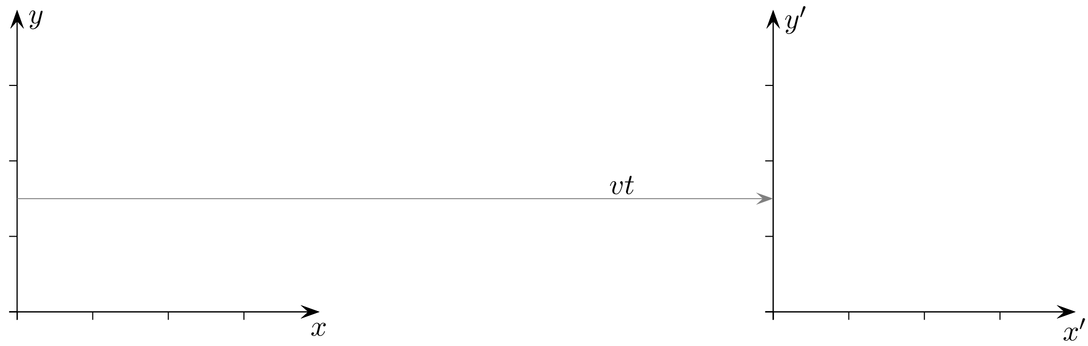
Galilei- und Lorentz-Transformation



Das $x'y'$-System entfernt sich vom (ruhenden) xy-System in x-Richtung mit der Geschwindigkeit v.
Zur Zeit $t_0 = 0$ waren die Systeme deckungsgleich.

Zwischen den Koordinaten bestehen die Galilei-Beziehungen $x' = x - vt, \quad x = x' + vt$.
Bewegt sich ein Körper im $x'y'$-System in x'-Richtung mit der Geschwindigkeit w, so stellt ein Beobachter im xy-System für diesen Körper die Geschwindigkeit $w + vt$ fest.

Wir sitzen in einem Zug A und ein anderer Zug B überholt uns mit geringer Geschwindigkeit u.
Zur tatsächlichen Fahrgeschwindigkeit von B müssen wir unsere Fahrgeschwindigkeit zu u addieren.

Für einen Lichtstrahl $x = ct$, der zur Zeit t_0 im xy-System in x-Richtung ausgesandt wurde, hat im $x'y'$-System eine geringere Ausbreitungsgeschwindigkeit, $x' = ct - vt = (c - v)t$. Das widerspricht der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit.

Um diesen Widerspruch zu lösen, nehmen wir an, dass im $x'y'$-System die Zeit t' gemessen wird und führen aus Symmetriegründen einen einzigen Korrekturfaktor ein, $x' = \gamma(x - vt), \quad x = \gamma(x' + vt')$.
Mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit wird γ bestimmt.

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ &= \gamma x(1 - \tfrac{tv}{x}) \quad |c = \tfrac{x}{t} \\ &= \gamma x(1 - \tfrac{v}{c}) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ &= \gamma x'(1 + \tfrac{t'v}{x'}) \quad |c = \tfrac{x'}{t'} \\ &= \gamma x'(1 + \tfrac{v}{c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \qquad x'x &= \gamma^2 x'x(1 - \tfrac{v}{c})(1 + \tfrac{v}{c}) \quad |: x'x, \text{ bin. Formel} \\ 1 &= \gamma^2(1 - \tfrac{v^2}{c^2}) \\ \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

Für die Beziehungen von t' und t gelten in der Lorentz-Transformation
$t' = \gamma(t - \frac{v}{c^2}x), \quad t = \gamma(t' + \frac{v}{c^2}x'),$ Nachweis:

$$\begin{aligned} t' &= \frac{x'}{c} && |x' = \gamma(x - vt) \\ &= \frac{\gamma(x - vt)}{c} \\ &= \gamma\big(\tfrac{x}{c} - \tfrac{vt}{c}\big) = \gamma\big(t - \tfrac{vtc}{c^2}\big) && |\tfrac{x}{c} = t, \text{ mit } c \text{ erweitert} \\ &= \gamma\big(t - \tfrac{v}{c^2}x\big) && |tc = x \end{aligned}$$

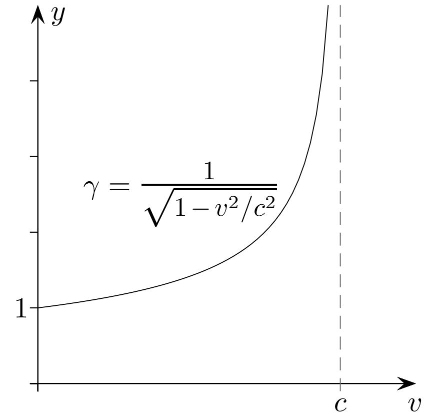
In analoger Weise kann man die Gleichung für t ableiten.

Längenkontraktion, spezielle Relativitätstheorie Einstein 1905

Für einen ruhenden Beobachter hat ein bewegter Stab eine kürzere Länge als wenn sich der Stab zum Beobachter in Ruhe befindet.

Im $x'y'$-System befindet sich ein Körper der Länge L'.
Welche Länge L misst ein Beobachter im xy-System?

$$\begin{aligned} L' &= x_2' - x_1' \\ &= \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) \\ &= \gamma(x_2 - x_1) \qquad |vt \text{ fällt heraus.} \\ L' &= \gamma L \\ L &= L'/\gamma = L'\sqrt{1 - v^2/c^2} \\ L &\leq L' \end{aligned}$$



Beachte: $\gamma \geq 1$

1. Ein Stab mit der Länge 2 m fliegt mit der Geschwindigkeit von 0,8c in x-Richtung an einem ruhenden Beobachter vorbei. Wie lang ist der Stab aus Sicht dieses Beobachters?

$\gamma = \frac{5}{3}$, Längenkontraktion ($\gamma > 1$), $\frac{2}{\gamma} = 1{,}2$ [m]

Zeitdilatation, lat. dilatare dehnen, aufschieben

Eine bewegte Uhr geht aus der Sicht eines ruhenden Beobachters langsamer.
Und zwar umso langsamer, je schneller sich ein Objekt bewegt, $T = T' \cdot \gamma$.

$$t_1 = \gamma(t_1' + \tfrac{v}{c^2}x_0'), \quad t_2 = \gamma(t_2' + \tfrac{v}{c^2}x_0'), \quad t_1 - t_2 = \gamma(t_1' - t_2')$$

2. Eine Rakete fliegt in x-Richtung mit der Geschwindigkeit von $v = 0{,}8c$. Wenn für einen Insassen 3 h vergehen, welche Zeitspanne ist das auf der Erde?

$\gamma = \frac{5}{3}$, Zeitdilatation ($\gamma > 1$), $3\gamma = 5$ [h]

Einstein
„Ich habe keine besondere Begabung, sondern bin nur leidenschaftlich neugierig.
Wichtig ist, dass man nicht aufhört zu fragen.“

Relativität

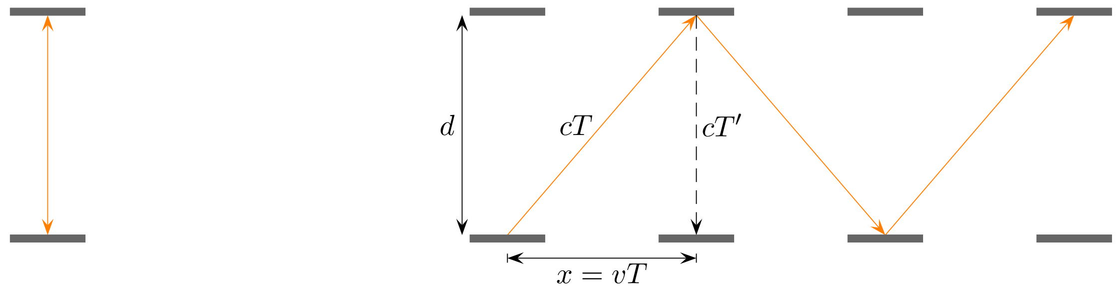
In einem mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Zug fällt ein Stein für den Beobachter im Zug senkrecht nach unten, beschreibt jedoch für den Beobachter auf dem Bahnhof eine parabelförmige Bahn. Dieser Beobachter sieht das Resultat der Überlagerung der Bewegung in einem anderen Inertialsystem mit der relativen Bewegung dieses Inertialsystems.

Zeitdilatation

Zeitdilatation ist das physikalische Phänomen, dass die Zeit in einem stärkeren Gravitationsfeld bzw. in einem sich bewegenden System relativ zu einem ruhenden Beobachter langsamer vergeht.

Das Gedankenexperiment einer Lichtuhr geht auf Einstein zurück. Hierunter versteht man eine Anordnung zweier gegenüberstehender Spiegel zwischen denen ein Photon hin und her reflektiert wird. Beträgt der Abstand der beiden Spiegel beispielsweise $d = 30\,\mathrm{cm}$, so beträgt die Laufzeit bis zum anderen Spiegel $T = \frac{0{,}3\,\mathrm{m}}{3 \cdot 10^8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}} = 1\,\mathrm{ns}$.

Stellen wir uns nun vor, dass sich eine Lichtuhr mit hoher Geschwindigkeit v an der Erde vorbeibewegt.



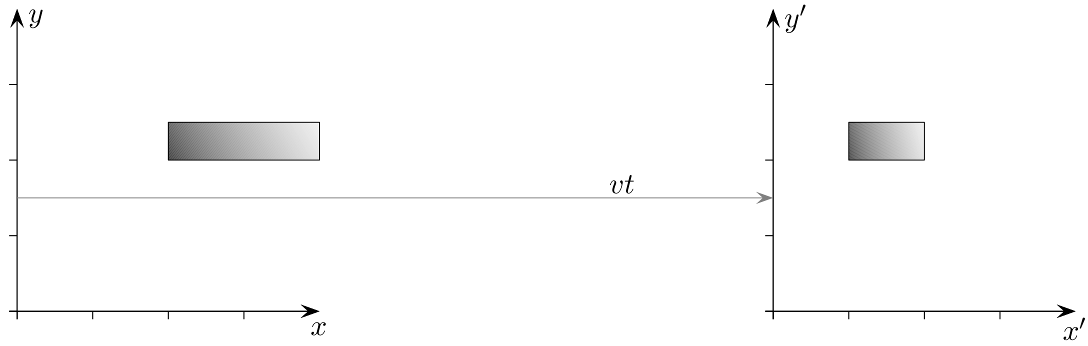
Ein Beobachter der Lichtuhr im bewegten $x'y'$-System misst für die Laufzeit eines Lichtsignals zwischen den Spiegeln die Zeitdauer $T' = \frac{d}{c}$, $d = cT'$.

Für einen Beobachter auf der Erde im xy-System legt das Licht den diagonalen Weg $\sqrt{d^2 + x^2} = cT$ zurück. Somit ist die vom Beobachter auf der Erde gemessene Zeit T größer als die vom Beobachter im $x'y'$-System gemessene Zeit T', genauer:

$$
\begin{aligned}
(cT)^2 &= (vT)^2 + (cT')^2 \\
&\dots \\
T &= T' \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

Albert Einstein wies im Jahre 1905 darauf hin, dass eine Uhr, die sich von einem beliebigen Punkt entfernt und dorthin zurückkehrt, gegenüber einer am Ausgangspunkt zurückgelassenen unbewegten Uhr nachgeht. 1911 dehnte er diese Überlegung auf lebende Organismen aus.

Transformationsformel für Geschwindigkeiten



Wir greifen zwei Punkte $(x_1 \mid t_1)$ und $(x_2 \mid t_2)$ im xy-System mit $t_1 < t_2$ heraus.
Dann gilt für die Geschwindigkeit $u = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$.

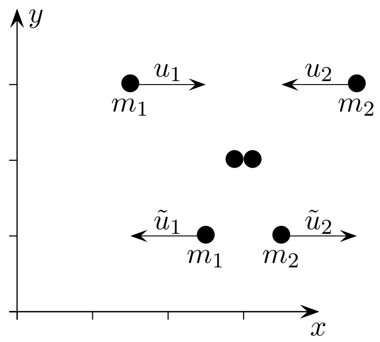
Im $x'y'$-System erhält man mit den entsprechenden Punkten $(x'_1 \mid t'_1)$ und $(x'_2 \mid t'_2)$ mit der Lorentz-Transformation:

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\gamma(x_2 - vt_2) - \gamma(x_1 - vt_1)}{\gamma(t_2 - \frac{v}{c^2}x_2) - \gamma(t_1 - \frac{v}{c^2}x_1)} = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)} \qquad | : (t_2 - t_1) \\
&= \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}} \\
u &= \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}} \qquad |\text{nach } u \text{ umgeformt, alternativ } v \text{ durch } -v \text{ ersetzen}
\end{aligned}
$$

Für $u' = c$ erhalten wir erwartungsgemäß

$$
u = \frac{c + v}{1 + \frac{cv}{c^2}} = \frac{c + v}{1 + \frac{v}{c}} = \ldots = c
$$

$$E = mc^2$$

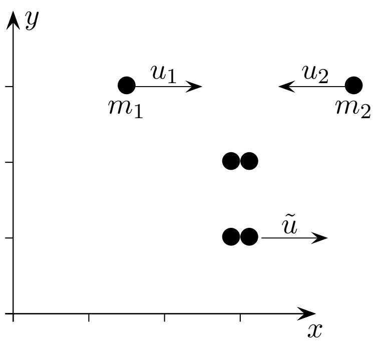


Die Massen m_1 und m_2 mögen sich mit den Geschwindigkeiten u_1 und u_2 aufeinander zubewegen. Nach einem elastischen Stoß springen sie wieder mit den Geschwindigkeiten $\tilde{u}_1$ und $\tilde{u}_2$ auseinander. Die kinetische Energie sowie die Summe der Impulse vor und nach dem Berühren bleibt erhalten:

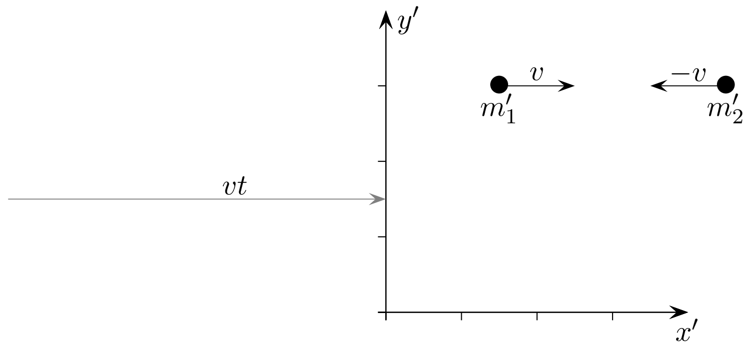
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 &= \frac{1}{2}m_1\tilde{u}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\tilde{u}_2^2 \\ m_1u_1 + m_2u_2 &= m_1\tilde{u}_1 + m_2\tilde{u}_2 \end{aligned}$$

Für einen inelastischen Stoß bestehen gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\tilde{u}^2 + E_{\text{them.}} \\ m_1u_1 + m_2u_2 &= = (m_1 + m_2)\tilde{u} \end{aligned}$$



Für den inelastischen Stoß mit $m_1' = m_2'$ und den Geschwindigkeiten $u_1' = v$ und $u_2' = -v$ (siehe Grafik) ist nach dem Stoß $\tilde{u}' = 0$. Aus Sicht des xy-Systems bewegen sich dann beide Massen mit der Geschwindigkeit v.



$$m_1u_1 + m_2u_2 \;=\; (m_1 + m_2)v \qquad |u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}},\; u_1 = \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}},\; u_2 = 0$$

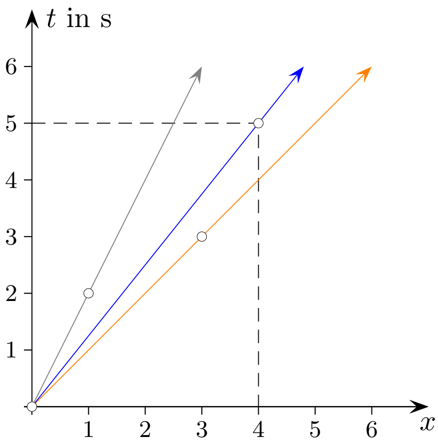
$$m_1 \frac{2v}{1 + \frac{v^2}{c^2}} \;=\; (m_1 + m_2)v$$

$$
\begin{aligned}
m_1 \frac{2}{1+\frac{v^2}{c^2}} &= m_1 + m_2 \\
m_1 \Big(\frac{2}{1+\frac{v^2}{c^2}} - 1\Big) &= m_2 \\
m_1 \frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{1+\frac{v^2}{c^2}} &= m_0 && |\text{Die Masse } m_0 = m_2 \text{ ruht im } xy\text{-System.} \\
\big(\frac{m_0}{m_1}\big)^2 &= \frac{\Big(1-\frac{v^2}{c^2}\Big)^2}{\Big(1+\frac{v^2}{c^2}\Big)^2} && \quad\text{Quadrieren führt zu einer Vereinfachung.} \\
&= 1 - \frac{\frac{4v^2}{c^2}}{\Big(1+\frac{v^2}{c^2}\Big)^2} && |\, u_1^2 = \frac{4v^2}{\Big(1+\frac{v^2}{c^2}\Big)^2} \\
&= 1 - \frac{u_1^2}{c^2} \\
m_1 &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}} && |\text{allgemeiner formuliert:} \\
m &= m_0\gamma && |\text{Die Masse als Trägheitswiderstand nimmt mit } v \text{ zu.} \\
&= m_0\big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big)^{-1/2} && |(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x \text{ für } x \ll 1 \\
&\approx m_0\big(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\big) = m_0 + \frac{m_0}{2}\frac{v^2}{c^2} && |\, E_{\text{kin}} = \frac{m_0}{2}v^2 \\
E_{\text{kin}} &= (m - m_0)c^2 = \Delta m c^2 && |\,\text{Massenänderung} \mathrel{\widehat{=}} \text{Energieänderung}
\end{aligned}
$$

Minkowski-Diagramm 1908 und -Metrik

Ein Objekt bewegt sich mit 4/5 der Lichtgeschwindigkeit 300 000 km/s in Richtung der x-Achse.
Mit 1 auf der x-Achse $\widehat{=}$ 300 000 km wird die Ausbreitung des Lichts in diesem Weg/Zeit-Diagramm als Winkelhalbierende dargestellt.

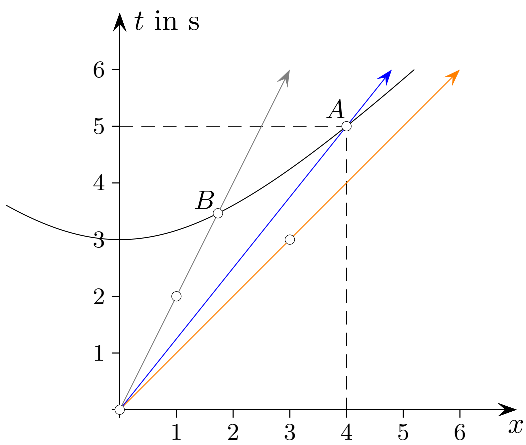
Der blau gefärbte Pfeil (Weltlinie) erfasst dann die Bewegung des Objekts.
Zur grau gefärbten Weltlinie gehört die Geschwindigkeit $1/2c$.



Sei $v = 4/5c$ und $T = 5\,[\mathrm{s}]$.

$$\begin{aligned} T' &= T \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\ T'^2 &= T^2 \cdot \big(1 - \frac{v^2}{c^2}\big) \\ &= \big(1 - \frac{(4/5\,c)^2}{c^2}\big) \\ &= 5^2 - 4^2 = 3^2 \end{aligned}$$

Auf dem bewegten Objekt vergehen bis zu Ereignis A 3 s.



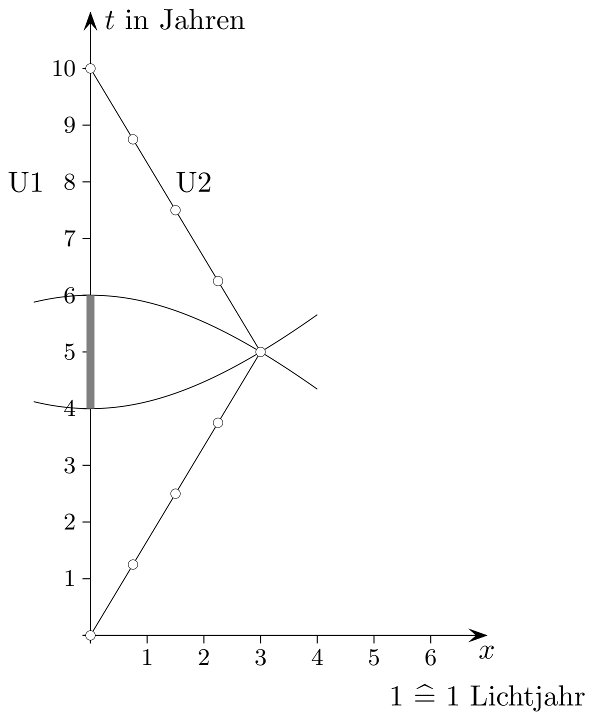
$t^2 - x^2 = 3^2$ Hyperbel

Auf dem bewegten Objekt mit $v = 1/2c$ vergehen bis zum Ereignis B auch 3 s.
Auf einem bewegten Objekt mit $v = x_0/t_0$ vergehen bis Schnittpunkt der Weltlinie mit der Hyperbel in diesem Fall 3 s, $T'^2 = t_0^2\big(1 - \frac{(x_0/t_0\,c)^2}{c^2}\big) = t_0^2 - x_0^2$.

Diese Überlegungen motivieren die Minkowski-Metrik $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$.

Zwillingsparadoxon

Von zwei synchronisierten Uhren verbleibt die eine in Ruhe (U1), die andere (U2) bewegt sich mit 3/5 der Lichtgeschwindigkeit in Richtung der x-Achse und kehrt dann um, siehe Weltlinie. Für U1 vergehen 10 Jahre, für U2 lediglich $2 \cdot 4 = 8$ Jahre, $\Delta s^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = 5^2 - 3^2 = 4^2$.
Aus der Sicht von U2 bewegt sich U1 und die Zeit für U1 müsste langsamer verlaufen.
„Bewegte Uhren gehen langsamer.“



Die Situation der Uhren ist jedoch nicht symmetrisch.
Nur für U2 liegt ein Wechsel des Inertialsystems vor.
In den Schnittpunkten der Hyperbeln mit den Weltlinien stimmen die Uhren überein.
Der Richtungswechsel von U2 bewirkt einen Zeitsprung von U1 um die grau gefärbte Spanne.

Startseite