Limes inferior von Mengen

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.

Wir bilden die Menge aller Elemente, die in fast allen A_i enthalten sind,
d. h. diese <u>Elemente sind (höchstens) in nur endlich vielen A_i nicht enthalten</u>.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	$\dots$
$a\notin$			$a\notin$			$a\notin$										

Diese Menge wird mit $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$ bezeichnet.
Da ein Element a dieser Menge in nur endlich vielen A_i nicht enthalten ist, gibt es eine Stelle n (hier 8), so dass für alle $k \geq n$ gilt: $a \in A_k$. Damit liegt a im Durchschnitt $a \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Werden alle Stellen berücksichtigt, so erhalten wir $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.
Die Umkehrung ist noch zu zeigen.
Sei also $a \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Dann gibt es ein n mit $a \in \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k$. Ab der Stelle n gilt daher $a \in A_k$.
Für $1 \leq k < n$ (endl. viele) wissen wir nichts. Jedenfalls ist a in fast allen A_i enthalten.

Limes superior von Mengen

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.

Wir bilden die Menge aller <u>Elemente, die in unendlich vielen A_i enthalten</u> sind.
Zwei Beispiele:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	$\dots$
$a \notin$			$a \notin$			$a \notin$										

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}	A_{11}	A_{12}	A_{13}	A_{14}	A_{15}	A_{16}	$\dots$
	$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$		$a \in$	

Diese Menge wird mit $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n$ bezeichnet.

Offensichtlich gilt: $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$,
denn wenn a in nur endlich vielen A_i nicht enthalten ist, dann ist es in unendlich vielen A_i enthalten.

Sei das Element a in unendlich vielen A_i enthalten.
Wie kann das ohne *unendlich* formuliert werden?

Zu jeder Stelle n gibt es ein $k \geq n$ mit $a \in A_k$.

Zu jeder Stelle n ist $a \in \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ und damit $a \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$.

Die Umkehrung liegt auf der Hand.

Zusammengefasst:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$$ Die Elemente sind in nur endlich vielen A_i nicht enthalten.

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$ Die Elemente sind in unendlich vielen A_i enthalten.