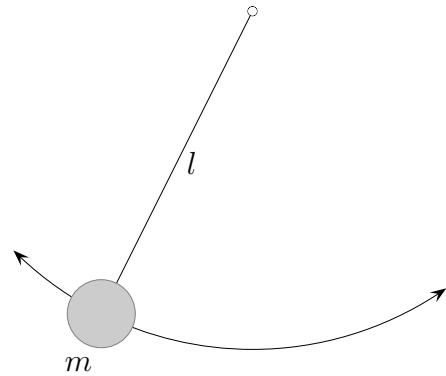


Π-Theorem Vorbereitungen



Die Schwingungsdauer Θ (Schwingungsperiode) eines einfachen Fadenpendels hängt nur von der Fadenlänge l und der Erdbeschleunigung g ab, nicht aber von der am Faden schwingenden Masse m :

$$\Theta = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$[\Theta] = \text{const} \sqrt{\frac{[l]}{[g]}}$$

$$\begin{aligned} [\Theta] &= \text{s} \\ [l] &= \text{m} \\ [g] &= \text{m/s}^2 \\ [m] &= \text{kg} \end{aligned}$$

Wie zu erkennen ist, besteht die Gleichheit auch für die Einheiten.

Für die Masse m ist hier kein Platz.

Die Gleichheit der Einheiten kann etwas transparenter mit dem Begriff *Dimension* formuliert werden.

Eine physikalische Meßgröße G wird durch einen Zahlenwert (Maßzahl) und eine Maßeinheit charakterisiert $G = \text{Maßzahl}[G]$.

Die Einheiten physikalischer Größen werden durch die Einheiten von Grundgrößen ausgedrückt. Die Grundgrößen der Mechanik sind Länge L , Zeit T und Masse M .

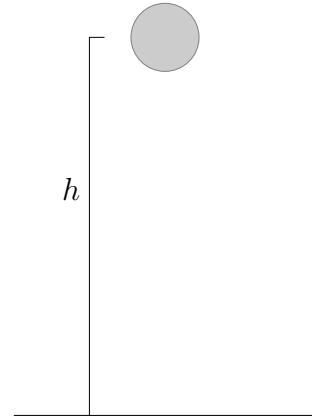
Die Geschwindigkeit v ist eine abgeleitete Größe. Die Dimension $[v] = LT^{-1}$ stellt den Bezug zu den Grundgrößen her. Sie gibt an, welche Grundgrößeneinheiten in der Einheit von v (z. B.) kombiniert werden.

Obwohl die Begriffe Dimension und Einheit verschieden sind, werden diese Worte in der Literatur bei Dimensionsbetrachtungen oft synonym gebraucht. Auch bezeichnet $[G]$ manchmal die Einheit und manchmal die Dimension einer Größe G .

Mit
$$\begin{aligned} [\Theta] &= T \\ [L] &= L \\ [g] &= LT^{-2} \end{aligned}$$

überprüfen wir, dass beide Seiten der Formel von gleicher Dimension sind.

Dimensionsvergleich



Wir suchen nach einer Formel, die beschreibt, mit welcher Geschwindigkeit ein fallender Stein aus gegebener Höhe h am Boden auftritt. Die relevanten Größen und ihre Dimensionen sind:

| | | |
|------------------|-------------------------|------------------|
| v_{end} | Aufprallgeschwindigkeit | LT^{-1} |
| h | Anfangshöhe | L |
| m | Masse des Steins | M |
| g | Erdbeschleunigung | LT^{-2} |
| t | Fallzeit | T |

Ein Gesetz hat die Form

$$v_{\text{end}} = f(h, m, g, t).$$

Dabei ist f eine geeignete Kombination (ein "Potenzprodukt") der angegebenen Größen mit der Dimension LT^{-1} . m kommt daher auf der rechten Seite nicht vor.

Mit den Größen g und h kann bereits so eine Kombination gebildet werden: \sqrt{gh} hat die Dimension $\sqrt{\text{LT}^{-2}\text{L}} = \text{LT}^{-1}$. Das ergibt den Zusammenhang:

$$v_{\text{end}} = k\sqrt{gh}.$$

Die dimensionslose Konstante $k = \sqrt{2}$ muss entweder durch Experimente oder durch die Theorie bestimmt werden.

Möglich wäre auch die Rechnung:

$$\begin{aligned}\text{LT}^{-1} &= (\text{LT}^{-2})^a \cdot \text{L}^b \\ &= \text{L}^{a+b} \cdot \text{T}^{-2a}\end{aligned}$$

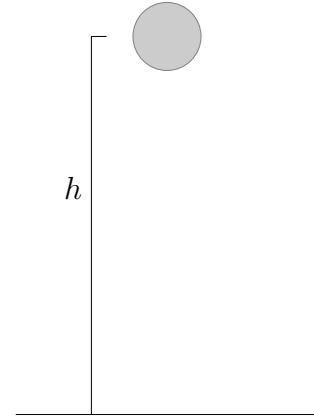
$$a + b = 1 \quad \text{Koeffizientenvergleich}$$

$$-2a = -1$$

$$a = \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Fallzeit θ



$$v_{\text{end}} = k\sqrt{gh}$$

Mit $v_{\text{end}} = g\theta$
erhalten wir: $\theta = k\sqrt{\frac{h}{g}}$

Oder direkt:

Das einzige dimensionslose Produkt aus den Größen θ , h , g lautet $\frac{\theta^2 g}{h} = k$.

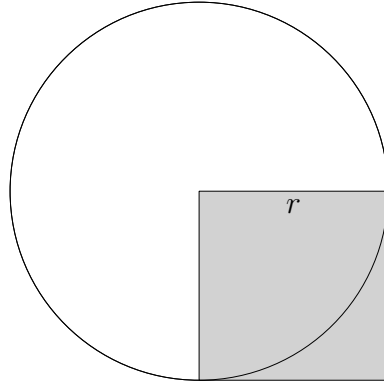
Die Integration der Newtonschen Bewegungsgleichung $d^2y/dt^2 = -g$ mit den Integrationsbedingungen $v = dy/dt$, $y(0) = h$, $y(\theta) = 0$, $v(0) = 0$, $v_{\text{end}} = v(\theta)$ ergibt k .

Galilei hat sich 1590 die Irrelevanz der Masse beim freien Fall aus einem Gedankenexperiment erschlossen. Seine Überlegung:

Wenn die Fallgeschwindigkeit der Körpermasse proportional wäre, fiel ein Körper mit doppelter Masse doppelt so schnell wie einer mit der einfachen Masse. Wären beide mit einem Faden verbunden, so würde der leichtere Körper den schwereren beim Fall abbremsen, der Verband fiel also langsamer. Wenn man aber den Abstand zwischen den beiden Körpern so weit verkürzte, dass ein Körper von dreifacher Masse entstünde, dürfte dieser nun wieder schneller als der doppelt so schwere fallen.

Der Widerspruch belegt, dass es beim Fallvorgang nicht auf die Körpermasse ankommt.

Kreisfläche



Wir wollen den Kreisinhalt A_{Kreis} unter dem Blickwinkel des Π -Theorems ermitteln. Die relevanten Messgrößen und ihre Dimensionen sind:

$$\begin{array}{l|l} A_{\text{Kreis}} & \text{L}^2 \\ r & \text{L} \\ A_{\text{Quadrat}} & \text{L}^2 \end{array}$$

Gesucht ist ein Gesetz der Form

$$A_{\text{Kreis}} = \Phi(r, A_{\text{Quadrat}}).$$

Die Dimensionen der Größen A_{Kreis} und A_{Quadrat} lassen sich mit der Dimension von r darstellen.

$$\begin{aligned} [A_{\text{Kreis}}] &= [r]^2 \\ [A_{\text{Quadrat}}] &= [r]^2 \end{aligned}$$

Wir bilden zwei neue, dimensionslose Messgrößen (der Sinn ist gleich ersichtlich)

$\Pi = \frac{A_{\text{Kreis}}}{r^2}$ und $\Pi_1 = \frac{A_{\text{Quadrat}}}{r^2}$. Die Dimension ist jeweils 1, Einheiten heben sich auf.

Das gesuchte Gesetz nimmt die Form

$$\frac{A_{\text{Kreis}}}{r^2} = \Psi\left(r, \frac{A_{\text{Quadrat}}}{r^2}\right) \quad \text{bzw.} \quad \Pi = \Psi(r, \Pi_1)$$

an. Wenn Φ existiert, dann auch Ψ . Für A_{Quadrat} setzte man in Φ $\frac{A_{\text{Quadrat}}}{r^2} \cdot r^2$ ein. Entsprechend verfähre man mit A_{Kreis} .

Π und Π_1 ändern sich in $\Pi = \Psi(r, \Pi_1)$ nicht, wenn r variiert würde, d.h. Π ist lediglich von Π_1 abhängig. Für eine (unbekannte Funktion) gilt dann: $\Pi = \Delta(\Pi_1)$.

Mit $\Pi_1 = 1$ und der Definition von Π folgt: $A_{\text{Kreis}} = r^2 \cdot \text{const}$

Die Konstante muss entweder durch Experimente oder durch die Theorie bestimmt werden.

II-Theorem

Wir verallgemeinern das Vorgehen.

Ein Gesetz der Form

$$Q = \Phi(Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5)$$

ist gesucht, dass den Zusammenhang von Q und einigen physikalischen Größen beschreibt, von denen wir annehmen, dass sie für Q relevant sind.

In der Menge der Q_i suchen wir die größtmögliche Teilmenge dimensional unabhängiger Größen. Diese seien bei entsprechender Nummerierung $\{Q_1, Q_2, Q_3\}$. Die Teilmenge ist nicht notwendigerweise eindeutig. Unabhängigkeit bedeutet, keine Dimension $[Q_i]$, $i = 1, 2, 3$, kann als Potenzprodukt der übrigen beiden Dimensionen ausgedrückt werden.

Da die Teilmenge größtmöglich ist, gilt:

$$\begin{aligned} [Q] &= [Q_1]^{a_1} [Q_2]^{a_2} [Q_3]^{a_3} \\ [Q_4] &= [Q_1]^{b_1} [Q_2]^{b_2} [Q_3]^{b_3} \\ [Q_5] &= [Q_1]^{c_1} [Q_2]^{c_2} [Q_3]^{c_3} \end{aligned}$$

Mit diesen Exponenten definieren wir die dimensionslosen Größen:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{Q}{Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} Q_3^{a_3}} \\ \Pi_4 &= \frac{Q_4}{Q_1^{b_1} Q_2^{b_2} Q_3^{b_3}} \\ \Pi_5 &= \frac{Q_5}{Q_1^{c_1} Q_2^{c_2} Q_3^{c_3}} \end{aligned}$$

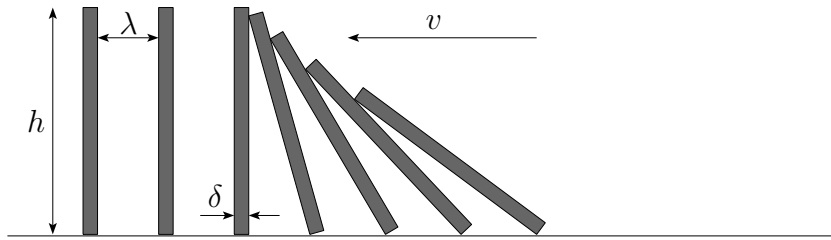
Das II-Theorem lautet nun:

$$\Pi = \Delta(\Pi_4, \Pi_5) \quad \text{bzw.} \quad Q = Q_1^{a_1} Q_2^{a_2} Q_3^{a_3} \Delta(\Pi_4, \Pi_5)$$

Die einzelnen Q_i tauchen nicht als Argumente in Δ auf, sie sind in den Nennern der dimensionslosen Größen versteckt. Die Begründung steht auf der Seite zuvor (Radius). Δ lässt sich mit dieser Vorgehensweise nicht explizit bestimmen. Experimente und theoretische Betrachtungen können jedoch möglicherweise vereinfacht werden.

Das II-Theorem ist 1914 in einer Veröffentlichung von E. Buckingham zum Thema Dimensionsanalyse enthalten. Es wurde zuvor von mehreren Physikern unabhängig voneinander entdeckt.

Dominosteine



Wir wollen einen Zusammenhang für die Geschwindigkeit v der Welle fallender Dominosteine ermitteln.

$$v = f(h, \lambda, \delta, g)$$

| | | |
|-----------|-------------------|-----------|
| h | Höhe | L |
| λ | Abstand | L |
| δ | Dicke | L |
| g | Erdbeschleunigung | LT^{-2} |

Die dimensionsunabhängigen Größen seien h und g .
Damit werden die dimensionslosen Größen bestimmt:

$$\Pi = \frac{v}{\sqrt{h \cdot g}}$$

$$\Pi_1 = \frac{\lambda}{h}$$

$$\Pi_2 = \frac{\delta}{h}$$

Das Π -Theorem lautet:

$$\Pi = \Delta(\Pi_1, \Pi_2) \quad \text{bzw.} \quad v = \sqrt{h \cdot g} \Delta(\Pi_1, \Pi_2) = \sqrt{h \cdot g} \Delta\left(\frac{\lambda}{h}, \frac{\delta}{h}\right)$$

Dieses Ergebnis erlaubt einige Folgerungen.

Die Wellengeschwindigkeit hängt wie erwartet mit g von der Erdbeschleunigung ab.

Die (Kenn-)Größen Π_1 und Π_2 legen die Geometrie des Steinaufbaus fest.

Werden die Kennzahlen beibehalten, ist die Geometrie ähnlich. Die Wellengeschwindigkeit ist dann proportional zu \sqrt{h} .