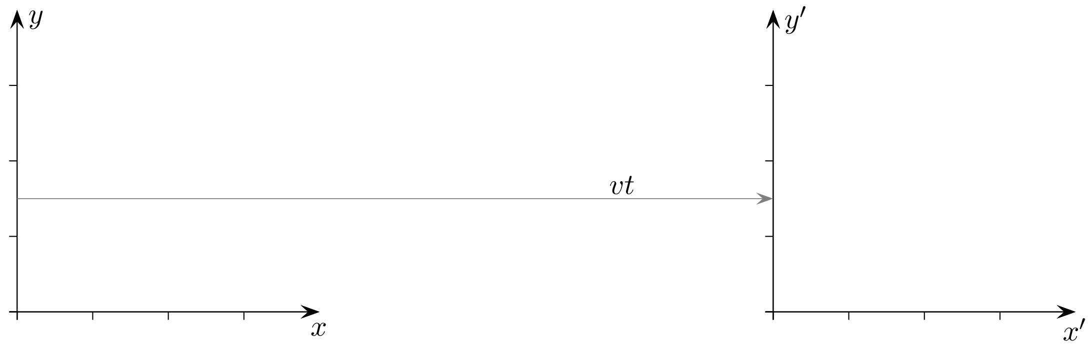
Galilei- und Lorentz-Transformation



Das $x'y'$-System entfernt sich vom (ruhenden) xy-System in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v.
Zur Zeit $t_0 = 0$ waren die Systeme deckungsgleich.

Zwischen den Koordinaten bestehen die Galilei-Beziehungen $x' = x - vt, \quad x = x' + vt$.
Bewegt sich ein Körper im $x'y'$-System in x'-Richtung mit der Geschwindigkeit w, so stellt ein Beobachter im xy-System für diesen Körper die Geschwindigkeit $w + vt$ fest.

Wir sitzen in einem Zug A und ein anderer Zug B überholt uns mit geringer Geschwindigkeit u.
Zur tatsächlichen Fahrgeschwindigkeit von B müssen wir unsere Fahrgeschwindigkeit zu u addieren.

Für einen Lichtstrahl $x = ct$, der zur Zeit t_0 im xy-System in x-Richtung ausgesandt wurde, hat im $x'y'$-System eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit, $x' = ct - vt = (c - v)t$. Das widerspricht der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Um diesen Widerspruch zu lösen, nehmen wir an, dass im $x'y'$-System die Zeit t' gemessen wird und führen aus Symmetriegründen einen einzigen Korrekturfaktor ein, $x' = \gamma(x - vt), \quad x = \gamma(x' + vt')$.
Mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird γ bestimmt.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ &= \gamma x(1 - \tfrac{tv}{x}) \quad |c = \tfrac{x}{t} \\ &= \gamma x(1 - \tfrac{v}{c}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ &= \gamma x'(1 + \tfrac{t'v}{x'}) \quad |c = \tfrac{x'}{t'} \\ &= \gamma x'(1 + \tfrac{v}{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad x'x &= \gamma^2 x'x(1 - \tfrac{v}{c})(1 + \tfrac{v}{c}) \quad |:x'x, \text{ bin. Formel} \\ 1 &= \gamma^2(1 - \tfrac{v^2}{c^2}) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Für die Beziehungen von t' und t gelten in der Lorentz-Transformation
$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x), \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'), \quad$ Nachweis:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x'}{c} && |x' = \gamma(x - vt) \\ &= \frac{\gamma(x-vt)}{c} \\ &= \gamma\big(\tfrac{x}{c} - \tfrac{vt}{c}\big) = \gamma\big(t - \tfrac{vtc}{c^2}\big) && |\tfrac{x}{c} = t, \text{ mit } c \text{ erweitert} \\ &= \gamma\big(t - \tfrac{v}{c^2}x\big) && |tc = x \end{aligned}$$

In analoger Weise kann man die Gleichung für t ableiten.

Längenkontraktion, spezielle Relativitätstheorie Einstein 1905

Für einen ruhenden Beobachter hat ein bewegter Stab eine kürzere Länge
als wenn sich der Stab zum Beobachter in Ruhe befindet.

Im $x'y'$-System befindet sich ein Körper der Länge L'.
Welche Länge L misst ein Beobachter im xy-System?

$$\begin{aligned}
L' &= x'_2 - x'_1 \\
&= \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) \\
&= \gamma(x_2 - x_1) && |vt \text{ fällt heraus.} \\
L' &= \gamma L \\
L &= L'/\gamma = L'\sqrt{1 - v^2/c^2} \\
L &\leq L'
\end{aligned}$$

Zeitdilatation, lat. dilatare dehnen, aufschieben

Eine bewegte Uhr geht aus der Sicht eines ruhenden Beobachters langsamer.
Und zwar umso langsamer, je schneller sich ein Objekt bewegt.

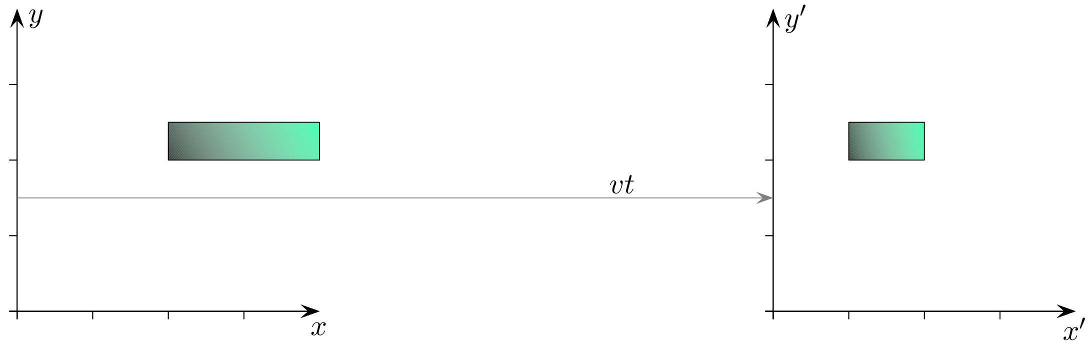
Für die Lichtgeschwindigkeit gilt $c = L'/T'$ und $c = L/T$.
Mit $L = L'/\gamma$ muss $T' = \gamma T$ und somit $T = T'/\gamma$ sein.

Einstein
„Ich habe keine besondere Begabung, sondern bin nur leidenschaftlich neugierig.
Wichtig ist, dass man nicht aufhört zu fragen.“

Relativität

In einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug fällt ein Stein für den Beobachter im Zug senkrecht nach unten, beschreibt jedoch für den Beobachter auf dem Bahnhof eine parabelförmige Bahn. Dieser Beobachter sieht das Resultat der Überlagerung der Bewegung in einem anderen Inertialsystem mit der relativen Bewegung dieses Inertialsystems.

Transformationsformel für Geschwindigkeiten



Wir greifen zwei Punkte $\left(x_1 \mid t_1\right)$ und $\left(x_2 \mid t_2\right)$ im xy-System mit $t_1 < t_2$ heraus.
Dann gilt für die Geschwindigkeit $u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.

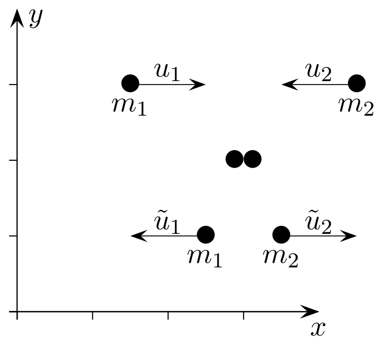
Im $x'y'$-System erhält man mit den entsprechenden Punkten $\left(x'_1 \mid t'_1\right)$ und $\left(x'_2 \mid t'_2\right)$ mit der Lorentz-Transformation:

$$\begin{aligned} u' &= \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)}{\gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) - \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)} = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)} \qquad | : (t_2 - t_1) \\ &= \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \\ u &= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \qquad |\text{nach } u \text{ umgeformt, alternativ } v \text{ durch } -v \text{ ersetzen} \end{aligned}$$

Für $u' = c$ erhalten wir erwartungsgemäß

$$u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \ldots = c$$

$$E = mc^2$$

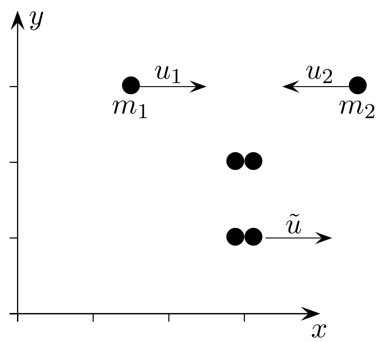


Die Massen m_1 und m_2 mögen sich mit den Geschwindigkeiten u_1 und u_2 aufeinander zubewegen. Nach einem elastischen Stoß springen sie wieder mit den Geschwindigkeiten $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ auseinander. Die kinetische Energie sowie die Summe der Impulse vor und nach dem Berühren bleibt erhalten:

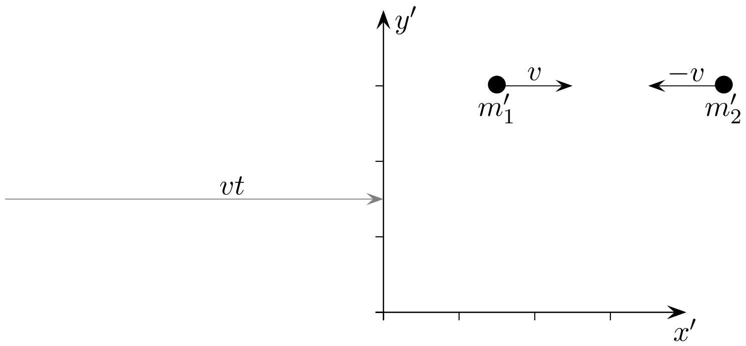
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 &= \frac{1}{2}m_1\tilde{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{u}_2^2 \\ m_1u_1 + m_2u_2 &= m_1\tilde{u}_1 + m_2\tilde{u}_2 \end{aligned}$$

Für einen inelastischen Stoß bestehen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\tilde{u}^2 + E_{\text{them.}} \\ m_1u_1 + m_2u_2 &= = (m_1 + m_2)\tilde{u} \end{aligned}$$



Für den inelastischen Stoß mit $m_1' = m_2'$ und den Geschwindigkeiten $u_1' = v$ und $u_2' = -v$ (siehe Grafik) ist nach dem Stoß $\tilde{u}' = 0$. Aus Sicht des xy-Systems bewegen sich dann beide Massen mit der Geschwindigkeit v.



$$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v \qquad |u = \frac{u'+v}{1+\frac{u'v}{c^2}},\ \ u_1 = \frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}},\ \ u_2 = 0$$

$$m_1\frac{2v}{1+\frac{v^2}{c^2}} = (m_1 + m_2)v$$

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{2}{1+\frac{v^2}{c^2}} &= m_1 + m_2 \\
m_1 \Big(\frac{2}{1+\frac{v^2}{c^2}} - 1\Big) &= m_2 \\
m_1 \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}} &= m_0 && |\text{Die Masse } m_0 = m_2 \text{ ruht im } xy\text{-System.} \\
\big(\frac{m_0}{m_1}\big)^2 &= \frac{\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)^2}{\Big(1+\frac{v^2}{c^2}\Big)^2} && \text{Quadrieren führt zu einer Vereinfachung.} \\
&= 1 - \frac{\frac{4v^2}{c^2}}{\Big(1+\frac{v^2}{c^2}\Big)^2} && |\, u_1^2 = \frac{4v^2}{\Big(1+\frac{v^2}{c^2}\Big)^2} \\
&= 1 - \frac{u_1^2}{c^2} \\
m_1 &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} && |\text{allgemeiner formuliert:} \\
m &= m_0\gamma && |\text{Die Masse als Trägheitswiderstand nimmt mit } v \text{ zu.} \\
&= m_0\big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)^{-1/2} && |(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \text{ für } x \ll 1 \\
&\approx m_0\big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\big) = m_0 + \frac{m_0}{2}\frac{v^2}{c^2} && |\, E_{\text{kin}} = \frac{m_0}{2} v^2 \\
E_{\text{kin}} &= (m - m_0)c^2 = \Delta m c^2 && |\text{Massenänderung} \mathrel{\widehat{=}} \text{Energieänderung}
\end{aligned}
$$