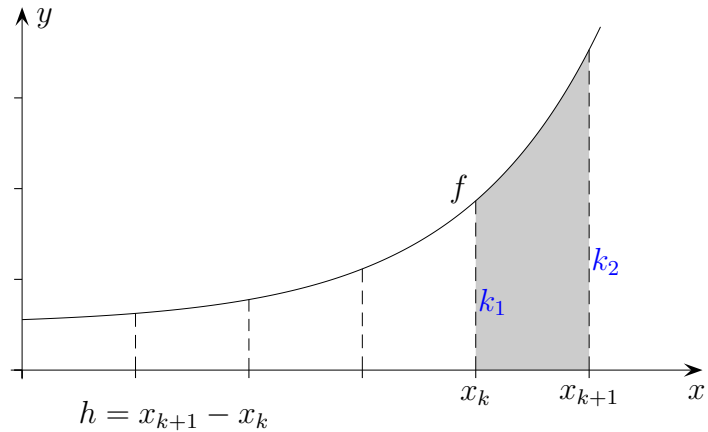


Einschritt-Methoden

$$y' = f(x, y) \quad \text{diskretisiert} \quad y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx$$



Methode von Heun

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f(x_k + h, y_k + h \cdot k_1) \quad y_{k+1} \text{ geschätzt}$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2) \quad \text{Trapezfläche}$$

Methode von Runge-Kutta 3. Ordnung

$$k_1 = f(x_k, y_k)$$

$$k_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1\right)$$

$$k_3 = f(x_k + h, y_k - h k_1 + 2h k_2)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \quad \text{Simpson-Regel}$$

Einschritt-Methoden

Methode von Runge-Kutta 4. Ordnung

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_k, y_k) \\k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1\right) \\k_3 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} \cdot k_2\right) \\k_4 &= f(x_k + h, y_k + h k_3) \\y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\end{aligned}$$

Methode von Runge-Kutta 4. Ordnung, Integration mit der $\frac{3}{8}$ -Regel

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_k, y_k) \\k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{3}, y_k + \frac{h}{3} \cdot k_1\right) \\k_3 &= f\left(x_k + \frac{2h}{3}, y_k - \frac{h}{3} \cdot k_1 + h k_2\right) \\k_4 &= f(x_k + h, y_k + h k_1 - h k_2 + h k_3) \\y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)\end{aligned}$$

Simpsonregel (Keplersche Fassregel)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} [f(a) + 4f(m) + f(b)], \quad m = \frac{a+b}{2}$$

gilt für ganzrationale Funktionen 2. und 3. Grades.

3/8-Regel (eine der Newton-Cotes-Formeln)

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{8} \left[f(a) + 3f\left(a + \frac{b-a}{3}\right) + 3f\left(a + 2\frac{b-a}{3}\right) + f(b) \right]$$

iterative Lösung einer DGL

Die DGL $y' = \underbrace{x + y}_{f(x,y)}$, Anfangswert $y_0 = 1$, soll näherungsweise iterativ gelöst werden.

Die Schrittweite sei $h = 0,2$.

Für eine diskrete Näherungslösung einer DGL wird $y'(x)$ durch $\frac{y_{n+1} - y_n}{h}$ ersetzt und nach y_{n+1} aufgelöst.

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \underbrace{(x_n + y_n)}_{f(x_n, y_n)}, \quad x_{n+1} = x_n + h$$

Methode von Heun

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + h \cdot k_1) && y_{n+1} \text{ geschätzt} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2) && \text{Trapezfläche} \end{aligned}$$

einsetzen, zusammenfassen, vereinfachen:

n	x_n	y_n	$k_1 = x_n + y_n$	$k_2 = k_1 + h(1 + k_1)$	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$
0	0	1			
1	0,2				

DGL $y' = \lambda y$, Anfangswert $y_0 = 1$

n	x_n	y_n	$k_1 = \lambda y_n$	$k_2 = k_1(1 + \lambda h)$	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$
0	0	1			
1	0,2				

iterative Lösung einer DGL (Heun)

Methode von Heun

$$\begin{aligned}k_1 &= f(x_n, y_n) \\k_2 &= f(x_n + h, y_n + h \cdot k_1) && y_{n+1} \text{ geschätzt} \\y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2) && \text{Trapezfläche}\end{aligned}$$

DGL $y' = -2xy^2$, Anfangswert $y(a) = b$, Schrittweite h

```
x(1) = a
y(1) = b
write(x(1), y(1))
```

Schleife für $n = 1$ bis *AnzahlSchritte* (= Intervalllänge/ h)

```
k1 = -2 * x(n) * y(n) * y(n)
k2 = -2 * (x(n) + h) * (y(n) + h * k1) * (y(n) + h * k1)
y(n + 1) = y(n) + 0.5 * h * (k1 + k2)
x(n + 1) = x(n) + h
write(x(n + 1), y(n + 1))
```

implizite Euler-Methode

DGL $y' = -2xy^2$

$$y_k = y_{k-1} + h \cdot f(x_k, y_k) \quad \text{allgemein}$$

$$y_k = y_{k-1} - 2h \cdot x_k \cdot y_k^2$$

$$y_k - y_{k-1} + 2h \cdot x_k \cdot y_k^2 = 0$$

Diese nichtlineare Gleichung ist nach y_k aufzulösen.
Hier ist das mit der pq -Formel möglich (nach Umstellen),
im Allgemeinen mit dem Newtonschen-Iterationsverfahren:

$$g(y_k) = y_k - y_{k-1} + 2h \cdot x_k \cdot y_k^2$$

$$g(y) = y - y_{k-1} + 2h \cdot x_k \cdot y^2 \quad (y_k \text{ in } y \text{ umbenannt})$$

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} - \frac{g(y^{(j)})}{g'(y^{(j)})}$$

Startwert $y^{(0)}$

Implizite Verfahren sind weitaus stabiler als explizite.

Siehe auch: [Numerische Integration](#)
[Lagrange-Interpolation](#)
[Startseite](#)