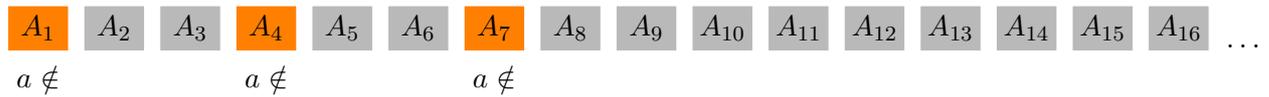


Limes inferior von Mengen

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.

Wir bilden die Menge aller Elemente, die in fast allen A_i enthalten sind,
d. h. diese Elemente sind (höchstens) in nur endlich vielen A_i nicht enthalten.



Diese Menge wird mit $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ bezeichnet.

Da ein Element a dieser Menge in nur endlich vielen A_i nicht enthalten ist, gibt es eine Stelle n (hier 8),

so dass für alle $k \geq n$ gilt: $a \in A_k$. Damit liegt a im Durchschnitt $a \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

Werden alle Stellen berücksichtigt, so erhalten wir $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

Die Umkehrung ist noch zu zeigen.

Sei also $a \in \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Dann gibt es ein n mit $a \in \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$. Ab der Stelle n gilt daher $a \in A_k$.

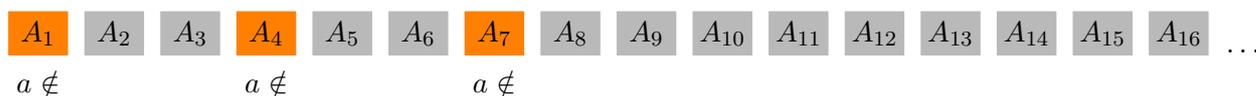
Für $1 \leq k < n$ (endl. viele) wissen wir nichts. Jedenfalls ist a in fast allen A_i enthalten.

Limes superior von Mengen

Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen.

Wir bilden die Menge aller Elemente, die in unendlich vielen A_i enthalten sind.

Zwei Beispiele:



Diese Menge wird mit $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$ bezeichnet.

Offensichtlich gilt: $\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \subseteq \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n$,

denn wenn a in nur endlich vielen A_i nicht enthalten ist, dann ist es in unendlich vielen A_i enthalten.

Sei das Element a in unendlich vielen A_i enthalten.

Wie kann das ohne *unendlich* formuliert werden?

Zu jeder Stelle n gibt es ein $k \geq n$ mit $a \in A_k$.

Zu jeder Stelle n ist $a \in \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ und damit $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$.

Die Umkehrung liegt auf der Hand.

Zusammengefasst:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{Die Elemente sind in nur endlich vielen } A_i \text{ nicht enthalten.}$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{Die Elemente sind in unendlich vielen } A_i \text{ enthalten.}$$