Optimales Stoppen

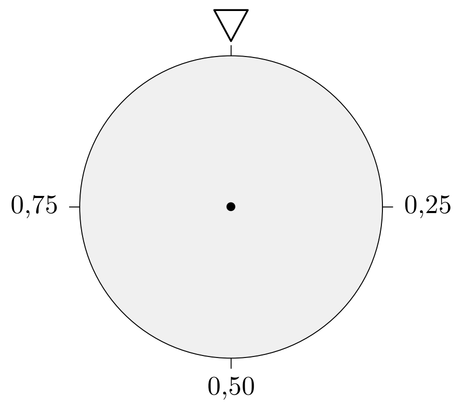
1. Eine junge Frau möchte ...
2. Warteschlange
3. Asymptotisches Verhalten
4. Irrfahrt
5. Einhüllende
6. Optimales Stoppen
7. Erwartungswerte
8. Allgemeineres
9. Symmetrische Irrfahrt
10. Asymmetrische Irrfahrt, $p \neq q$
11. Absorption
12. Mittlere Schrittzahl
13. Variation

↑ Optimales Stoppen

Eine junge Frau möchte unter den nächsten zehn Männern, die sie kennenlernen wird, einen Lebenspartner auswählen. Hierzu wird sie die Männer bewerten (in Prozent) und sofort eine Entscheidung treffen, ob sie den Mann akzeptiert und damit die Suche beendet oder ob sie den Mann ablehnt, auf ihn kann sie dann später nicht mehr zurückkommen. Die junge Frau wird also nicht erst alle Männer daten und sich dann entscheiden. Welche Strategie gibt ihr die größte Chance, den Besten auszuwählen?

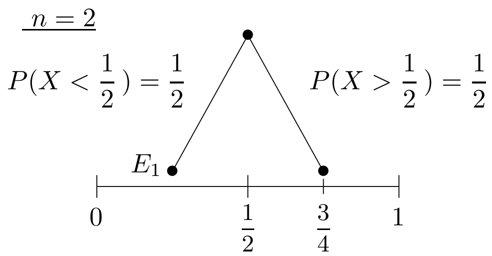
Als mathematisches Modell betrachten wir ein Glücksrad, dass n-mal gedreht werden darf. Nach jedem Einzelversuch kann die erzeugte Zufallszahl X als Gewinn akzeptiert und damit das Experiment beendet oder der Versuch fortgesetzt werden.

Sei E_n die Gewinnerwartung für n Versuche.
Offenbar gilt $E_1 = \frac{1}{2}$.



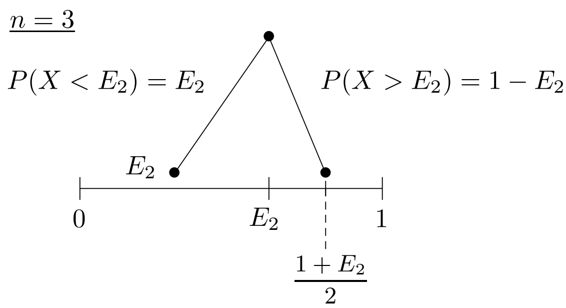
Nehmen wir nun an, wir dürfen zweimal drehen.
Für die Zufallszahl X der ersten Drehung ist $X > \frac{1}{2}$ mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$.
In diesem Fall breche ich das Experiment ab.
Meine Gewinnerwartung ist die Mitte des Intervalls $[\frac{1}{2}, 1]$.
Der Erwartungswert für $n = 2$ ist damit:

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot E_1 = \frac{5}{8}$$



Für $n = 3$ stoppe ich nach der 1. Drehung, falls $X > \frac{5}{8}$.

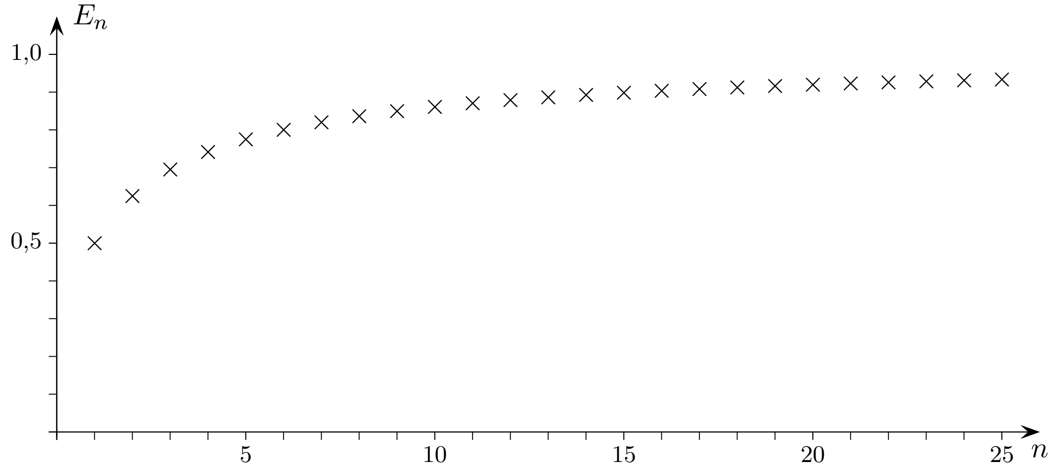
$$\begin{aligned} E_3 &= \frac{1 + E_2}{2} \cdot (1 - E_2) + E_2^2 \\ &= \frac{1 - E_2^2}{2} + E_2^2 \\ &= \frac{1 + E_2^2}{2} \end{aligned}$$



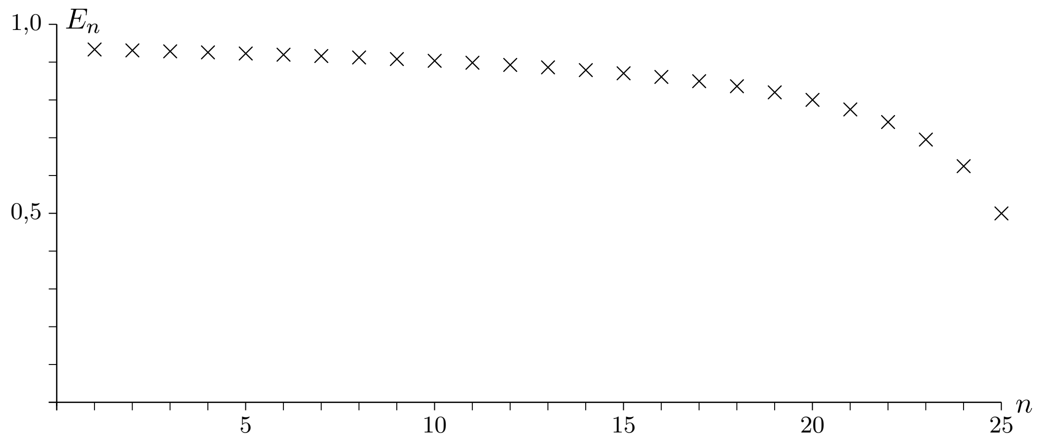
$$E_{n+1} = \frac{1 + E_n^2}{2}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	0,5	0,625	0,695	0,742	0,775	0,800	0,820	0,836	0,850	0,861

Für die junge Frau ist nun klar: Der n-te Kandidat (bei 10 beginnend) wird akzeptiert, falls die Bewertung über dem Erwartungswert E_{n-1} liegt. Für $X = E_{n-1}$ ist es gleichgültig, wie sie sich entscheidet.



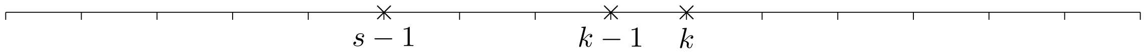
Etwas intuitiver ist die folgende Darstellung.
Es stehen maximal 25 Kandidaten zur Verfügung.
Mit Nummer 1 wird begonnen. Der n-te Kandidat wird akzeptiert,
falls die Bewertung über dem Erwartungswert E_{n+1} liegt.



Anfangs kann die junge Frau noch unbeschwert testen, gegen Ende nimmt die Wahrscheinlichkeit ab, einen ihrem Anspruch genügenden Partner zu finden.

↑ Optimales Stoppen

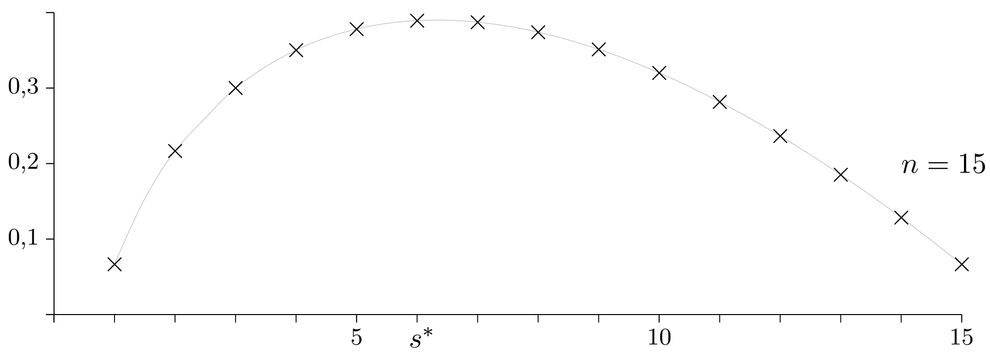
Das obige Problem soll noch auf eine zweite Weise (grob) modelliert werden. Die Warteschlange besteht aus n Kandidaten. Die ersten $s-1$ werden durch Zahlen bewertet. Das hierbei erreichte Maximum M dient der nun beginnenden Auswahl. Sie endet, sobald ein Kandidat mit einer höheren Bewertung gefunden wird (alle Bewertungen sind verschieden). Auf abgelehnte Kandidaten kann später nicht wieder zurückgegriffen werden. Wie viele Kandidaten sind für den Vortest zur Ermittlung von M erforderlich, um mit möglichst großer Wahrscheinlichkeit den optimalen Kandidaten (mit potentieller maximaler Bewertung) mit dieser Strategie zu ermitteln? Befindet er sich unter den ersten $s-1$, so wird er übersehen. Nehmen wir an, dass er die Stelle k einnimmt, $k \geq s$.



Er wird genau dann entdeckt, wenn der beste unter den ersten $k-1$ Kandidaten bereits unter den ersten $s-1$ vorkommt. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis (die Reihenfolge ist zufällig) beträgt $p_k = \frac{1}{n}\frac{s-1}{k-1}$ und die Wahrscheinlichkeit $P(s)$, an den optimalen Kandidaten zu gelangen, daher:

$$P(s) = \sum_{k=s}^{n} p_k = \frac{s-1}{n}\sum_{k=s}^{n}\frac{1}{k-1}, \quad s \geq 2, \quad P(1) = \frac{1}{n}$$

Für welches s ist $P(s)$ maximal?



Für das Maximum gilt: $\quad P(s^*-1) < P(s^*) > P(s^*+1)$

oder umgeformt: $\quad \frac{1}{s^*} + \frac{1}{s^*+1} + \ldots + \frac{1}{n-1} < 1 < \frac{1}{s^*-1} + \frac{1}{s^*} + \ldots + \frac{1}{n-1}$

$$\begin{aligned}
& P(s^*-1) \;<\; P(s^*) \\
\iff\quad & (s^*-2)\Big(\frac{1}{s^*-2} + \frac{1}{s^*-1} + \ldots + \frac{1}{n-1}\Big) \;<\; (s^*-1)\Big(\frac{1}{s^*-1} + \frac{1}{s^*} + \ldots + \frac{1}{n-1}\Big) \\
\iff\quad & (s^*-2)\cdot\frac{1}{s^*-2} + (s^*-2)\Big(\frac{1}{s^*-1} + \frac{1}{s^*} + \ldots + \frac{1}{n-1}\Big) \;<\; \ldots \\
\iff\quad & 1 \;<\; \underbrace{\big((s^*-1)-(s^*-2)\big)}_{1}\Big(\frac{1}{s^*-1} + \frac{1}{s^*} + \ldots + \frac{1}{n-1}\Big)
\end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung wird entsprechend nachgewiesen. Zu jedem
n gibt es genau ein s^*, z.B. $n = 20$, $s^* = 8$, $P(s^*) = 0{,}384$. 7 Kandidaten muss man passieren lassen.

Um das asymptotisches Verhalten von $P(s^*)$ und s^* zu untersuchen, wird die Näherung

$$\sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \approx \int\limits_s^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n - \ln s = \ln \frac{n}{s}$$

herangezogen.

$$P(s) = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s}^{n} \frac{1}{k-1} = \frac{s-1}{n} \sum_{k=s-1}^{n-1} \frac{1}{k} \approx \frac{s}{n} \sum_{k=s}^{n-1} \frac{1}{k} \approx \frac{s}{n} \ln \frac{n}{s}$$

Mit der Differentialrechnung folgt: $s^* \approx \frac{n}{e}$, $P(s^*) = \frac{1}{e} = 0{,}368$
Faustregel: 37 % der Kandidaten muss man passieren lassen.

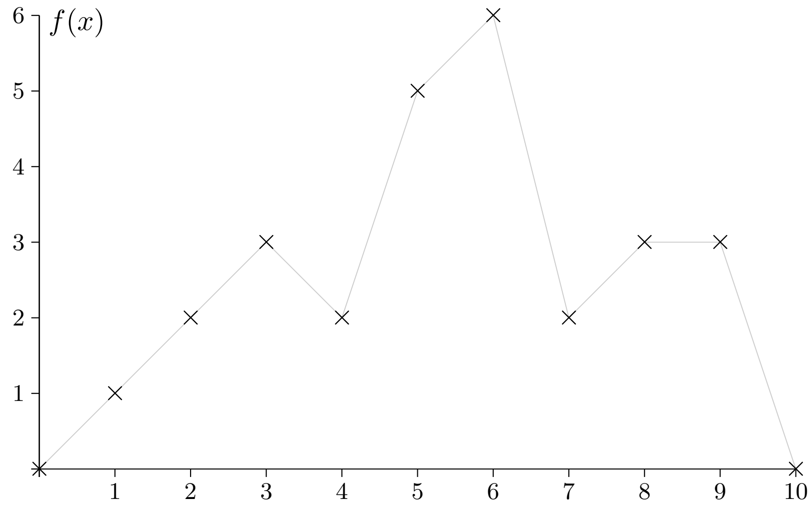
Dasselbe Ergebnis kann auch mit der Doppelungleichung auf der vorigen Seite erzielt werden.

$$P(s^*) \approx \frac{s^*}{n} \sum_{k=s^*}^{n-1} \frac{1}{k} \approx \frac{s^*}{n} \cdot 1 \approx \frac{s^*}{n} \ln \frac{n}{s^*} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln \frac{n}{s^*} \approx 1$$

$\ldots$

Die bearbeitete Fragestellung wird in der Literatur als Sekretärinnen-Problem bezeichnet.

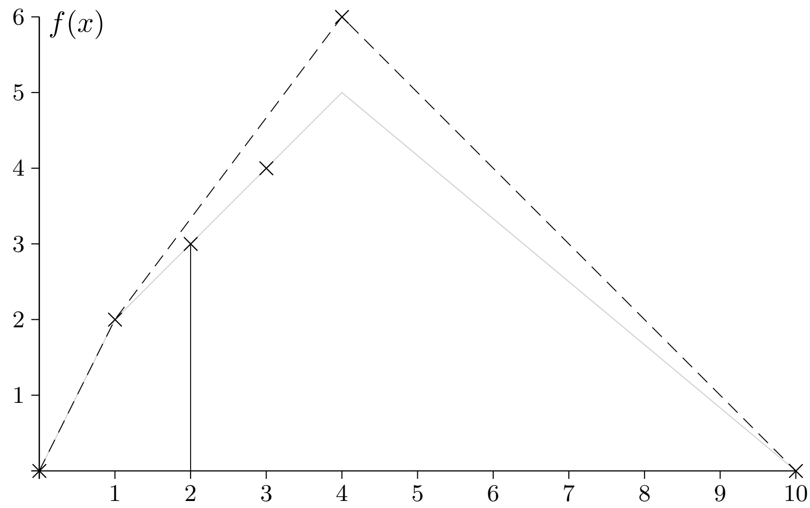
↑ Optimales Stoppen auf einer Markov-Kette



Wir betrachten eine Irrfahrt auf der Menge $\{0, 1, \ldots, 10\}$ mit Absorption in den Endpunkten und der einheitlichen Übergangswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$.

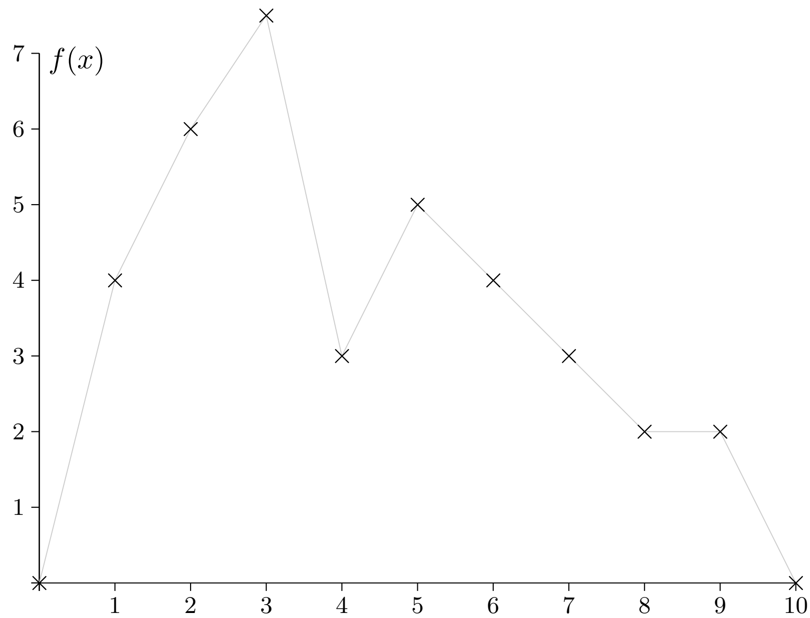
Die Bewegung eines Teilchens kann zu einem beliebigen Zeitpunkt n gestoppt werden.
Befindet sich das Teilchen zum Zeitpunkt des Stoppens im Zustand x, so erhält man die Auszahlung $f(x)$, wobei f eine bekannte Funktion ist. In welchen Zuständen sollte gestoppt werden, damit eine größtmögliche Auszahlung erzielt wird?

Sicher sollte in Zustand 6 gestoppt werden, eine größere Auszahlung ist nicht möglich.
In den Zuständen 4 und 7 sollte nicht gestoppt werden, in nächsten Schritt winkt eine größere Auszahlung. Im Zustand 5 sollte gestoppt werden, da der mögliche Verlust den erhofften Gewinn übersteigt. Im Zustand 8 sollte nicht gestoppt werden, $f(8)$ ist sicher, $f(6)$ möglich.
In den Zuständen 1 und 2 sollte gestoppt werden, Verlust und Gewinn der nächsten Schritte halten sich die Waage. Diese Überlegungen können zusammengefasst werden.



Mit $f(4)$ vergrößert sich auch der Erwartungswert, falls im Zustand 2 nicht gestoppt wird.
So kommt die Einhüllende zustande.

Für Übergangswahrscheinlichkeiten wie z. B. $p_{\leftarrow}= \frac{1}{3}$ und $p_{\rightarrow}= \frac{2}{3}$ treten an die Stelle von ungeknickten Streckenpaaren abgeknickte Streckenpaare. Das Verhältnis der Steigungen wird durch die Übergangswahrscheinlichkeiten bestimmt, da der Erwartungswert gleich bleiben soll.

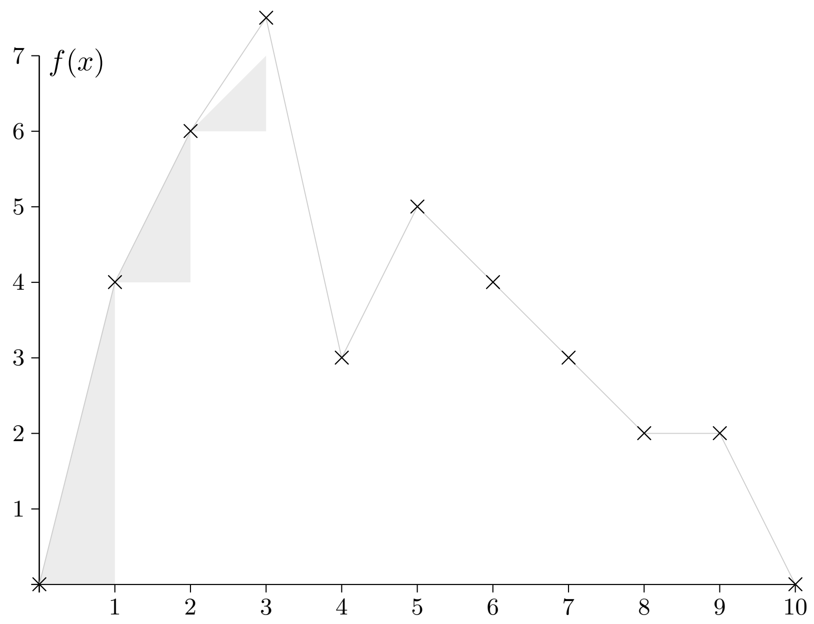


$p_{\leftarrow}= \frac{1}{3}$

$p_{\rightarrow}= \frac{2}{3}$

In welchen Zuständen sollte gestoppt werden?

$\uparrow$ Optimales Stoppen auf einer Markov-Kette

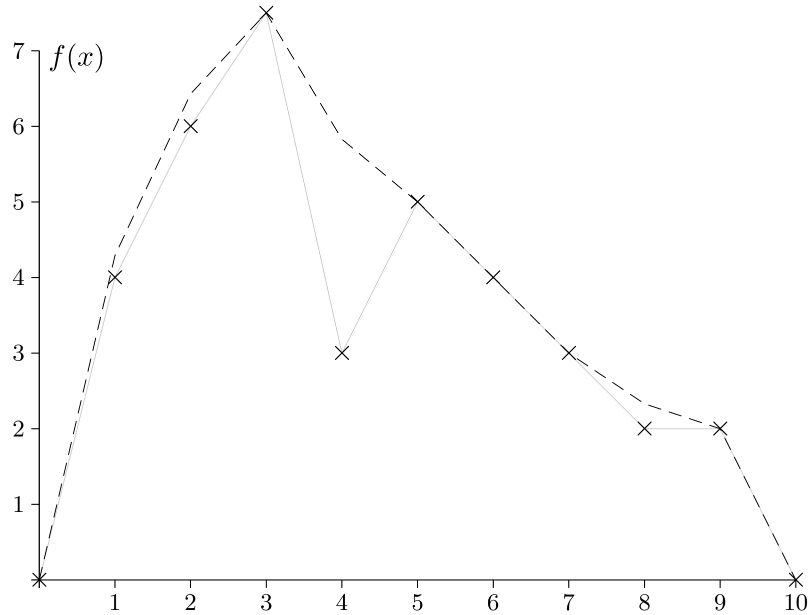


$p_{\leftarrow} = \frac{1}{3}$

$p_{\rightarrow} = \frac{2}{3}$

Beginnen wir mit dem Maximum von f. Sicher sollte damit im Zustand 3 gestoppt werden.
Wäre $f(3) = 7$, so brächte das Fortsetzen in den Zuständen 1 und 2 keinen Vorteil.
Da $f(3) > 7$ ist, sollte in diesen Zuständen nicht gestoppt werden,
offensichtlich auch nicht in 4 und 8.
Für den Zustand 5 gilt bei Fortsetzung: $E(5) = \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 7{,}5\right) = 4{,}6$
Wegen $f(5) = 5$ ist es ratsam, hier zu stoppen, und auch in den restlichen Zuständen 6, 7, 9.

↑ Optimales Stoppen auf einer Markov-Kette



$p_{\leftarrow} = \frac{1}{3}$

$p_{\rightarrow} = \frac{2}{3}$

Es gelten die Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\text{von 1 nach 3}) = P_{13} = \frac{4}{7}$$

$$P(\text{von 2 nach 3}) = P_{23} = \frac{6}{7}$$

Zum Nachweis kann das Gleichungssytem aufgestellt werden:

$$P_{23} = p_{\rightarrow} + p_{\leftarrow} \cdot P_{13}$$
$$P_{13} = p_{\rightarrow} \cdot P_{23}$$

Dann betragen die Erwartungswerte für die Auszahlung von 7,5 für die Zustände 1 und 2:

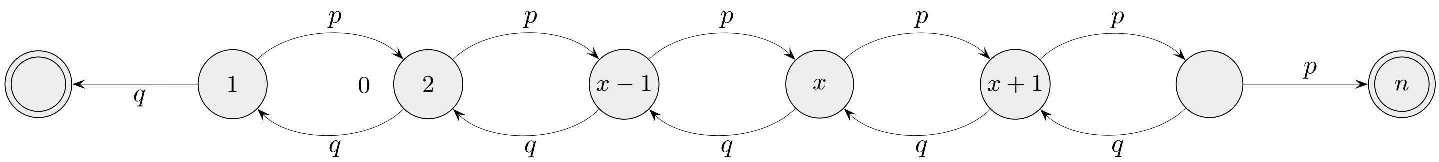
$$E(1) = 4{,}29$$

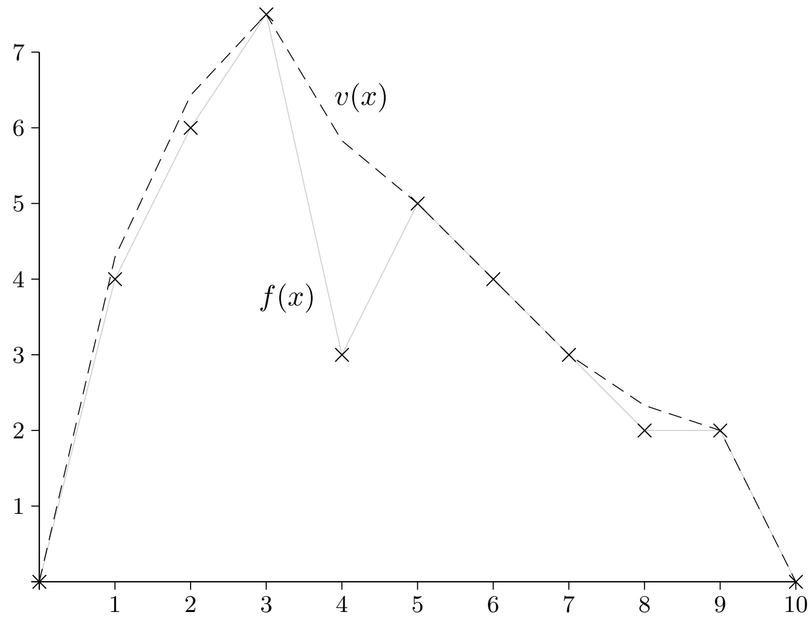
$$E(2) = 6{,}43$$

$$E(4) = \frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 7{,}5 = 5{,}83 \qquad E(8) = 2{,}33$$

Mit einem Blick:
Es wird in denjenigen Zuständen x gestoppt, in denen der Graph von $f(x)$ auf die gestrichelte Linie (Einhüllende) trifft.

↑ Allgemeineres





Gegeben ist eine Auszahlungsfunktion f auf einer absorbierenden Markov-Kette.
Für jeden Zustand x sei $v(x)$ der Erwartungswert für eine maximale Auszahlung beim Start in x und optimaler Stopp-Strategie τ_x.

Für diese Wertfunktion $v(x)$ gilt:

$$v(x) = \max\{f(x),\ \underbrace{pv(x+1) + qv(x-1)}_{\text{Erwartungswert für einen weiteren Schritt}}\}$$

An den Rändern ist v natürlich null.
Es wird in denjenigen Zuständen x gestoppt, für die $f(x) = v(x)$ gilt.

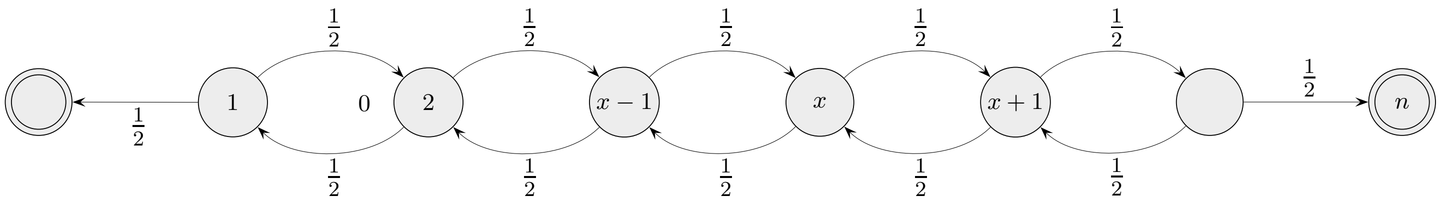
Man beachte, dass hierdurch eine Stoppregel festgelegt ist, die für jeden Zustand das Maximum liefert. Beginnen wir z. B. in x_0. Falls $f(x_0) < v(x_0)$ ist, gibt es also eine optimale Stoppregel τ_{x_0}, die ein Weitermachen empfiehlt; wir gelangen zu x_1. Auch hierzu gibt es eine optimale Stoppregel τ_{x_1}, die das Weitere festlegt.

Diese Überlegungen können verallgemeinert werden.
Sei p_{xy} die Wahrscheinlichkeit, von x nach y überzugehen, dann gilt:

$$v(x) = \max\{f(x), \sum_y p_{xy} v(y)\}$$

Um $v(x)$ zu ermitteln, ist ein iteratives Vorgehen denkbar, mit $v_1(x) = f(x)$ beginnend.
Die Anzahl der Stoppzustände wird schrittweise reduziert.

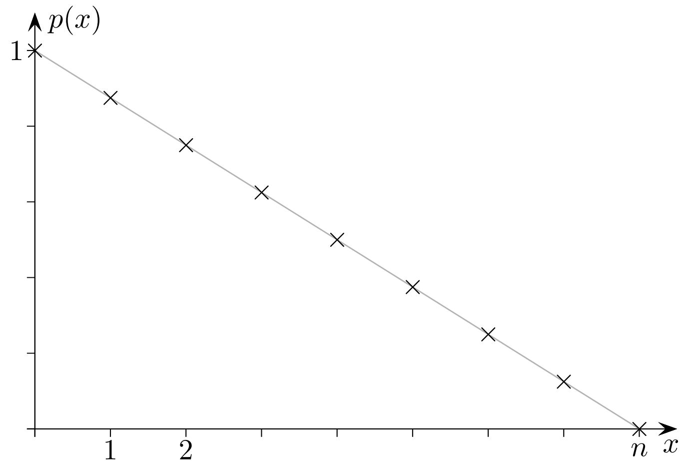
↑ Symmetrische Irrfahrt



Ein Teilchen startet in x und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit $1/2$ nach links oder rechts. In 0 und n wird es gestoppt. Es sei $p(x)$ die Wahrscheinlichkeit von x aus in 0 absorbiert zu werden. Offensichtlich gilt:

$$p(0) = 1$$
$$p(n) = 0$$
$$p(x) = \frac{1}{2}\left(p(x-1) + p(x+1)\right)$$

$p(x)$ ist der Mittelwert seiner Nachbarwerte. Die Werte liegen damit auf einer Geraden.



$$p(x) = 1 - \frac{x}{n}$$

Sei $m(x)$ die mittlere Schrittzahl von x aus bis zur Absorption.

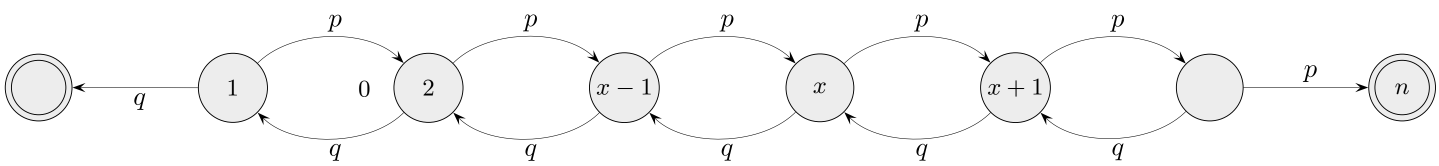
$$m(0) = 0$$
$$m(n) = 0$$
$$m(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(m(x-1) + m(x+1)\right)$$

Die einfachste Funktion für $m(x)$ mit den Nullstellen 0 und n wäre $m(x) = x \cdot (n - x)$.
Und das ist auch schon richtig. Nachzuprüfen ist (Abkürzung $a = n - x$):

$$x \cdot a = 1 + \frac{1}{2}\left((x-1)(a+1) + (x+1)(a-1)\right)$$

Das ist mit wenigen Umformungen zu sehen.

↑ Asymmetrische Irrfahrt, $p \neq q$



Ein Teilchen startet in x und springt jede Sekunde mit der Wahrscheinlichkeit q nach links, mit p nach rechts. In 0 und n wird es gestoppt. Es sei $h(x)$ die Wahrscheinlichkeit von x aus in 0 absorbiert zu werden. Offensichtlich gilt

$$\begin{aligned} h(0) &= 1 \\ h(n) &= 0 \\ h(x) &= p\,h(x+1) + q\,h(x-1) \end{aligned}$$

Um den Funktionsterm von $h(x)$ zu ermitteln, formen wir die linke Seite mit $h(x) \cdot 1 = h(x) \cdot (p+q)$ um, dividieren durch p, kürzen mit $r = \frac{q}{p}$ ab, ordnen und klammern r aus.

$$\begin{aligned} p\,h(x) + q\,h(x) &= p\,h(x+1) + q\,h(x-1) \\ h(x+1) - h(x) &= r\big[h(x) - h(x-1)\big] \quad * \end{aligned}$$

Die rechte Seite von $*$ kann wiederholt mit $*$ umgeformt werden,
$h(x) - h(x-1) = r\big[h(x-1) - h(x-2)\big] \quad , \ldots$ Wir erhalten schließlich

$$h(x+1) - h(x) = r^x\big[h(1) - h(0)\big], \qquad x = 0, 1, 2, n-1$$

und insbesondere

$$\begin{aligned} h(x) - h(x-1) &= r^{x-1}\big[h(1) - h(0)\big] \\ h(x-1) - h(x-2) &= r^{x-2}\big[h(1) - h(0)\big] \\ &\;\;\cdots \\ h(2) - h(1) &= r\big[h(1) - h(0)\big] \\ h(1) - h(0) &= 1\big[h(1) - h(0)\big] \end{aligned}$$

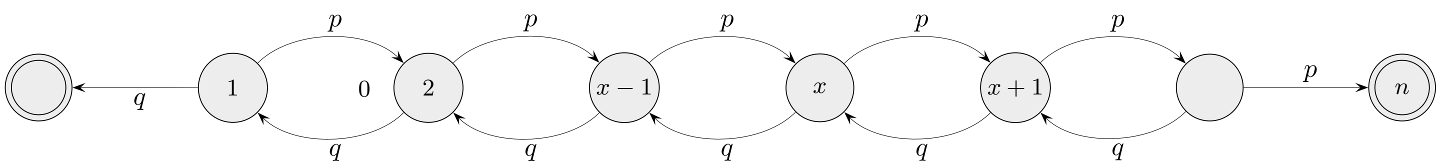
$$h(x) - h(0) = \frac{r^x - 1}{r - 1}\big[h(1) - h(0)\big] \qquad **$$ Die obigen Gleichungen wurden addiert (geom. Reihe).

Mit $h(0) = 1$, $x = n$ und damit $h(n) = 0$ erhalten wir:

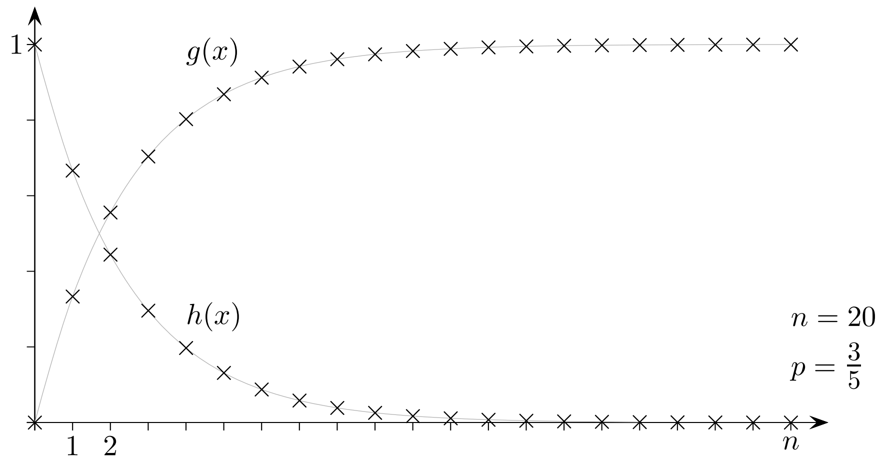
$$h(1) - 1 = -\frac{r-1}{r^n - 1}$$

Dies in $**$ eingesetzt ergibt nach kurzer Rechnung: $\quad h(x) = \frac{r^n - r^x}{r^n - 1}, \;\; r = \frac{q}{p}, \;\; p \neq q$

↑ Asymmetrische Irrfahrt



$h(x)$ und $g(x)$ sind die Wahrscheinlichkeiten von x aus in 0 bzw. n absorbiert zu werden.



Man erhält $g(x)$ aus $h(x)$, indem man p mit q vertauscht und x durch $n - x$ ersetzt.
Erweitern mit r^n führt zu

$$g(x) = \frac{1-r^x}{1-r^n}\,, \quad r = \frac{q}{p}, \quad p \neq q$$

Es gilt $\qquad h(x) + g(x) = 1 \qquad$ (lediglich einen Bruchterm mit -1 erweitern)

Erst hiermit ist gezeigt, dass die Absorption mit der Wahrscheinlichkeit 1 erfolgt, obwohl es für $n \geq 4$ unendlich viele Pfade gibt, die nie nach 0 oder n gelangen.
Die Gesamtwahrscheinlichkeit dieser Pfade muss 0 sein.

Sei $m(x)$ die mittlere Schrittzahl von x aus bis zur Absorption.

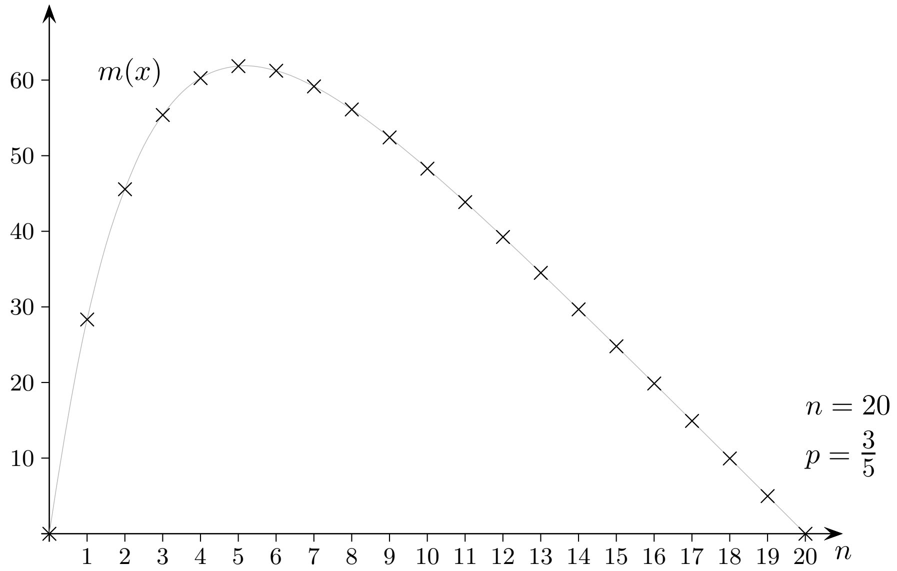
$$m(0) = 0$$

$$m(n) = 0$$

$$m(x) = 1 + p\,m(x+1) + q\,m(x-1)$$

$m(x) = \frac{x}{q-p} - \frac{n}{q-p}\,g(x)$ $\qquad$ Das kann mit $g(x) = p\,g(x+1) + q\,g(x-1)$ verifiziert werden.

↑ Mittlere Schrittzahl



↑ Variation

Nehmen wir nun an, dass jeder Zustandswechsel mit den Kosten d verbunden ist.
Nach jedem Schritt sind
von den Funktionswerten $f(x)$ die zu erwartenden Kosten $m(x) \cdot d$ zu subtrahieren
($m(x)$ mittlere Schrittzahl vom augenblicklichen Zustand nach x), sowie die Einhüllende $v(x)$
zu ermitteln, um den nächsten optimalen Schritt tun zu können.