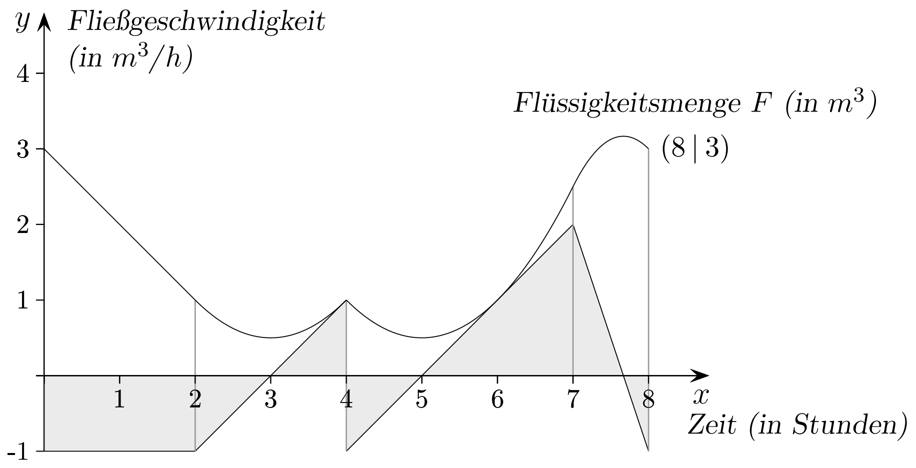
↑ Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter. Zur Zeit $x = 0$ sind 3 Liter im Behälter.
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?



↑ Zu- und Abfluss

Mit einer Pumpe wird der Flüssigkeitszufluss bzw. -abfluss ($m^3/Stunde$) eines Behälters geregelt. Die Fließgeschwindigkeit ist grafisch dargestellt (eine positive Geschwindigkeit bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss).
Ermittle die Bestandsfunktion des zeitlich abhängigen Verlaufs der Gesamtflüssigkeitsmenge im Behälter. Zur Zeit $x = 0$ sind 3 Liter im Behälter.
Wieviel Flüssigkeit befindet sich nach 8 Stunden im Behälter?

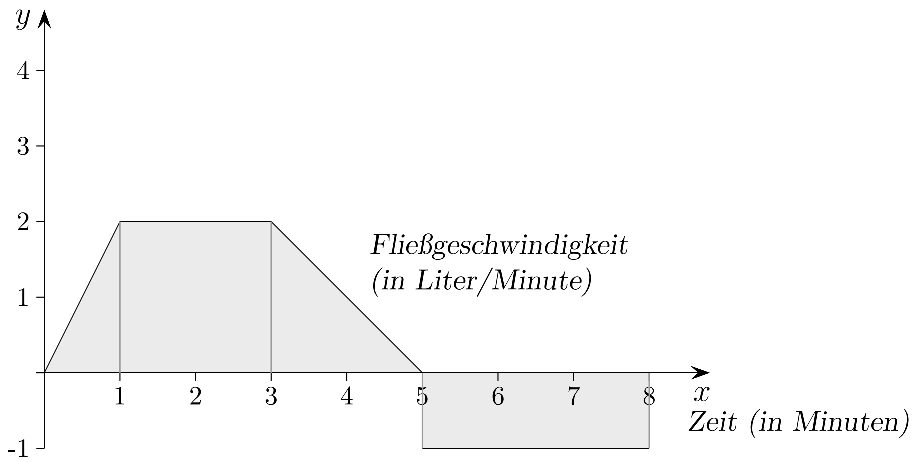


$$F(x) = \begin{cases} -x+3 & 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}(x-2)^2 - (x-2) + 1 & 2 < x \le 4 \\ \frac{1}{2}(x-4)^2 - (x-4) + 1 & 4 < x \le 7 \\ -\frac{3}{2}(x-7)^2 + 2(x-7) + \frac{5}{2} & 7 < x \le 8 \end{cases}$$

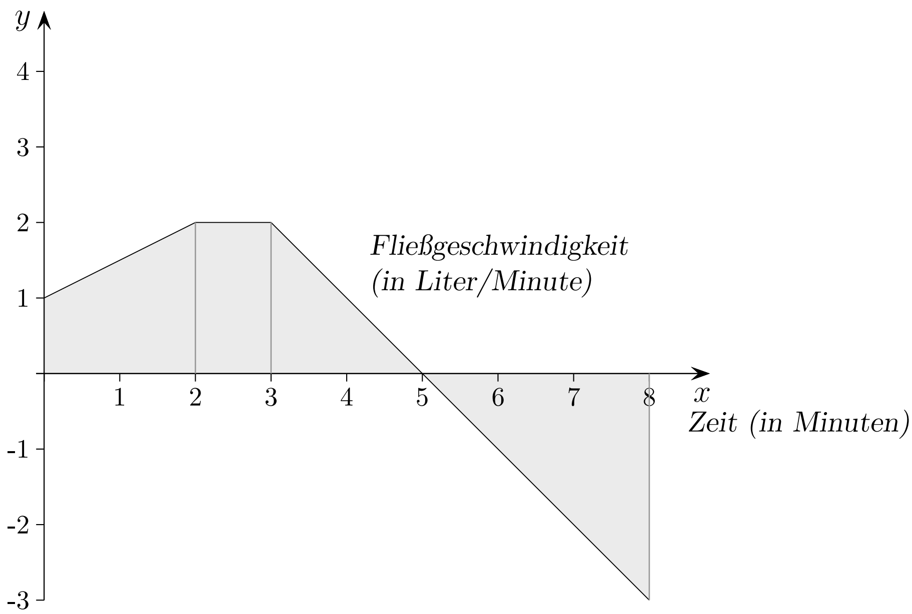
Die Teilfunktionen ergeben sich aus einer Verschiebung in x- und y-Achsenrichtung.
Beachte, dass F an der Stelle $x = 4$ nicht differenzierbar ist, im Gegensatz zu den Stellen $x = 2$ und $x = 7$. Hier haben die angrenzenden Teilfunktionen von F dieselben Steigungen.

↑ Zu- und Abfluss, Bestandsfunktion

a)

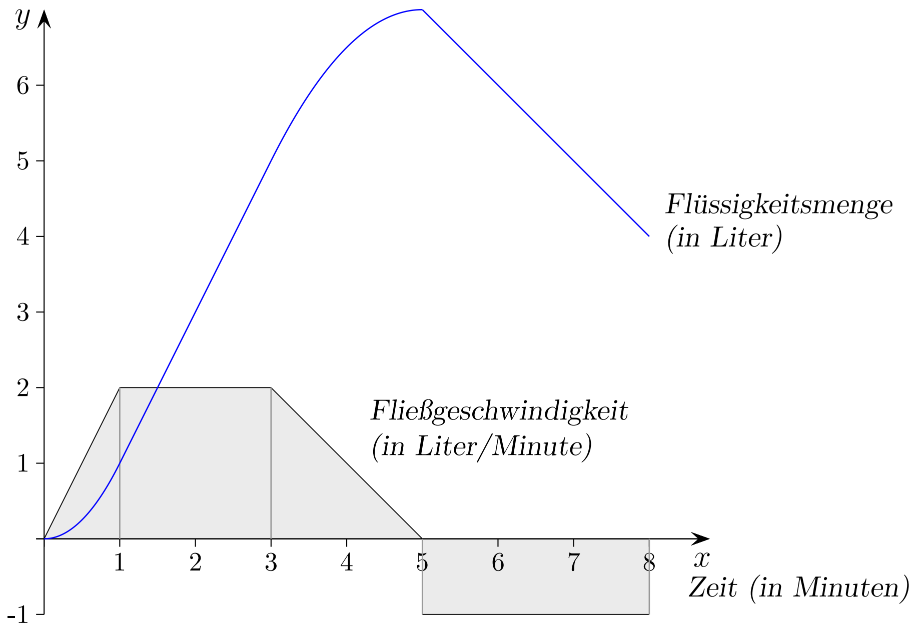


b)

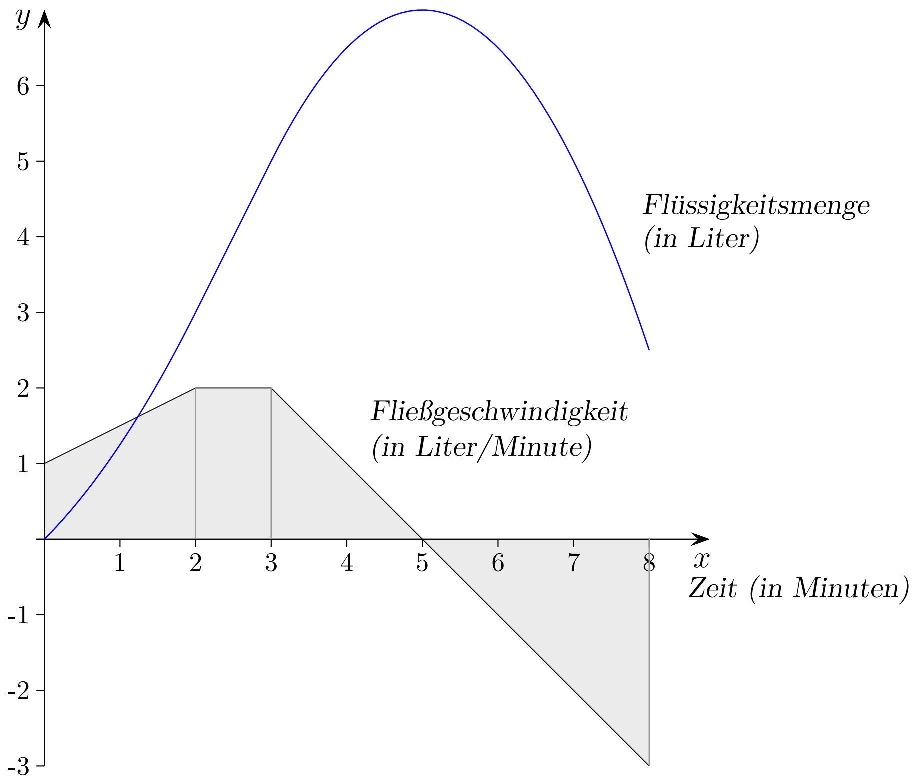


↑ Zu- und Abfluss, Bestandsfunktion

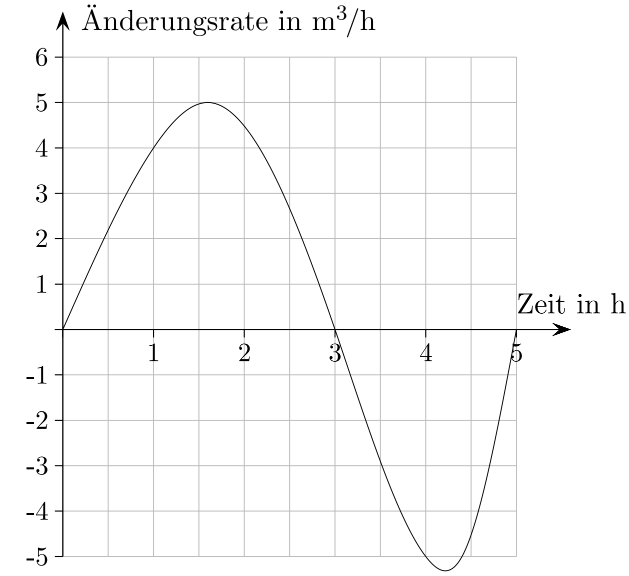
a)



b)



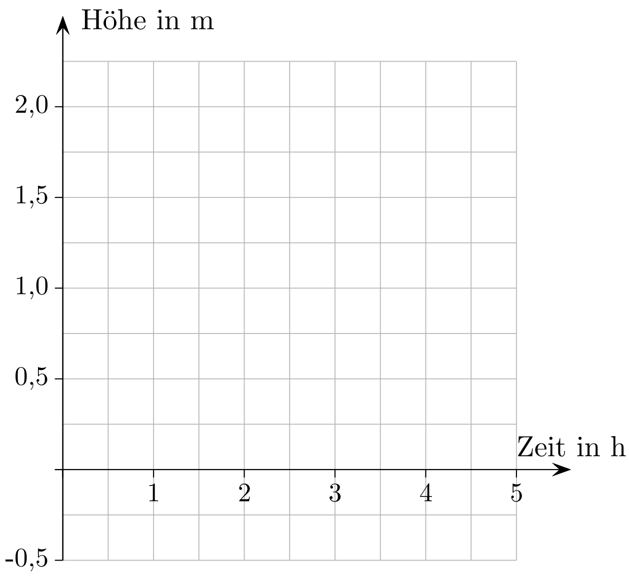
↑ Speicherbecken



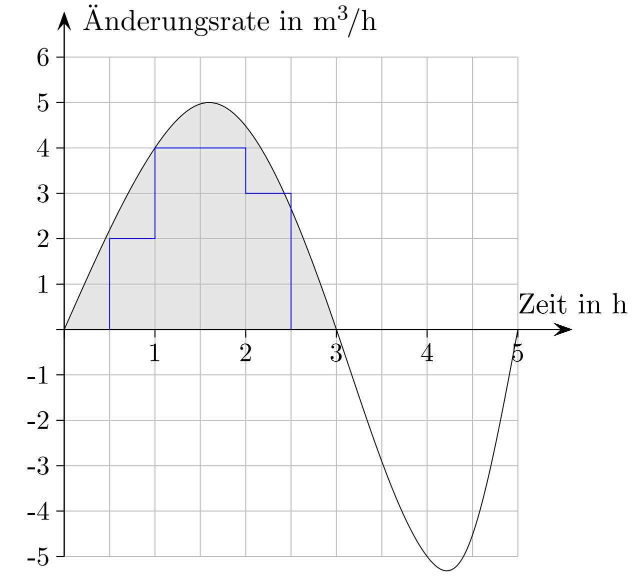
Ein quaderförmiges Speicherbecken für eine Flüssigkeit hat eine Grundfläche von $5\,\mathrm{m}^2$ und ist zunächst leer. Der Graph gibt die Zufluss- bzw. Abflussrate in m^3/h der Flüssigkeit über einen Zeitraum von 5 Stunden wieder.

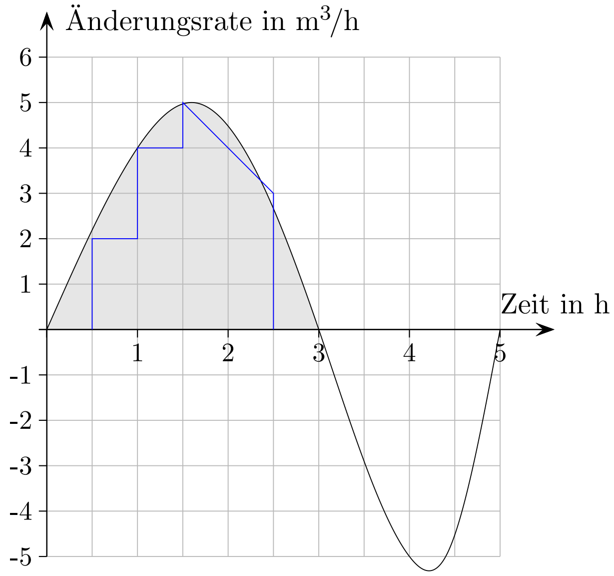
a) Bestimmen Sie näherungsweise das Volumen der in den ersten drei Stunden zufließenden Flüssigkeit.

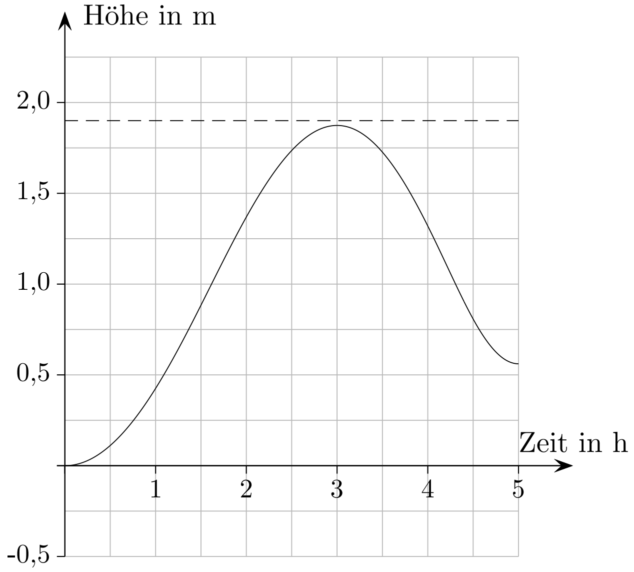
b) Skizzieren Sie in das nebenstehende Koordinatensystem einen möglichen Graphen, der die Höhe (in m) des Flüssigkeitsstandes im Speicherbecken in Abhängigkeit von der Zeit (in h) beschreibt.



↑ Speicherbecken







Ein Kästchen entspricht 0,5 m^3,
19 Kästchen entsprechen 9,5 m^3 (18,5 Kästchen).
höchster Flüssigkeitsstand: 9,5 m^3 : 5 m^2 = 1,9 m

↑ Historisches

Galilei gewann 1632 aus dem Geschwindigkeitsgesetz $v = at$ das Weggesetz $s = \frac{1}{2}at^2$.
Die Betrachtung der Tangentensteigung als lokale (momentane) Änderungsrate geht auf Torricelli (1644), Roberval und Newton (1666) zurück. Newton bezeichnete eine sich zeitlich ändernde (fließende) Größe als Fluente und die lokale Änderungsrate als Fluxion. Parallel dazu entwickelte Leibniz die Methode der Differentiale mit einer noch heute unveränderten, eingängigen Notation, die die Entwicklung der Mathematik im 17. Jh. außerordentlich beschleunigte. Das umfangreiche Werk von Cauchy (1789-1857) umfasst den uns geläufigen Grenzwertbegriff. Die endgültige Präzisierung erfolgte durch Weierstraß, sie ist der Universität vorbehalten. In der Schule begnügt man sich notwendigerweise mit einem propedeutischen Grenzwertbegriff.
Ab dem Jahr 2000 besannen sich Didaktiker auf die Newtonsche dynamische Herangehensweise, um einen für sie gangbaren Zugang zur Ableitung und zum Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung zu ermöglichen. Seitdem beinhaltet fast jede Analysis-Abituraufgabe lokale Änderungsraten und Bestandsfunktionen (Newton: Fluenten).

Bei der Einführung der Differenzialrechnung wird häufig zur Überdeckung der Grenzwertproblematik die momentane Änderungsrate genannt, in Anlehnung an die momentane Geschwindigkeit, die als intuitiv verständlich angenommen wird. Diese physikalische Betrachtungsweise, ohne (Näherungs-)Folgen und die von ihnen erzeugten reellen Zahlen (Grenzwerte) zu thematisieren, wäre für das Verständnis jedoch unzureichend, siehe Links.
Newton hat übrigens den Begriff der momentanen Änderungsrate wieder fallen gelassen, um seinen Kalkül fundierter zu begründen.

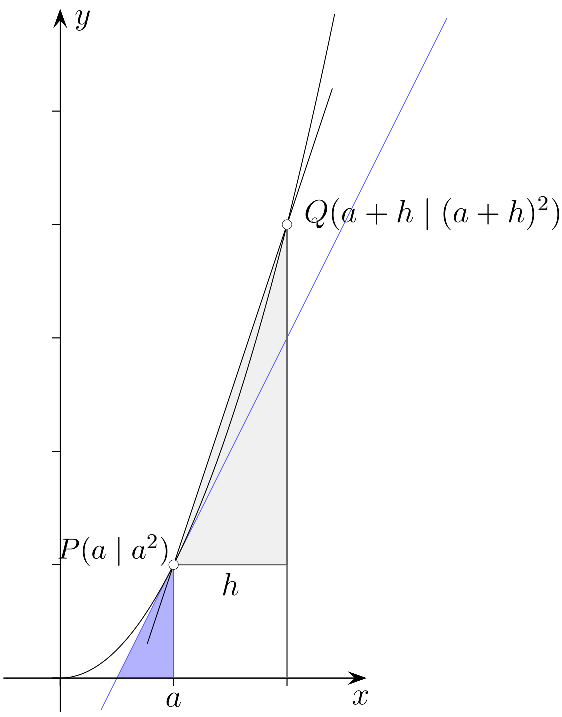
Leibniz meinte, sein Kalkül führe *presque sans meditation* zu Resultaten und enthebe einen der Notwendigkeit, *de travailler avec l'imagination*. Das trifft fürs Ableiten und Integrieren (Niveaubereich I) zu. In der Schule ist das erst der Anfang.

↑ Bemerkung zur Didaktik

Für die übliche schulische Rechnung ist dem Anschein nach keine nähere Untersuchung von Grenzwerten erforderlich. Folgen sind im Lehrplan nicht enthalten.

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2$.

Um die Steigung der Tangente im Punkt $P\big(a \mid a^2\big)$ zu bestimmen, ermitteln wir zunächst die Steigung der Sekante durch $P\big(a \mid a^2\big)$ und $Q\big(a+h \mid (a+h)^2\big)$.



Die Sekantensteigung entspricht der durchschnittlichen Änderungsrate auf dem Intervall $[a; a+h]$.

$f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ist die

lokale Änderungsrate einer Funktion f an der Stelle a.

$$\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} \\
&= \frac{2ah + h^2}{h} \\
m_{\text{Sekante}} &= 2a + h \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{h \to 0} (2a + h) \;=\; 2a
\end{aligned}$$

Nicht selten wird mit unzureichender Erklärung wegen $h \to 0$ h gleich null gesetzt.

Eine korrektere Schreibweise enthüllt die Problematik:

$f'(a) = \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ ist die lokale Änderungsrate einer Funktion f an der Stelle a.

$$\begin{aligned}
m_{\text{Sekante}} &= \ldots = 2a + h \\
m_{\text{Tangente}} &= \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \neq 0}} (2a + h) \;=\; 2a
\end{aligned}$$

Nun hakt es[1]: Einerseits muss $h \neq 0$ sein, andererseits wird $h = 0$ gesetzt.
Um hierauf befriedigend antworten zu können, ist ein Blick auf die reellen Zahlen und deren Zusammenhang mit Grenzwerten erforderlich.

[1] George Berkeley verfasste 1734 eine vielbeachtete Schrift, in der er auf 28 Seiten darzulegen versuchte, dass die Differentialrechnung auf widersprüchlichen Grundlagen beruht.

Eine Änderungsrate beschreibt, wie sich eine Größe im Verhältnis zu einer anderen Größe ändert. Die mittlere (auch durchschnittliche) Änderungsrate entspricht der Sekantensteigung. Die momentane (auch lokale) Änderungsrate ist eine abstrakte, math. Größe. Ihre Berechnung ist mit der Berechnung der Tangentensteigung identisch, erfordert somit einen Grenzprozess. Die Interpretation der momentanen Änderungsrate als Momentangeschwindigkeit ändert daran nichts.

Interessant:
Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann nachgewiesen werden, dass für ein Intervall die mittlere Änderungsrate der Mittelwert der lokalen Änderungsrate ist.

Intervallschachtelung

ReelleZahlen

Grenzwerte

Heron-Verfahren

Jahrgang 11 Differentialrechnung

Startseite