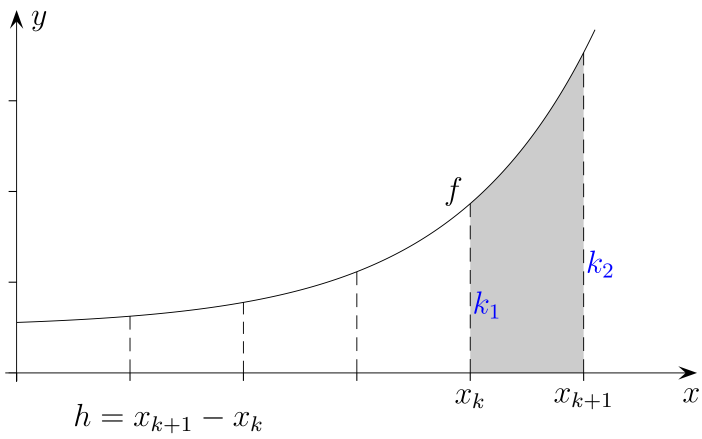
Einschritt-Methoden

$y' = f(x, y)$ diskretisiert $y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y)\, dx$



Methode von Heun

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k) \\
k_2 &= f(x_k + h, y_k + h \cdot k_1) \qquad y_{k+1} \text{ geschätzt} \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2) \qquad \text{Trapezfläche}
\end{aligned}
$$

Methode von Runge-Kutta 3. Ordnung

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k) \\
k_2 &= f(x_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{2} \cdot k_1) \\
k_3 &= f(x_k + h,\ y_k - hk_1 + 2hk_2) \\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3) \qquad \text{Simpson-Regel}
\end{aligned}
$$

Einschritt-Methoden

Methode von Runge-Kutta 4. Ordnung

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k)\\
k_2 &= f(x_k + \tfrac{h}{2},\, y_k + \tfrac{h}{2}\cdot k_1)\\
k_3 &= f(x_k + \tfrac{h}{2},\, y_k + \tfrac{h}{2}\cdot k_2)\\
k_4 &= f(x_k + h,\, y_k + hk_3)\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Methode von Runge-Kutta 4. Ordnung, Integration mit der $\frac{3}{8}$-Regel

$$\begin{aligned}
k_1 &= f(x_k, y_k)\\
k_2 &= f(x_k + \tfrac{h}{3},\, y_k + \tfrac{h}{3}\cdot k_1)\\
k_3 &= f(x_k + \tfrac{2h}{3},\, y_k - \tfrac{h}{3}\cdot k_1 + hk_2)\\
k_4 &= f(x_k + h,\, y_k + hk_1 - hk_2 + hk_3)\\
y_{k+1} &= y_k + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)
\end{aligned}$$

Simpsonregel (Keplersche Fassregel)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\big[f(a) + 4f(m) + f(b)\big], \qquad m = \frac{a+b}{2}$$

gilt für ganzrationale Funktionen 2. und 3. Grades.

3/8-Regel (eine der Newton-Cotes-Formeln)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8}\Big[f(a) + 3f\big(a + \tfrac{b-a}{3}\big) + 3f\big(a + 2\tfrac{b-a}{3}\big) + f(b)\Big]$$

iterative Lösung einer DGL

Die DGL $\quad y' = \underbrace{x+y}_{f(x,y)}\,,\quad$ Anfangswert $y_0 = 1,$ soll näherungsweise iterativ gelöst werden.

Die Schrittweite sei $h = 0{,}2$.

Für eine diskrete Näherungslösung einer DGL wird $y'(x)$ durch $\dfrac{y_{n+1} - y_n}{h}$ ersetzt und nach y_{n+1} aufgelöst.

$$y_{n+1} \;=\; y_n + h \cdot \underbrace{(x_n + y_n)}_{f(x_n,y_n)}, \qquad x_{n+1} = x_n + h$$

Methode von Heun

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h,\, y_n + h \cdot k_1) && y_{n+1} \text{ geschätzt} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2) && \text{Trapezfläche} \end{aligned}$$

einsetzen, zusammenfassen,vereinfachen:

n	x_n	y_n	$k_1 = x_n + y_n$	$k_2 = k_1 + h(1 + k_1)$	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$
0	0	1			
1	0,2				

DGL $\quad y' = \lambda y,\quad$ Anfangswert $y_0 = 1$

n	x_n	y_n	$k_1 = \lambda y_n$	$k_2 = k_1(1 + \lambda h)$	$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$
0	0	1			
1	0,2				

iterative Lösung einer DGL (Heun)

Methode von Heun

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n) \\ k_2 &= f(x_n + h, y_n + h \cdot k_1) && y_{n+1} \text{ geschätzt} \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2} \cdot (k_1 + k_2) && \text{Trapezfläche} \end{aligned}$$

DGL $y' = -2xy^2$, Anfangswert $y(a) = b$, Schrittweite h

$x(1) = a$
$y(1) = b$
write$(x(1), y(1))$

Schleife für $n = 1$ bis *AnzahlSchritte* (= Intervalllänge/h)

$k1 = -2 \cdot x(n) \cdot y(n) \cdot y(n)$

$k2 = -2 \cdot (x(n) + h) \cdot (y(n) + h \cdot k1) \cdot (y(n) + h \cdot k1)$

$y(n+1) = y(n) + 0.5 \cdot h \cdot (k1 + k2)$

$x(n+1) = x(n) + h$

write$(x(n+1), y(n+1))$

implizite Euler-Methode

DGL $\quad y' = -2xy^2$

$$\begin{aligned} y_k &= y_{k-1} + h \cdot f(x_k, y_k) && \text{allgemein} \\ y_k &= y_{k-1} - 2h \cdot x_k \cdot y_k^2 \end{aligned}$$

$$y_k - y_{k-1} + 2h \cdot x_k \cdot y_k^2 = 0$$

Diese nichtlineare Gleichung ist nach y_k aufzulösen.
Hier ist das mit der pq-Formel möglich (nach Umstellen),
im Allgemeinen mit dem Newtonschen-Iterationsverfahren:

$$\begin{aligned} g(y_k) &= y_k - y_{k-1} + 2h \cdot x_k \cdot y_k^2 \\ g(y) &= y - y_{k-1} + 2h \cdot x_k \cdot y^2 && (y_k \text{ in } y \text{ umbenannt}) \end{aligned}$$

$$y^{(j+1)} = y^{(j)} - \frac{g(y^{(j)})}{g'(y^{(j)})}$$

Startwert $y^{(0)}$

Implizite Verfahren sind weitaus stabiler als explizite.

Siehe auch: Numerische Integration
Lagrange-Interpolation