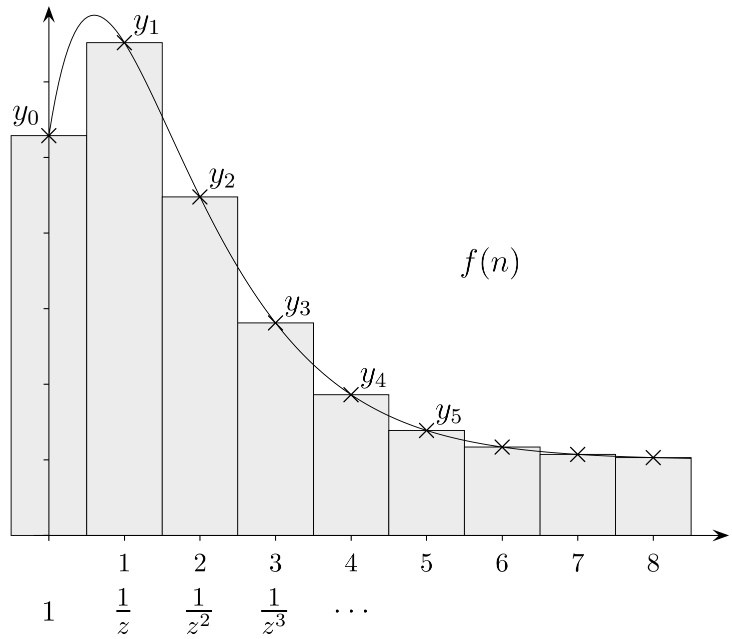
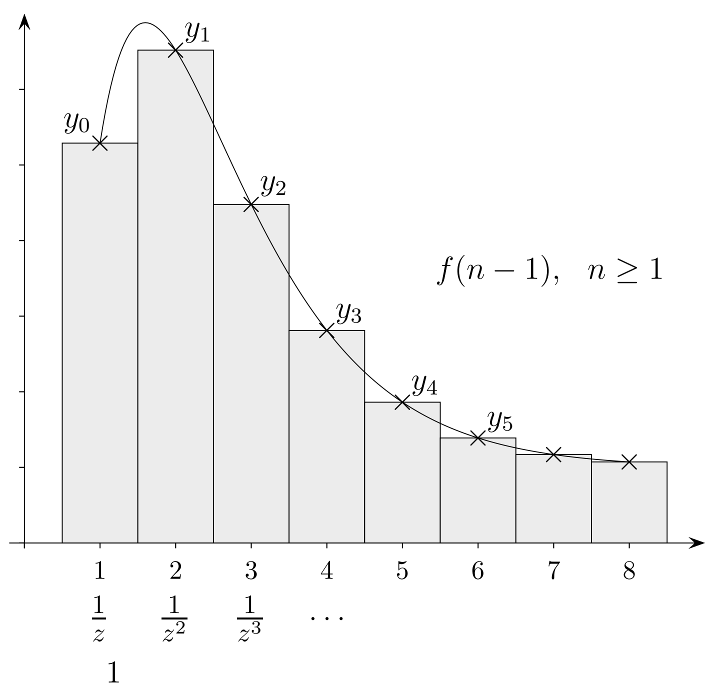
Z-Transformation

1. Z-Transformation
2. Links-Verschiebung
3. Beispiel $\quad y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n,\ y_0 = 0,\ y_1 = 1$
4. Rücktransformation
5. Laplace-Transformation
6. Eindeutigkeit der Laplace-Transformation, heuristisch
7. Approximation durch eine Treppenfunktion
8. Beispiel $\quad y'' + 2y' + y = 9e^{2t},\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 1$
9. Laplace-Transformierte der Delta-Funktion
10. Beispiel $\quad 2y'' + 4y' + 10y = \delta(t),\quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

$\uparrow$ Z-Transformation

Für eine Differenzengleichung wie z. B. $f(n+1) - 2f(n) = n2^n$
(alternative Schreibweise $y_{n+1} - 2y_n = n2^n$) ist eine explizite Form für die Folge $f(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$, gesucht. Als hilfreiches Werkzeug dient die Z-Transformation.
Hierbei wird zu einer Folge y_0, y_1, y_2, y_3, … die Summe $y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z^3} + \ldots$
gebildet, die auf dem Konvergenzbereich eine gebrochen-rationale Funktion $F(z)$ (Z-Transformierte) darstellt. Die Z-Transformierten der verschobenen Folgen wie z. B. y_{n+1}, y_{n+2} oder y_{n-1} lassen sich durch die Z-Transformierte F von y_n ausdrücken, so dass bei einer Transformation der Differenzengleichung (genauer deren Folgen) eine Gleichung entsteht, die nach F umgestellt werden kann.
Der Funktionsterm von F wird in handliche Summanden umgeformt (häufig Partialbruchzerlegung) und mit einer Tabelle für die Rücktransformationen kann die gesuchte Folge gefunden werden.





Erläutere:

$F(y_{n-1}) = F(y_n) \cdot \frac{1}{z}, \quad n \geq 1$

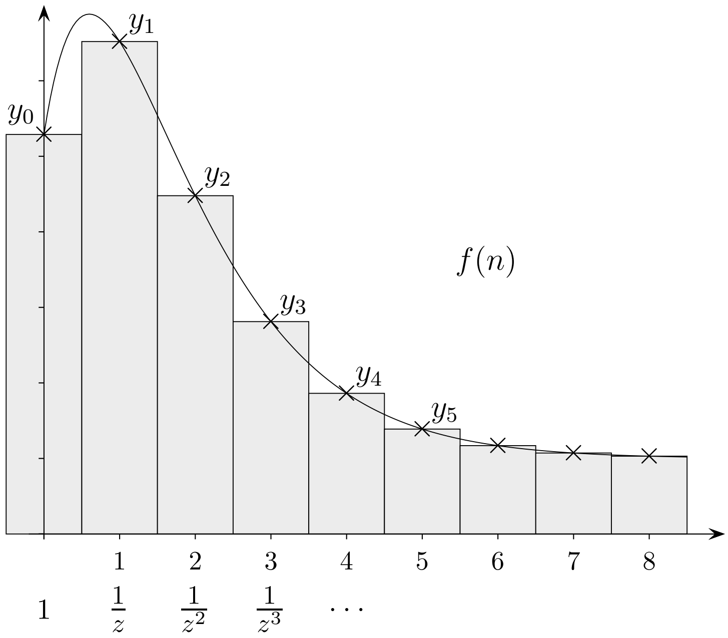
Erläutere:

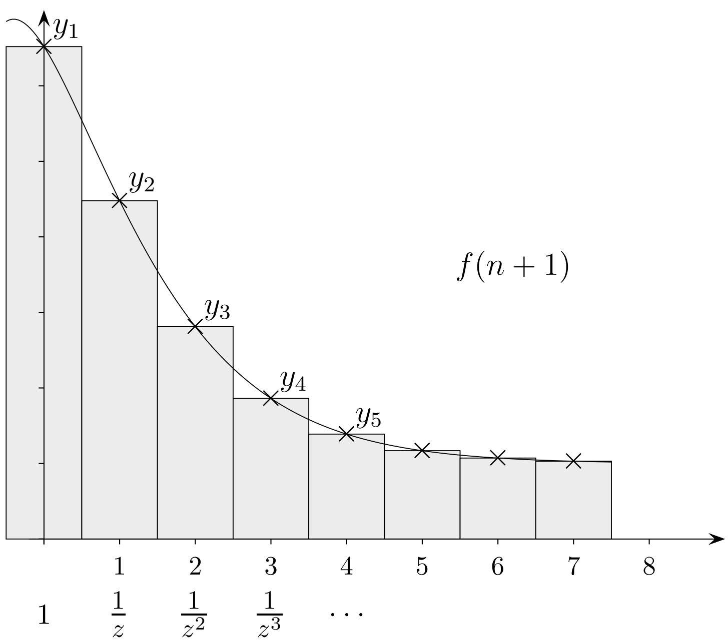
$F(y_{n-1}) = F(y_n) \cdot \frac{1}{z}\ , \quad n \geq 1$

Die Z-Transformierte von y_n lautet $y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z^3} + \ldots$,

die Z-Transformierte von y_{n-1} hingegen: $\frac{y_0}{z} + \frac{y_1}{z^2} + \frac{y_2}{z^3} + \ldots$

↑ Z-Transformation   Links-Verschiebung





Erläutere:

$F(y_{n+1}) = z \cdot \big(F(y_n) - y_0\big)$

$F(y_{n+2}) = z \cdot \big(F(y_{n+1}) - y_1\big) \; = ?$

Erläutere:

$F(y_{n+1}) = z \cdot \big(F(y_n) - y_0\big)$

Die Z-Transformierte von y_n lautet $y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z^3} + \ldots,$

die Z-Transformierte von y_{n+1} hingegen: $y_1 + \frac{y_2}{z} + \frac{y_3}{z^2} + \frac{y_4}{z^3} + \ldots$

$F(y_{n+2}) = z \cdot \big(F(y_{n+1}) - y_1\big) \; = ?$

Dieselbe Überlegung wird für eine weitere Links-Verschiebung um 1 noch einmal angewandt.

$F(y_{n+2}) = z^2 \cdot \big(F(y_n) - y_0 - y_1\, z^{-1}\big)$

↑ Z-Transformation Beispiel

$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n, \quad y_0 = 0,\ y_1 = 1$

Die Z-Transformation ergibt:

$z^2 \cdot \big(F(y_n) - y_0 - y_1\, z^{-1}\big) - 4z\big(F(y_n) - y_0\big) + 4F(y_n) = F(2^n) \qquad \Longrightarrow$

$\underbrace{(z^2 - 4z + 4)}_{(z-2)^2} F(y_n) = z + \frac{z}{z-2} \qquad$ beachte $\quad F(a^n) = \frac{z}{z-a}$

$\Longrightarrow$

$F(y_n) = \frac{z}{(z-2)^2} + \frac{z}{(z-2)^3} \qquad \Longrightarrow$

$y_n = n2^{n-1} + \frac{1}{2}(n^2 - n)2^{n-2}, \quad n \geq 0 \qquad$ (Tabelle)

vereinfacht:

$y_n = (3n + n^2)2^{n-3}, \quad n \geq 0$

↑ Rücktransformation

Die Rücktransformation erfolgt praktischerweise mit einer Tabelle.
Der mathematische Zusammenhang für die Rekonstruktion der Folge aus der Z-Transformierten wird durch die beeindruckende Formel erfasst:

$$y(n) = \frac{1}{2\pi i} \oint F(z)\, z^{n-1}\, dz$$

Ähnliches gilt für die Laplace-Transformation.

Sei z. B. $n = 3$.

$$F(z) = y_0 + \frac{y_1}{z} + \frac{y_2}{z^2} + \frac{y_3}{z^3} + \frac{y_4}{z^4} + \dots \quad \Longrightarrow \quad F(z) \cdot z^2 = y_0 z^2 + y_1 z + y_2 + \frac{y_3}{z} + \frac{y_4}{z^2} + \dots$$

Das Residuum von $F(z) \cdot z^2$, $z \in \mathbb{C}$, ist y_3.

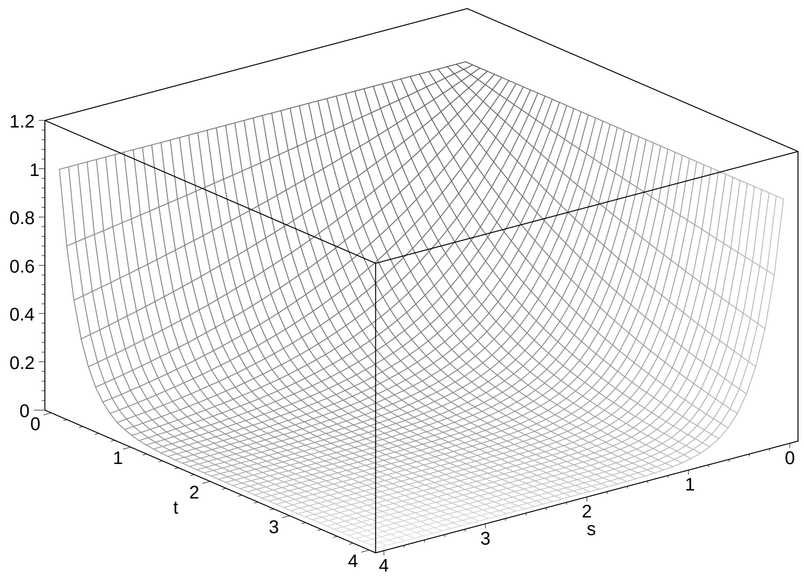
Das komplexe Kurvenintegral $\oint$ längs einer geschlossenen Kurve ergibt sich unmittelbar aus dem Residuensatz der Funktionentheorie. Hiernach liefert bei der Integration von $F(z) \cdot z^2$ nur der Summand $\frac{y_3}{z}$ einen von Null verschiedenen Beitrag, und zwar $y_3 2\pi i$.

↑ Laplace-Transformation

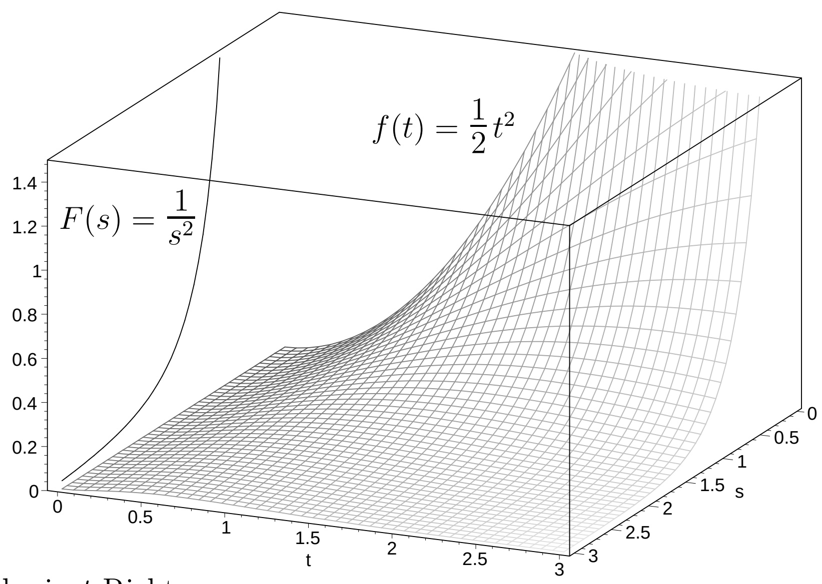
Die Laplace-Transformierte einer Funktion $f(t)$, $t \geq 0$, lautet (sofern das Integral existiert):

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

Die Laplace-Transformierte von $f'(t)$ ist dann $sF(s) - f(0)$ (mit partieller Integration einsehbar), und die von $f''(t)$ ist: $s(sF(s) - f(0)) - f'(0)$. In einer DGL können die Summanden durch die Laplace-Transformierten ausgetauscht werden. Die Gleichung wird nach $F(s)$ umgestellt, $f(t)$ mit einer Transformations-Tabelle ermittelt.
Die folgenden Graphen veranschaulichen die Laplace-Transformation.

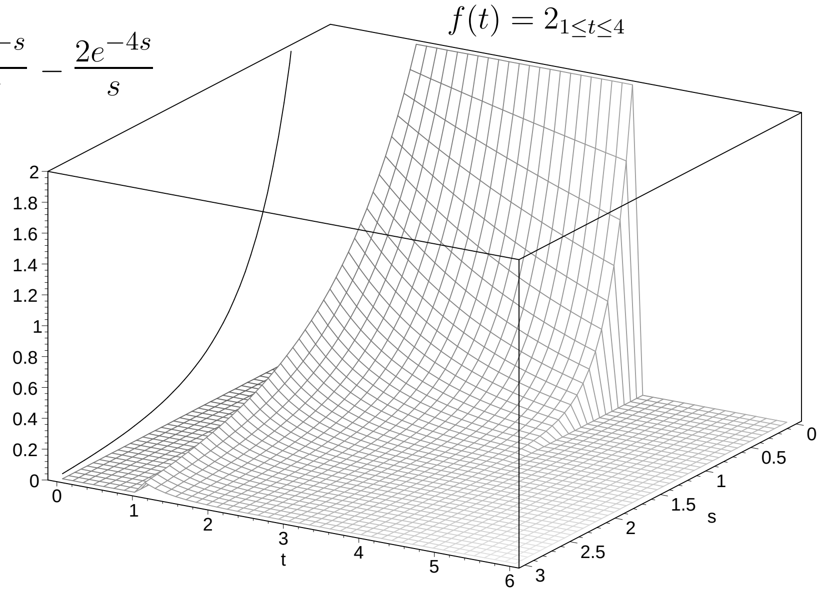


$(s,t) \longrightarrow e^{-st}$ als Faktor drückt alles zu Boden.

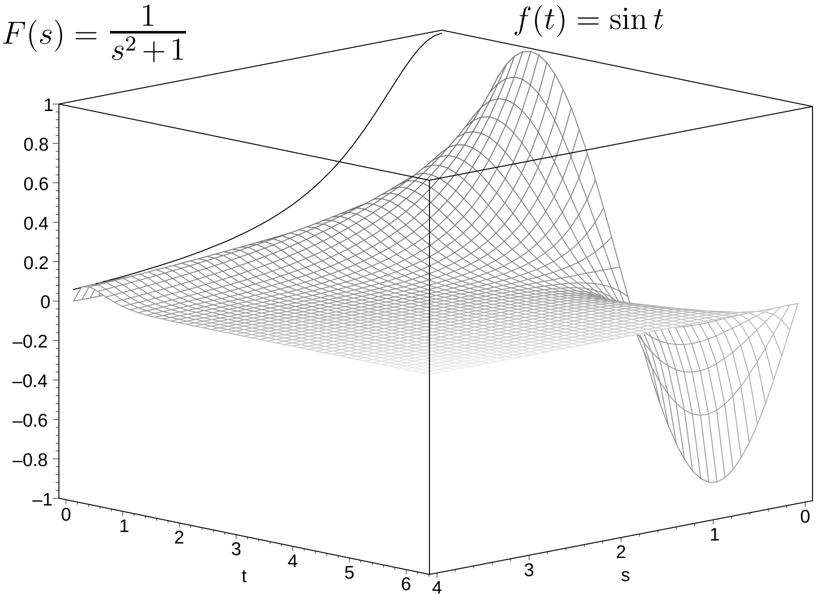


$F(s)$ gibt die Querschnittsfläche in t-Richtung an.

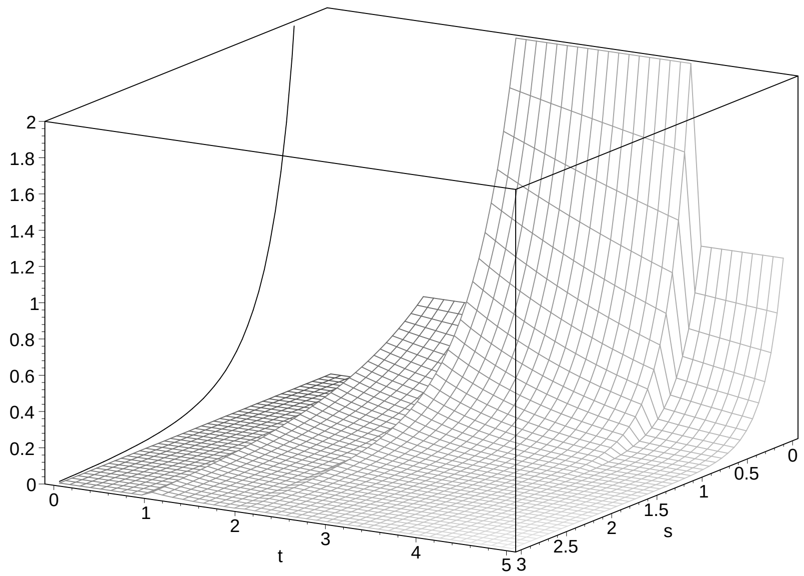
$$F(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{2e^{-4s}}{s} \qquad f(t) = 2_{1\le t\le 4}$$



$$F(s) = \frac{1}{s^2+1} \qquad f(t) = \sin t$$



↑ Eindeutigkeit der Laplace-Transformation, heuristisch



Wir betrachten die Treppenfunktion:

$$f(t) = \frac{1}{2}_{t \geq 1} + \frac{3}{2}_{t \geq 2} - 1_{t \geq 4}$$

in Maple $\quad f(t) = \frac{1}{2} Heaviside(t-1) + \frac{3}{2} Heaviside(t-2) - Heaviside(t-4)$

Die Laplace-Transformierte lautet:

$$F(s) = \frac{1}{2}\frac{e^{-s}}{s} + \frac{3}{2}\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4s}}{s}$$

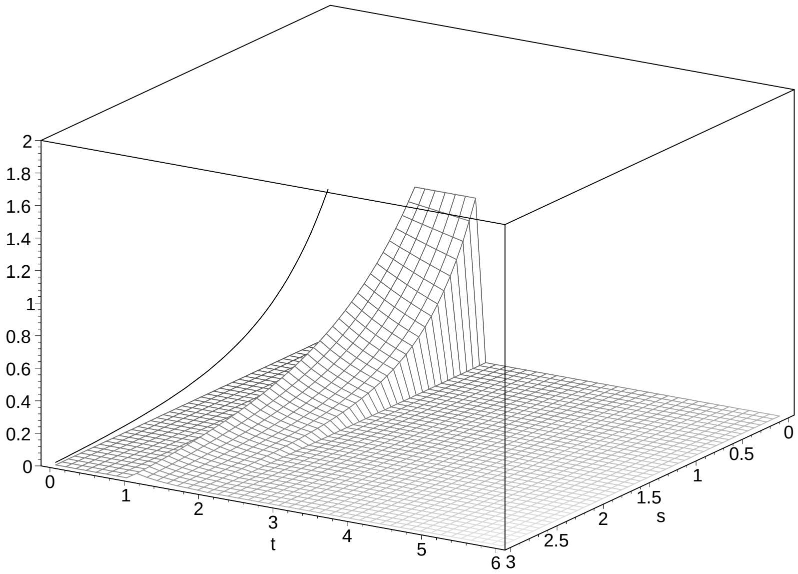
Es ist zu sehen, wie die Funktion f in die Laplace-Transformierte eingeht und umgekehrt wieder aus ihr gefiltert werden könnte.
Wenn man nun noch bedenkt, dass wir Funktionen betrachten, die durch Treppenfunktionen approximiert werden können, wird der eindeutige Zusammenhang einer Funktion und ihrer Laplace-Transformierten erkennbar.

↑ Approximation von $f(t) = t^2$ durch eine Treppenfunktion g

g:=t −> sum(f(i*dx)*(Heaviside(t−i*dx)−Heaviside(t−(i+1)*dx), i=0..n):

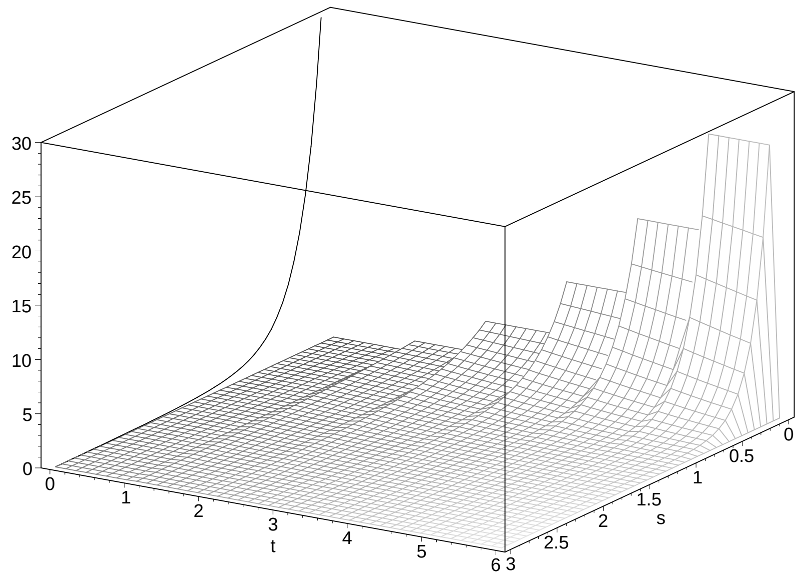
dx:=1: n:=1:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s}$$



dx:=1: n:=5:

$$F(s) = \sum_{i=0}^{5} f(i\,dx)\left[\frac{e^{-i\,dx\,s}}{s} - \frac{e^{-(i+1)\,dx\,s}}{s}\right]$$
$$= \frac{e^{-s}}{s} + \frac{3e^{-2s}}{s} + \frac{5e^{-3s}}{s} + \frac{7e^{-4s}}{s} + \frac{9e^{-5s}}{s} - \frac{25e^{-6s}}{s}$$



↑ Laplace-Transformation Beispiel

Die DGL $y'' + 2y' + y = 9e^{2t}$ ist zu lösen, Anfangswerte: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Die Transformation der DGL ergibt:

$$(s^2 \cdot F(s) - s \cdot 0 - 1) + 2(s \cdot F(s) - 0) + F(s) = \frac{9}{s-2} \qquad \Longrightarrow$$

$$F(s) = \frac{s+7}{(s+1)^2\,(s-2)}$$

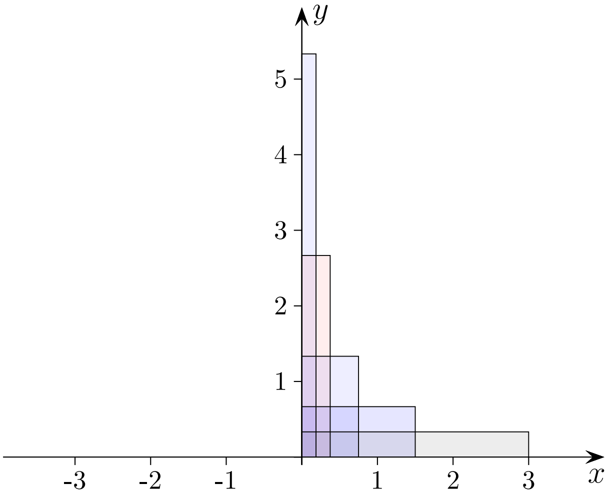
Eine Partialbruchzerlegung mit dem Ansatz $\dfrac{s+7}{(s+1)^2\,(s-2)} = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{(s+1)^2} + \dfrac{C}{s-2}$
liefert eine Zerlegung.

$$F(s) = -\frac{1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s-2}$$

Nun gelingt die Rücktransformation.

$$y(t) = -e^{-t} - 2t\,e^{-t} + e^{2t} = -(2t+1)\,e^{-t} + e^{2t}$$

↑ Laplace-Transformierte der Delta-Funktion



Die Laplace-Transformierte der Funktion $f(t) = \frac{1}{\varepsilon} \cdot 1_{0 \leq t \leq \varepsilon}$ lautet:

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st}\, dt = \ldots = \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s}$$

Mit $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = 1$ (l'Hospital oder Tangentengleichung des Zählers)
erhalten wir:

$\mathcal{L}(\delta(t)) = 1$

Weiter gilt:

$\mathcal{L}(\delta(t - a)) = e^{-sa}$

↑ Laplace-Transformation Beispiel

Die DGL $2y'' + 4y' + 10y = \delta(t)$ ist zu lösen, Anfangswerte $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Die Transformation der DGL ergibt:

$$2s^2 \cdot F(s) + 4sF(s) + 10F(s) = 1 \qquad \Longrightarrow$$

$$F(s) = \frac{1}{2s^2 + 4s + 10}$$

Die Rücktransformation liefert

$$y(t) = \frac{1}{4} e^{-t} \sin(2t).$$