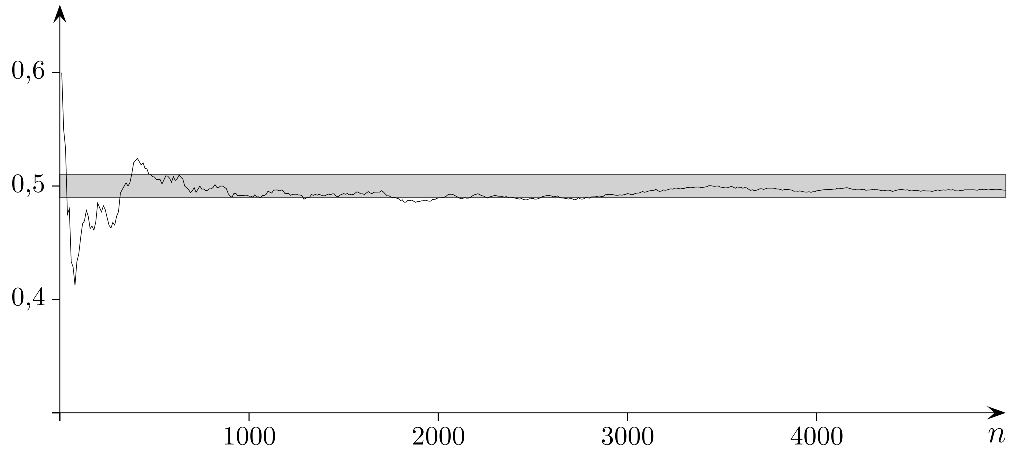
Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Jakob Bernoulli 1655 - 1705



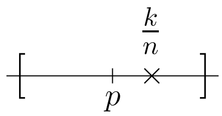
Die relative Häufigkeit $h = \frac{k}{n}$ strebt gegen die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p.

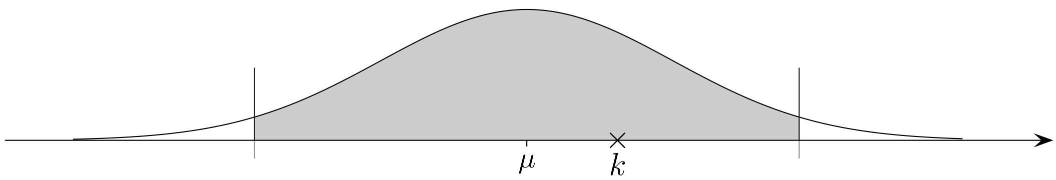
In Worten: $\frac{k}{n}$ konvergiert stochastisch gegen p.

Zu zeigen:

Für jedes noch so kleine $d > 0$ (in der Literatur wird ε epsilon verwendet) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(\qquad \le \frac{k}{n} \le \qquad) = \qquad\qquad \iff \quad \lim_{n\to\infty} P\big(\big| \qquad \big| < d\big) =$$

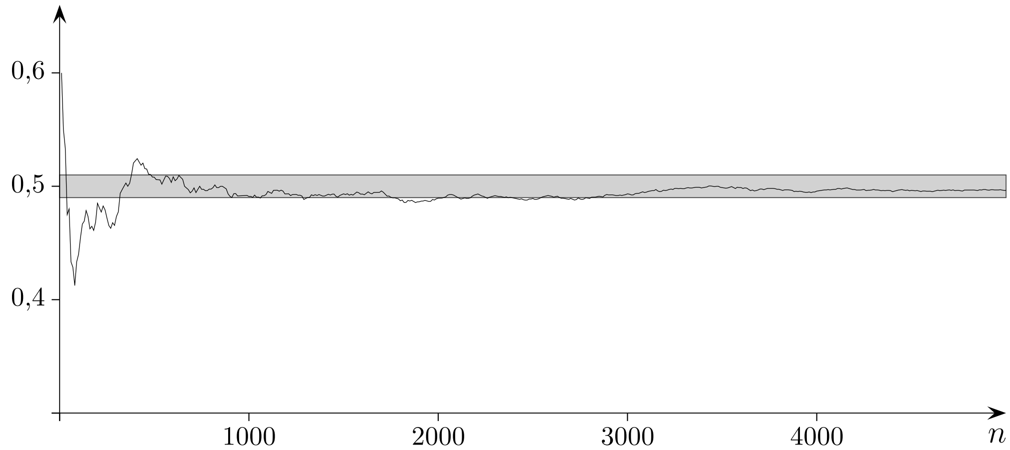




$$\begin{aligned} P(\qquad \le \frac{k}{n} \le \qquad) &= P(\qquad \le k \le \qquad) \\ &= \Phi(\quad) - \Phi(\quad) \\ &= \underbrace{\Phi(\qquad \sqrt{n})}_{\xrightarrow{n\to\infty}} - \underbrace{\Phi(\qquad \sqrt{n})}_{\xrightarrow{n\to\infty}} \end{aligned}$$

Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Jakob Bernoulli 1655 - 1705

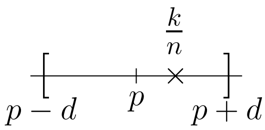


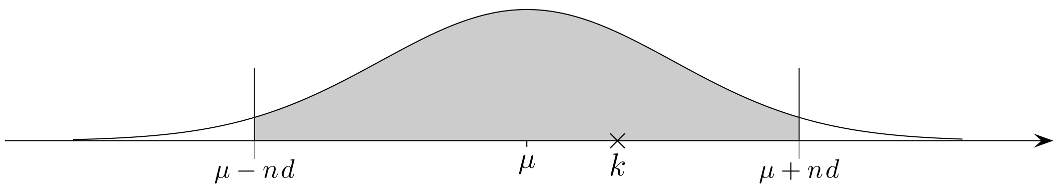
Die relative Häufigkeit $h = \frac{k}{n}$ strebt gegen die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p.

In Worten: $\frac{k}{n}$ konvergiert stochastisch gegen p.

Zu zeigen:
Für jedes noch so kleine $d > 0$ (in der Literatur wird ε epsilon verwendet) gilt:

$$\lim_{n\to\infty} P(p - d \le \frac{k}{n} \le p + d) = 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{k}{n} - p\right| < d\right) = 1$$





$$\begin{aligned} P(p - d \le \frac{k}{n} \le p + d) &= P(\mu - nd \le k \le \mu + nd) \quad \text{Binomialverteilung wird durch} \\ &= \Phi\left(\frac{nd}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-nd}{\sigma}\right) \quad \text{Normalverteilung ersetzt, } P(X \le a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) \\ &= \underbrace{\Phi\left(\frac{d}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1} - \underbrace{\Phi\left(\frac{-d}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)}_{\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} \end{aligned}$$