Lineare Algebra

Das homogene (auf der rechten Seite steht eine Null) lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 3x_2 & - & 5x_3 & + & x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 0 \end{array}$$

besitzt die allgemeine Lösung:

$$\vec{x} = \lambda \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Leicht zu vermuten und zu beweisen ist der

Satz
Für ein homogenes lineares Gleichungssystem gilt:
Jedes Vielfache einer Lösung ist wieder eine Lösung.
Die Summe zweier Lösungen ist wieder eine Lösung.

Sprechweise: Die Lösungsmenge bildet einen Vektorraum. Die Lösungsmenge des obigen Gleichungssystems ergibt sich aus allen Linearkombinationen zweier 4-Tupel, den Basisvektoren des Vektorraums. Sie sind linear unabhängig, der Vektorraum hat die Dimension 2.

Da diese Begriffe für die Vektorrechnung grundlegend sind und ihre Bedeutung weit über die hier behandelten Sachverhalte hinausgeht, sollen exakte Definitionen folgen. Sie ermöglichen die Beantwortung von Fragen wie:

- Welche anderen Basisdarstellungen des Lösungsvektorraums gibt es?
- Besitzen alle Basisdarstellungen dieselbe Anzahl von Basiselementen?

Zwei Vektoren des $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig, falls der eine ein Vielfaches des anderen ist ($\vec{a} = \lambda\vec{b}$, die Vektoren sind kollinear). Drei Vektoren sind linear abhängig, falls sich ein Vektor als Linearkombination der übrigen beiden darstellen lässt ($\vec{a} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$, die Vektoren sind komplanar).

Def.
m Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind linear abhängig, falls sich (mindestens) einer als Linearkombination der übrigen darstellen lässt.

Die Negation von linear abhängig ist linear unabhängig. m Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind linear unabhängig, falls sich kein Vektor als Linearkombination der übrigen darstellen lässt. Wie kann lineare Unabhängigkeit rechnerisch nachgeprüft werden? Es gilt der

Satz
m Vektoren des $\mathbb{R}^n$ sind genau dann linear unabhängig, falls aus einer Linearkombination des Nullvektors $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n\vec{a}_n \;=\; 0$ folgt, dass alle Koeffizienten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Null sein müssen.

Zur Beschreibung einer Vektormenge genügen in der Regel wenige Vektoren.

Lineare Algebra, Fortsetzung

Def.
Die Vektoren $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ *bilden ein Erzeugendensystem einer Vektormenge, falls sich alle Vektoren dieser Menge als Linearkombination der* $\vec{a}_i$ *darstellen lassen.*

Def.
Ein minimales Erzeugendensystem heißt Basis.

Satz
Basisvektoren sind linear unabhängig.

Satz
Alle Basen bestehen aus gleich vielen Elementen.

Def.
Die Anzahl der Basiselemente heißt Dimension des Vektorraums.

Für die Definition von linearer Unabhängigkeit, Basis, Dimension usw. benötigen wir Elemente (bisher n-Tupel), für die zwei Verknüpfungen (Addition und Multiplikation mit einer reellen Zahl) mit gewissen Eigenschaften wie z.B. $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$ erklärt sind, sie sind im Axiomensystem für Vektorräume festgehalten. Verknüpfungen dieser Art sind auch auf Matrizen, Folgen und Funktionen definiert, so dass sich auf diese Bereiche die gesamte Begriffsbildung samt Folgerungen übertragen lassen. Dieses mathematische Gebiet heißt lineare Algebra.

Von besonderem Interesse sind lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen. Sie lassen sich durch Matrizen beschreiben. Deren Eigenschaften und die Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen werden in diesem Zusammenhang untersucht, sowie Eigenwerte und Eigenvektoren, schließlich Determinanten.
Die Vektoren, die bei einer linearen Abbildung auf den Nullvektor abgebildet werden, ergeben einen Untervektorraum, den sogenannten Kern. Er besteht aus den Lösungsvektoren eines linearen homogenen Gleichungssystems, deren Koeffizientenmatrix die Abbildung beschreibt. Mit diesem Kern können die Vektoren erfasst werden, die dasselbe Bild haben.
Ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt euklidischer Raum. In ihm sind dann eine Norm, eine Metrik und eine Orthogonalitätsbeziehung vorhanden. Spezielle Basen (Orthonormalsysteme), die der Bearbeitung von Approximationsproblemen dienen, können dann gebildet werden.

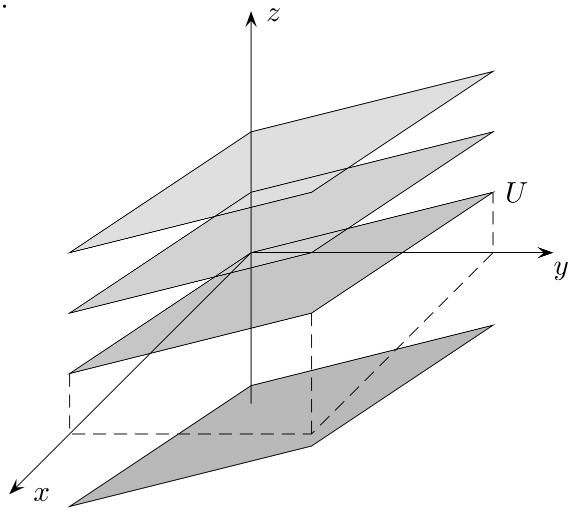
Faktorraum

Bei linearen Abbildungen (in der Gruppentheorie Homomorphismen) bezeichnet der Kern diejenigen Elemente, die auf die Null (dem neutralen Element) abgebildet werden. Die Elemente der mit dem Kern (in der Gruppentheorie ist es ein Normalteiler) gebildeten Nebenklassen besitzen dann jeweils denselben Funktionswert. Auf den Nebenklassen kann in naheliegender Weise eine Verknüpfung definiert werden, so dass ihre algebraische Struktur (der Faktorraum) mit der Bildmenge übereinstimmt, d. h. isomorph ist. Dimensionsaussagen sind nun möglich.

Zur Veranschaulichung dieser Begriffsbildungen betrachten wir die Gleichung:

$$4x + 4y - z = d$$

und suchen zu vorgegebenem d die Lösungsmenge im $\mathbb{R}^3$.



Die Gleichung kann als Koordinatenform einer von d abhängigen Ebene aufgefasst werden, so dass die Lösungsmannigfaltigkeiten jeweils aus den Punkten paralleler Ebenen bestehen.

Um den Zusammenhang zum oben Dargestellten zu erhellen, wird die Lösungsmenge als Menge aller Vektoren betrachtet, die von der linearen Abbildung

$$f(\vec{x}) = 4x + 4y - z$$

auf d abgebildet werden, dem Urbild von d.

Hierzu ermitteln wir zunächst die Lösungsmannigfaltigkeit von $f(\vec{x}) = 0$ und untersuchen daher die zugehörige homogene Gleichung $4x + 4y - z = 0$.
Zwei Parameter können vorgegeben werden, der Dritte ist dann festgelegt:

$$\vec{x_0} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 4(x_0 + y_0) \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Diese Vektoren bilden einen Untervektorraum U.
Um nun

$$4x + 4y - z = d$$

zu lösen, ist lediglich eine (spezielle) Lösung, z. B. $\vec{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix}$ zu U zu addieren:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -d \end{pmatrix} + x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Erneut erhalten wir die parallelen Ebenen, die den $\mathbb{R}^3$ ausfüllen und jeweils auf d abgebildet werden. Veranschauliche dies: Die Menge der Ebenen und damit der Faktorraum $\mathbb{R}^3/U$ ergibt sich auch aus der Äquivalenzrelation: $\vec{x} \sim \vec{y} \iff \vec{x} - \vec{y} \in U$