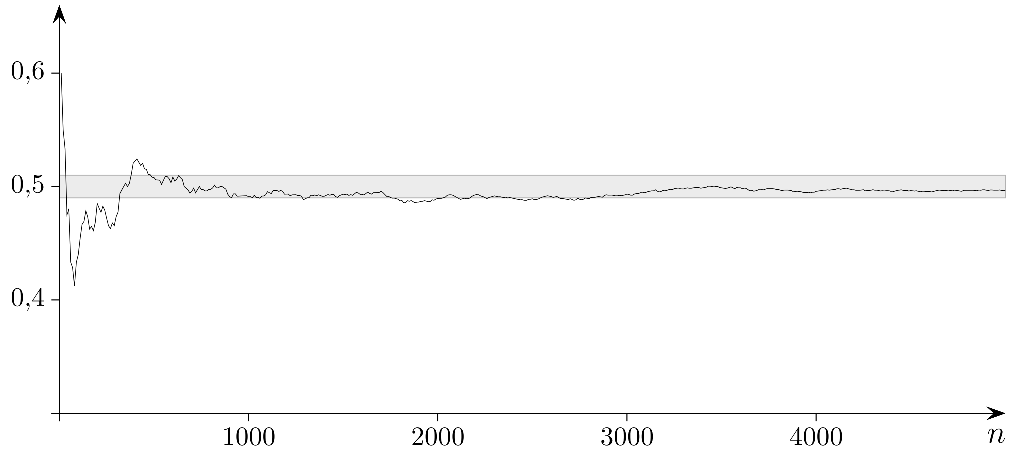
Schwaches Gesetz der großen Zahlen Jakob Bernoulli 1655 - 1705

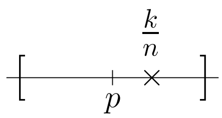


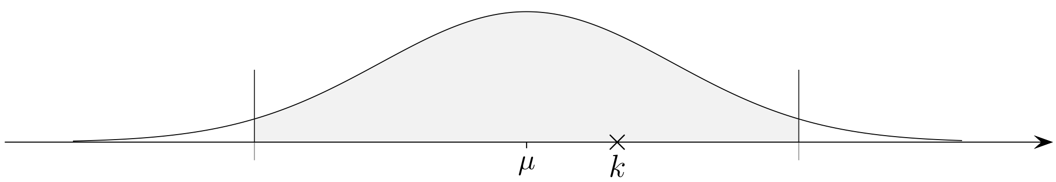
Die relative Häufigkeit $h = \dfrac{k}{n}$ strebt gegen die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p.

In Worten: $\dfrac{k}{n}$ konvergiert stochastisch gegen p.

Zu zeigen:
Für jedes noch so kleine $d > 0$ (in der Literatur wird ε epsilon verwendet) gilt:

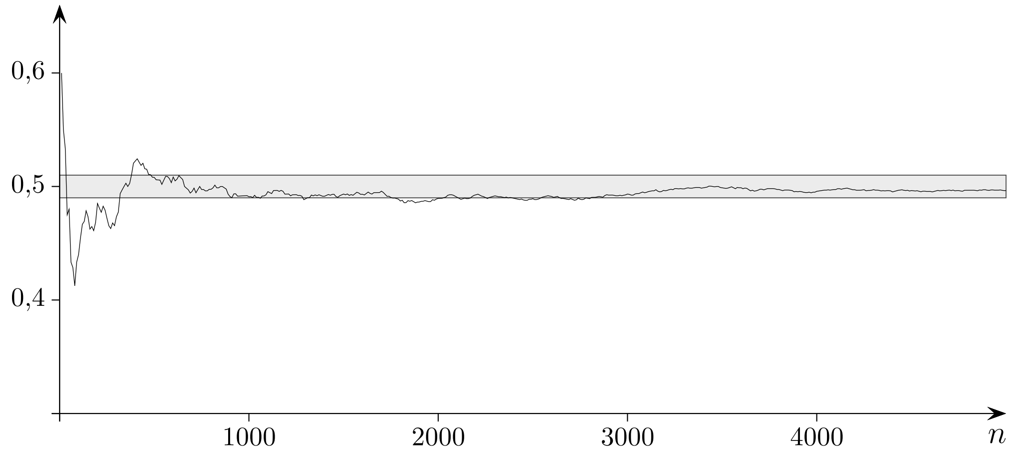
$$\lim_{n\to\infty} P(\qquad \le \frac{k}{n} \le \qquad) = \qquad\qquad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} P\big(\big|\qquad\big| < d\big) =$$





$$\begin{aligned} P(\qquad \le \frac{k}{n} \le \qquad) &= P(\qquad \le k \le \qquad) \\ &= \Phi(\quad) - \Phi(\quad) \\ &= \underbrace{\Phi(\qquad \sqrt{n})}_{\xrightarrow{n\to\infty}} - \underbrace{\Phi(\qquad \sqrt{n})}_{\xrightarrow{n\to\infty}} \end{aligned}$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen Jakob Bernoulli 1655 - 1705

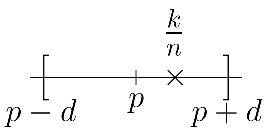


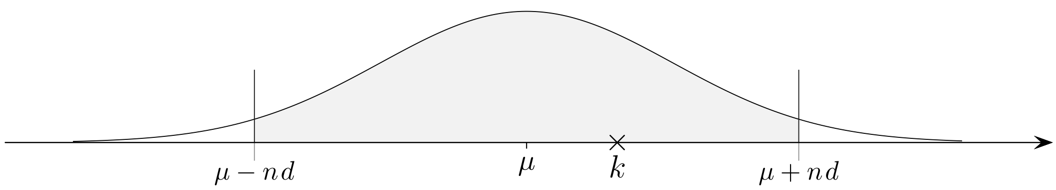
Die relative Häufigkeit $h = \frac{k}{n}$ strebt gegen die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p.

In Worten: $\frac{k}{n}$ konvergiert stochastisch gegen p.

Zu zeigen:
Für jedes noch so kleine $d > 0$ (in der Literatur wird ε epsilon verwendet) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(p-d \leq \frac{k}{n} \leq p+d) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P\big(\big|\frac{k}{n} - p\big| < d\big) = 1$$





$$P(p-d \leq \frac{k}{n} \leq p+d) \;=\; P(\mu - nd \leq k \leq \mu + nd)$$ Binomialverteilung wird durch

$$= \Phi(\tfrac{nd}{\sigma}) - \Phi(\tfrac{-nd}{\sigma})$$ Normalverteilung ersetzt, $P(X \leq a) = \Phi(\frac{a-\mu}{\sigma})$

$$= \underbrace{\Phi(\tfrac{d}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n})}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} - \underbrace{\Phi(\tfrac{-d}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n})}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$