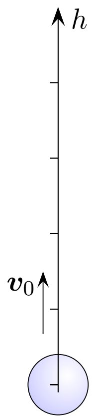
1. Senkrechter Wurf
2. Schiefe Ebene ohne Reibung
3. Freier Fall
4. Schräger Wurf
5. Fadenpendel
6. Prinzip der kleinsten Wirkung
7. Variationsrechnung
8. Senkrechter Wurf $\int_0^{t_{\text{ges}}} (E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})\, dt$
9. Horizontales Federpendel
10. Vertikales Federpendel
11. Rotierender Stab
12. Legendre-Transformation
13. Legendre-Transformation Beispiele
14. Hamilton-Funktion
15. Hamiltonsche Bewegungsgleichungen Schiefe Ebene
16. Fadenpendel Lagrange- und Hamilton-Funktion
17. Hamiltonsche bzw. kanonische Bewegungsgleichungen

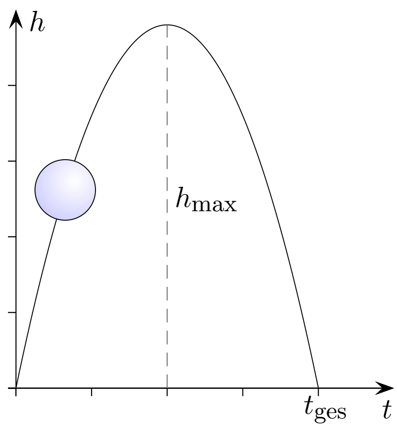
$\uparrow$ Senkrechter Wurf

Beim senkrechten Wurf wird ein Körper mit einer Anfangsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}_0$ senkrecht (vertikal) nach oben geworfen. Während der Bewegung wirkt die Schwerkraft (Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$) auf den Körper und verlangsamt ihn, bis er seine maximale Höhe erreicht. Danach fällt der Körper beschleunigt zurück zur Erde.



$\boldsymbol{v}(t)$	$= \dot{s}(t)$	
$\boldsymbol{a}(t)$	$= \dot{\boldsymbol{v}}(t)$	Bei gleichmäßiger Beschleunigung ist $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{a}$.
$\boldsymbol{v}(t)$	$= \int \boldsymbol{a}\,dt = \boldsymbol{a}t$	gleichmäßige Beschleunigung
$\boldsymbol{s}(t)$	$= \int \boldsymbol{v}(t)\,dt = \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2$	Für $t = 0$ ist $\boldsymbol{s}(0) = 0$ und $\boldsymbol{v}(0) = 0$.
$\boldsymbol{s}(t)$	$= \frac{1}{2}\boldsymbol{a}t^2 + \boldsymbol{v}_0 t + s_0$	Weg-Zeit-Gesetz, allgemein
$\boldsymbol{v}(t)$	$= at + \boldsymbol{v}_0$	Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz

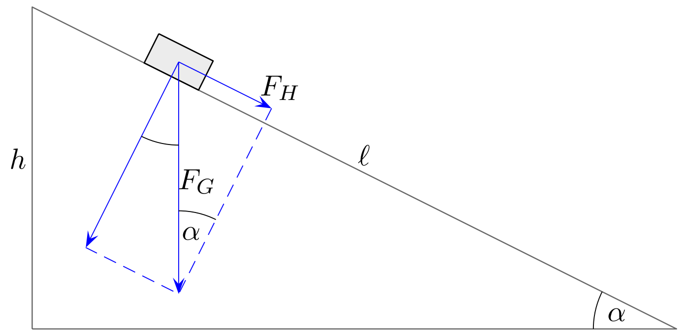
$\boldsymbol{v}(t)$	$= \boldsymbol{v}_0 - gt$	Geschwindigkeiten unterschiedlicher Richtung überlagern sich.
$h(t)$	$= \boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$	integriert, $h(0) = 0$
0	$= \boldsymbol{v}_0 - gt$	Zeit bis zu Maximum (Scheitel)
t	$= \boldsymbol{v}_0/g$	halbe Flugdauer
t_{ges}	$= \boldsymbol{2}v_0/g$	Gesamtzeit, $\boldsymbol{s}(t)$ ist eine Parabel
$h_{\max}$	$= h(\boldsymbol{v}_0/g) = \frac{\boldsymbol{v}_0^2}{2g}$	
t_{ges}	$= 2 \cdot \sqrt{\frac{2h_{\max}}{g}}$	durch Einsetzen zu verifizieren



Beim senkrechten Wurf ist für jeden Zeitpunkt die Summe der kinetischen und potentiellen Energie konstant, $E_{\mathrm{kin}} + E_{\mathrm{pot}} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + mgh = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}_0^2$.
Hiervon überzeugt man sich durch Einsetzen von $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 - gt$ und $h(t) = \boldsymbol{v}_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.

↑ Schiefe Ebene ohne Reibung

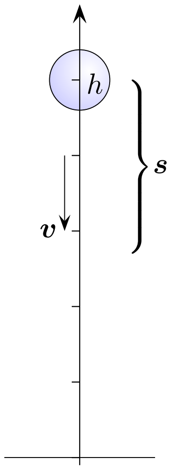
Die schiefe Ebene diente Galileo Galilei 1564-1642 dazu, die Bewegung im Vergleich zum freien Fall zu verlangsamen und so einer genaueren Beobachtung zugänglich zu machen.



$F_G = mg$	Gewichtskraft
$F_H = F_G \cdot \sin\alpha$	Hangabtriebskraft beachte: Schenkel stehen senkrecht aufeinander.
$F_H = m\boldsymbol{a}$	
$\cancel{m}\boldsymbol{a} = \cancel{m}g \cdot \sin\alpha$	
$\boldsymbol{v}(t) = \int_0^t \boldsymbol{a}\,dt = gt\,\sin\alpha$	
$\boldsymbol{s}(t) = \int_0^t \boldsymbol{v}\,dt = \frac{1}{2}gt^2\,\sin\alpha$	
$\ell = \frac{1}{2}gT^2\,\sin\alpha$	Länge ℓ und Durchlaufzeit T eingesetzt
$= \frac{1}{2}gT^2\,\frac{h}{\ell}$	$\Longrightarrow\ \ell^2 = \frac{1}{2}ghT^2 \ \Longrightarrow\ T = \sqrt{\frac{2}{gh}}\,\ell$
	Bei jeweils gleicher Höhe steigt die Laufzeit T proportional zur Länge ℓ an.
$\boldsymbol{v}(T) = gT\,\sin\alpha = gT\,\frac{h}{\ell}$	
$= g\sqrt{\frac{2}{gh}}\,h = \sqrt{2gh}$	T eingesetzt und vereinfacht
$E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}}$	kürzere Herleitung
$\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}\boldsymbol{v}^2$	
$\boldsymbol{v} = \sqrt{2gh}$	Die Geschwindigkeit des Körpers am Ende der schiefen Ebene hängt nur von der Höhe h und nicht von ihrer Länge ℓ ab.

↑ Freier Fall

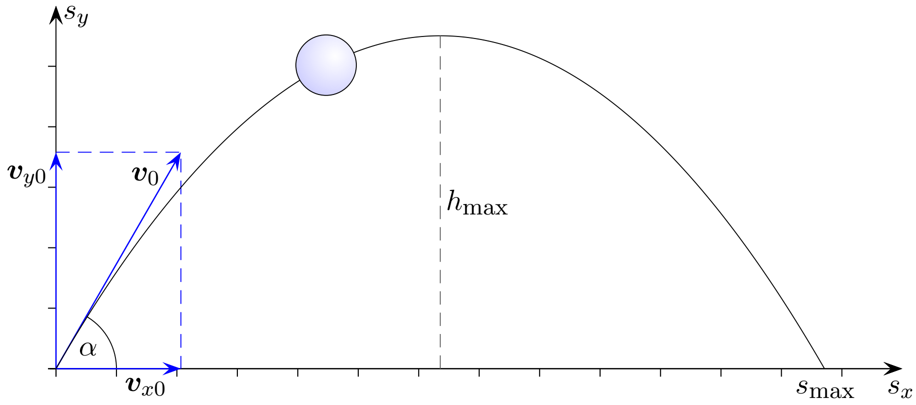
Ein Körper wird aus einer Höhe h fallengelassen. Der freie Fall ist eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ohne Anfangsgeschwindigkeit.



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= gt & \qquad \boldsymbol{v}(0) &= 0 \\
\boldsymbol{s}(t) &= \frac{1}{2}gt^2 & \qquad \boldsymbol{s}(0) &= 0 \\[1ex]
t &= \boldsymbol{v}(t)/g \\
\boldsymbol{s}(t) &= \frac{1}{2}g\,\frac{\boldsymbol{v}(t)^2}{g^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{v}(t)^2}{g} \\
h &= \frac{1}{2}\,\frac{\boldsymbol{v}^2}{g} \\
\boldsymbol{v}^2 &= 2gh \\
\boldsymbol{v} &= \sqrt{2gh} \\
T &= \sqrt{\frac{2h}{g}} & \qquad & \text{Fallzeit, } h = \frac{1}{2}gT^2 \text{ nach } T \text{ umgestellt}
\end{aligned}
$$

Beim freien Fall ist für jeden Zeitpunkt die Summe der kinetischen und potentiellen Energie konstant, $E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 + mg(h - \boldsymbol{s}(t)) = mgh$, d. h. $\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - mg\boldsymbol{s}(t) = 0$, $\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - g\boldsymbol{s}(t) = 0$. Hiervon überzeugt man sich durch Einsetzen von $\boldsymbol{v}(t) = gt$ und $\boldsymbol{s}(t) = \frac{1}{2}gt^2$.

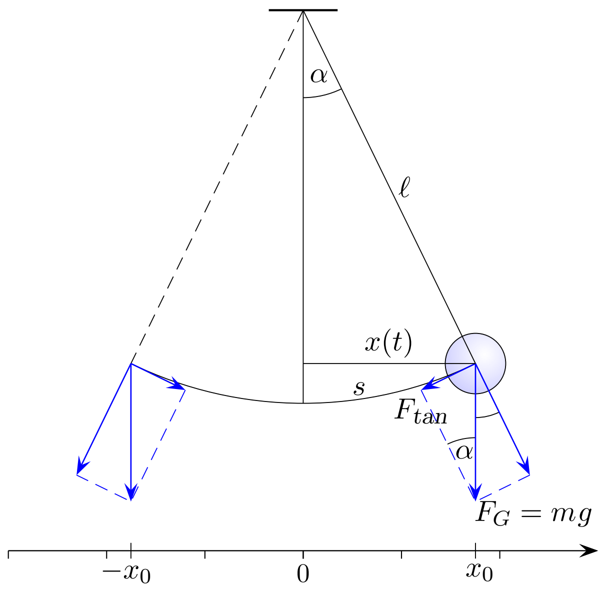
↑ Schräger Wurf



Beim schrägen Wurf wird ein Körper unter einem bestimmten Winkel zur Horizontalen geworfen. Die resultierende Bewegung ist eine Kombination aus gleichförmiger Bewegung in Abwurfrichtung und freiem Fall.

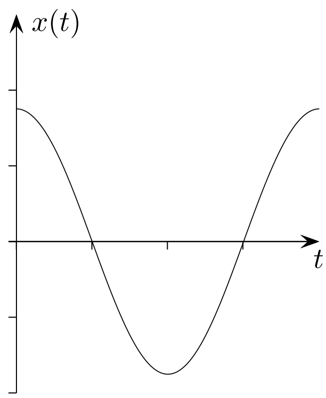
$\boldsymbol{v}_x = \boldsymbol{v}_0 \cos(\alpha)$	Geschwindigkeit	in x-Richtung
$\boldsymbol{v}_y = \boldsymbol{v}_0 \sin(\alpha) - g \cdot t$		in y-Richtung
$\boldsymbol{s}_x = \boldsymbol{v}_0 \cos(\alpha) \cdot t$	Wurfweite	in Abhängigkeit von der Zeit
$\boldsymbol{s}_y = \boldsymbol{v}_0 \sin(\alpha) \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$	Wurfhöhe	$h_0 = 0$
$t_s = \frac{\boldsymbol{v}_0 \sin(\alpha)}{g}$	Steigzeit	Zeit bis zum Scheitel $\quad v_y = 0$
$T = 2 \cdot t_s$	Wurfzeit	
$h_{\text{max}} = \frac{\boldsymbol{v}_0^2 \sin^2(\alpha)}{2g}$	max. Höhe	t_s in s_y eingesetzt
$s_{\text{max}} = \boldsymbol{v}_0 \cos(\alpha) \cdot 2t_s$	max. Weite	$2t_s$ in s_x eingesetzt
$= \frac{\boldsymbol{v}_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$		$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$
$y = \tan(\alpha) \cdot x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{\boldsymbol{v}_0^2 \cos^2(\alpha)}$	Parabelgleichung	$\boldsymbol{s}_x = \boldsymbol{v}_0 \cos(\alpha) \cdot t$ nach t umformen und in s_y einsetzen, zu x und y übergehen $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$
	Anfangshöhe h_0	h_0 zu s_y und h_{max} addieren

↑ Fadenpendel



Experimentell: Die Perioden- oder Schwingungsdauer T (benötigte Zeit für eine Schwingung) ist unabhängig von der Masse. Eine Vervierfachung der Fadenlänge ℓ bewirkt eine Verdopplung der Periodendauer, $T \propto \sqrt{\ell}$.

$$
\begin{aligned}
\sin\alpha &= \frac{F_{\text{tan}}}{F_G} && \text{Beachte den Wechselwinkel, Gewichtskraft } F_G \\
F_{\text{tan}} &= F_G \sin\alpha && \text{tangentiale Rückstellkraft } F_{\text{tan}} \\
&= mg\sin\alpha && \\
&= mg\,\frac{x(t)}{\ell} && \left|\,\sin\alpha = \frac{x(t)}{\ell},\right. \ \text{vorausgesetzt } \alpha \text{ klein, } x(t) \approx s, \ \text{Kreisbogen } s \\
m\ddot{x}(t) &= -mg\,\frac{x(t)}{\ell} && |\,F_{\text{tan}} = ma \quad \text{Der Richtungswechsel wird berücksichtigt.} \\
\ddot{x}(t) &= -\tfrac{g}{\ell}\,x(t) && \text{Bewegungsgleichung} \\
x(t) &= \cos\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\,t && \text{Für } x(t) = \cos t \text{ gilt } \ddot{x}(t) = x(t), \ \text{zweimalige Anwendung der Kettenregel} \\
x(t) &= x_0\cos\sqrt{\tfrac{g}{\ell}}\,t && \text{Amplitude } x_0 \\
T &= 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} &&
\end{aligned}
$$



↑ Prinzip der kleinsten Wirkung

Pierre Maupertuis sprach 1746 als erster von einem allgemeingültigen Prinzip der Natur, extremal oder optimal abzulaufen. Leonhard Euler und Joseph Lagrange klärten in der Mitte des achtzehnten Jahrhunderts, dass solch ein Prinzip die Gültigkeit der Euler-Lagrange- Gleichungen bedeute. In der Mechanik besagt das Prinzip der kleinsten Wirkung, dass ein Körper die Richtung einschlägt, bei der der Energieaufwand (kinetische Energie wird in potenzielle Energie umgewandelt) minimiert wird, genauer $\int_0^{t_{\text{ges}}} (E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})\, dt$ wird minimiert. Hierzu wird die Variationsrechnung benötigt.

↑ Variationsrechnung

Mit dem von Johann Bernoulli 1696 gestellten Brachistochronen-Problem (Auf welcher Kurve gleitet in kürzester Zeit ein Körper reibungsfrei von A nach B?) beschäftigten sich viele Mathematiker (Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Hudde). Die grundlegenden Beziehungen lauten:

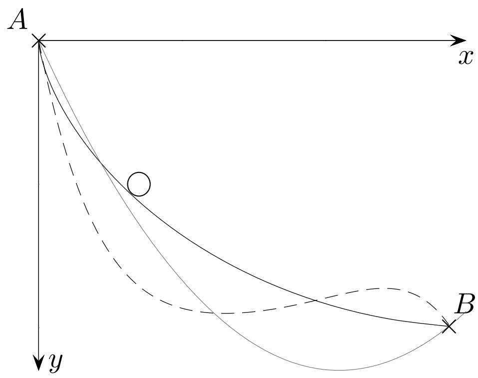
$$v = \frac{ds}{dt} \qquad s \text{ Bogenlänge, } t \text{ Zeit}$$

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\; dx$$

$$v = \sqrt{2gy} \qquad g \text{ Erdbeschleunigung}$$

$$\Longrightarrow dt = \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

$$\Longrightarrow T = \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\; dx$$



Gesucht ist also eine Funktion $y(x)$, die die Zeit minimiert. Für welches $y(x)$ wird das Funktional (Funktionen wird eine Zahl zugeordnet) $S[y] = \int_a^b L(y,\, y')\, dx$ extremal, $L(y,\, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$?

Euler gelang es, für die Lösungsfunktion $y_0(x)$ die Differentialgleichung $L_y(y,\, y') - \frac{d}{dx} L_{y'}(y,\, y') = 0$ aufzustellen.

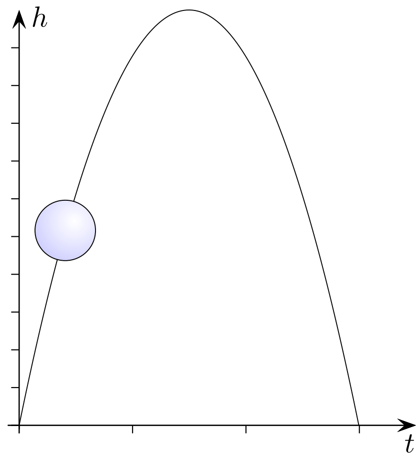
Für das Brachistochronen-Problem erhalten wir mit $L(y,\, y') = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$ die DGL $y' = \sqrt{\frac{k-y}{y}}$ und als Lösung die Parameterdarstellung einer Zykloide.

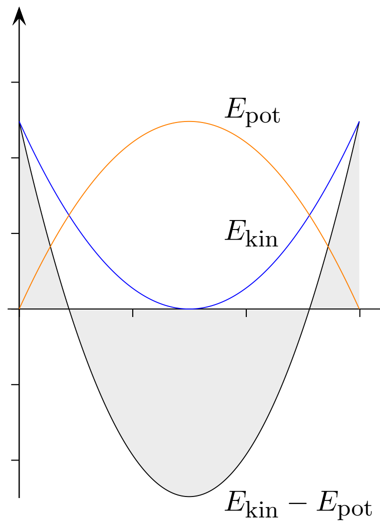
In der Lagrange Mechanik ist die Lagrange-Funktion die Differenz von kinetischer und potentieller Energie, $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = E_{\text{kin}}(q, \dot{q}, t) - E_{\text{pot}}(q, \dot{q}, t)$.

Mit der Euler-Lagrange Gleichung $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0$ kann die Bewegungsgleichung ermittelt werden.

Für den senkrechten Wurf lautet mit $\mathcal{L}(h, \dot{h}, t) = \frac{1}{2} m\dot{h}^2 - mgh$ und $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}} = 0$ die Euler-Lagrange Gleichung $-mg - m\ddot{h} = 0,\ \ddot{h} = -g$. Das ergibt $h(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2$ und mit $h(0) = 0$ und $h(t_{\text{ges}}) = 0$ ist $h(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + \frac{1}{2} gt_{\text{ges}} t = -\frac{1}{2} gt(t - t_{\text{ges}})$ die Parabelgleichung.

↑ Senkrechter Wurf $\int_0^{t_{\text{ges}}} (E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})\, dt$

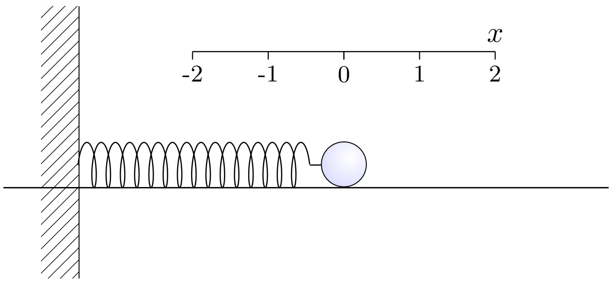




Mit $\frac{1}{t_{\text{ges}} - 0} \int_0^{t_{\text{ges}}} (E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}})\, dt$ wird der ↑ Mittelwert der Differenzfunktion berechnet.

Das Euler-Lagrange-Verfahren strebt eine gleichmäßige Verteilung von kinetischer und potentieller Energie an.

↑ Horizontales Federpendel

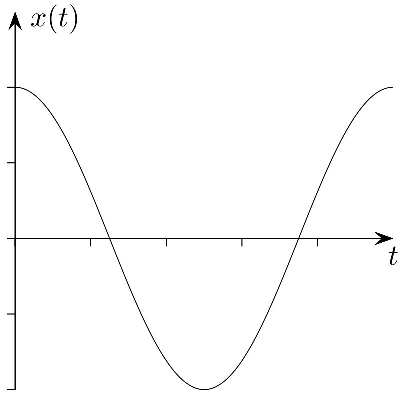


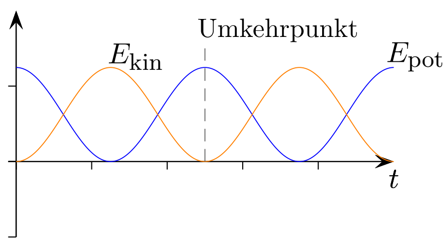
Bei diesem Federpendel ist die Auslenkung $x(t)$ der horizontale Abstand zur Ruhelage $x = 0$. Nach einer anfänglichen Auslenkung schwingt die Kugel im reibungsfreien Fall zwischen zwei Umkehrpunkten periodisch hin und her.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x,\dot{x},t) &= E_{\text{kin}}(x,\dot{x},t) - E_{\text{pot}}(x,\dot{x},t) = T - U \\
&= \tfrac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 - \tfrac{1}{2}Dx^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{x}^2 - \tfrac{1}{2}Dx^2 \qquad \text{Federkonstante } D,\ [D] = \frac{\text{N}}{\text{m}} \\
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}} &= 0 \\
-Dx - m\ddot{x} &= 0 \\
\ddot{x} &= -\frac{D}{m}x \qquad \text{infrage kommen eine sin- oder cos-Funktion} \\
x(t) &= x_{\max}\cos(\omega t),\ \ \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,\ \ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}}
\end{aligned}$$

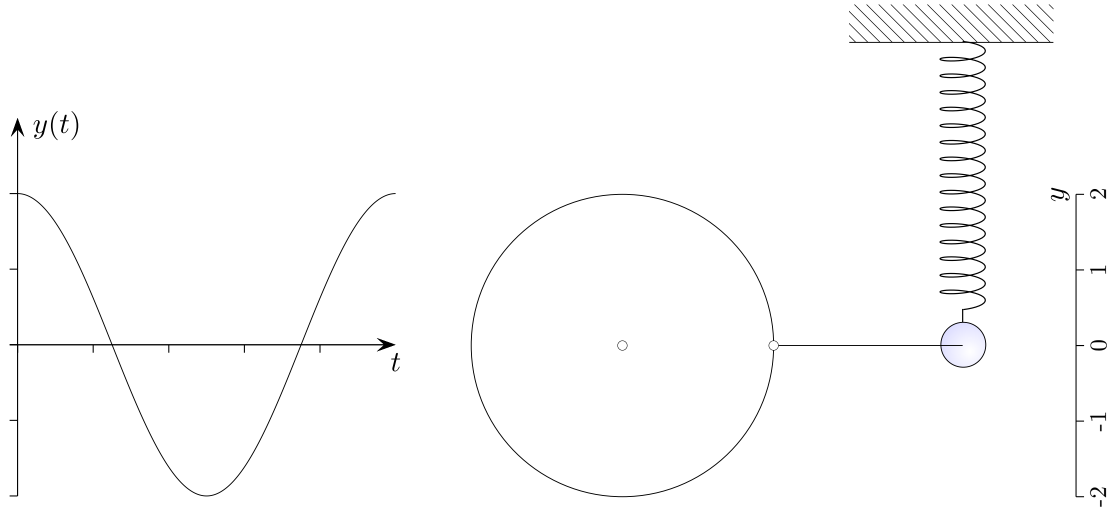
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}(t) &= -x_{\max}\omega\cdot\sin(\omega t) \\
\boldsymbol{a}(t) &= -x_{\max}\omega^2\cdot\cos(\omega t) \\
E_{\text{kin}}(t) &= \tfrac{1}{2}Dx_{\max}^2\cdot\sin^2(\omega t) \\
E_{\text{pot}}(t) &= \tfrac{1}{2}Dx_{\max}^2\cdot\cos^2(\omega t) \\
E_{\text{kin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) &= \ldots = \tfrac{1}{2}Dx_{\max}^2
\end{aligned}$$





↑ Vertikales Federpendel



Das Federpendel mit der Masse m befindet sich in der Ruhelage, wenn sich Gewichtskraft und Spannkraft im Gleichgewicht befinden. Die Auslenkung $y(t)$ ist der vertikale Abstand zur Ruhelage. Nach einer Auslenkung zum Zeitpunkt $t = 0$ schwingt die Masse zwischen zwei Umkehrpunkten periodisch hin und her.

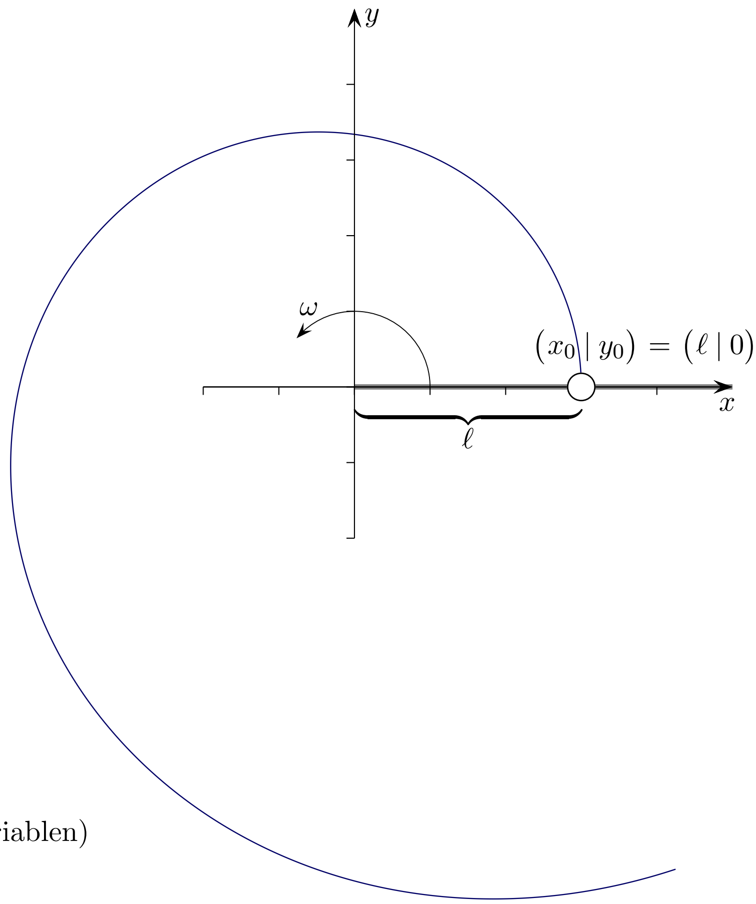
$$\begin{aligned}
m\ddot{y} &= -Dy \\
\ddot{y} &= -\frac{D}{m}y \\
y(t) &= y_{\max}\cos(\omega t), \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f,\ \ f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{D}{m}} \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\ \ T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}
\end{aligned}$$

Für die rechnerische Erfassung ist es unerheblich, ob das Federpendel vertikal oder horizontal schwingt.

Die Projektion der Kreisbewegung einer mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$ rotierenden Scheibe verläuft synchron zur Bewegung der schwingenden Feder.

↑ Rotierender Stab

Ein Teilchen mit der Masse m kann sich nur entlang eines Stabes bewegen, der mit einer Winkelgeschwindigkeit ω rotiert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das Teilchen im Abstand ℓ vom Koordinatenursprung in Ruhe.



1. Koordinatensystem wählen
   Polarkoordinaten (r, φ)
   $x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

2. Zwangsbedingung aufstellen
   $\varphi = \omega t$ (reduziert die Anzahl der Variablen)

3. verallgemeinerte Koordinaten wählen
   $q_1 = r \qquad x = r\cos(\omega t) \qquad y = r\sin(\omega t)$

4. $\mathcal{L}$ aufstellen
   $\mathcal{L}(r, \dot r, t) = E_{\text{kin}}(r, \dot r, t) - E_{\text{pot}}(r, \dot r, t) = T - U$
   $U = 0 \qquad T = \frac{m}{2}\boldsymbol{v}^2 = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) \qquad \mathcal{L} = \frac{m}{2}\left[\big(\dot r\cos(\omega t) - r\sin(\omega t)\big)^2 + \big(\quad \dots \quad\big)^2\right] = \frac{m}{2}(\dot r^2 + \omega^2 r^2)$

5. Euler-Lagrange Gleichung anwenden

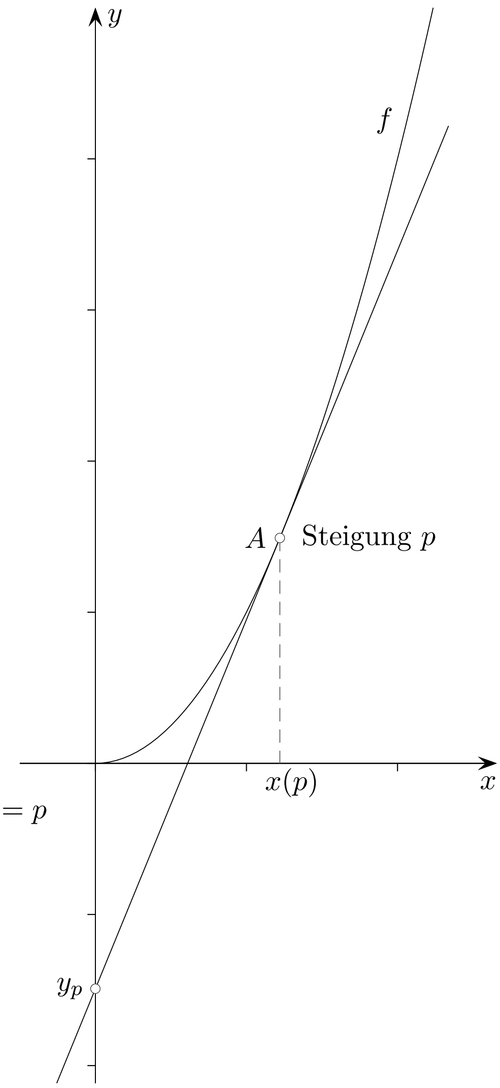
$$\begin{aligned} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot r} &= 0 \\ \cancel{m}\omega^2 r - \cancel{m}\frac{d}{dt}\dot r &= 0 \\ \ddot r &= \omega^2 r \end{aligned}$$

6. DGL lösen

$$\begin{aligned} r(t) &= e^{\lambda t} \quad \text{Ansatz} && \cancel{e^{\lambda t}}\lambda^2 = \omega^2\cancel{e^{\lambda t}} && \lambda = \pm\omega \\ r(t) &= Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t} && \dot r(t) = Ae^{\omega t}\omega - Be^{-\omega t}\omega && \\ r(0) &= \ell = A + B && \dot r(0) = 0 = A\cancel{\omega} - B\cancel{\omega} && \text{Teilchen ruht} \\ &\Longrightarrow A = B = \frac{\ell}{2} && r(t) = \frac{\ell}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) && \\ r(t) &= \ell\cosh\omega t && && \end{aligned}$$

↑ Legendre-Transformation

Die Legendre-Transformation wird verwendet, um eine Funktion $f(x)$ in eine andere Funktion $\widetilde{f}(p)$ mit einer anderen Variablen umzuwandeln, die dieselben Informationen enthält wie die ursprüngliche Funktion. Es ist eine Möglichkeit, die Informationen einer Funktion auf eine andere, manchmal nützlichere oder bequemere Weise darzustellen. Die zweifache Legendre-Transformation ergibt wieder die ursprüngliche Funktion, $\widetilde{\widetilde{f}}(x) = f(x)$.
Die Transformation der Lagrange-Funktion führt zur hamiltonschen Mechanik.



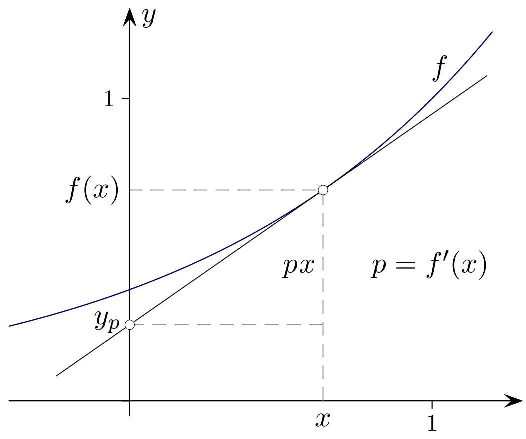
Die Legendre-Transformation einer monotonen Funktion f ist denkbar einfach. Die Bezeichnung der neuen Variablen sei p. Wir suchen auf dem Graphen von f die Stelle $x(p)$ mit der Steigung p und berechnen den y-Achsenabschnitt y_p der Tangente in A. Die Legendre-Transformierte ist die Zuordnung $p \to -y_p$.

$$\begin{aligned} y &= p(x - x(p)) + f(x(p)) && |x(p) \text{ ist die Lösung von } f'(x) = p \\ y_p &= -px(p) + f(x(p)) && |x = 0 \\ \widetilde{f}(p) &= px(p) - f(x(p)) && \text{Legendre-Transformierte} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ p = f'(x) &= 2x \\ x(p) &= \frac{p}{2} && \text{Umkehrfunktion} \\ \widetilde{f}(p) &= px(p) - f(x(p)) \\ &= \frac{p^2}{2} - \frac{p^2}{4} = \frac{p^2}{4} \end{aligned}$$

Die Funktion f muss entweder konvex oder konkav sein, da die Umkehrfunktion der Ableitung ermittelt werden muss.

↑ Legendre-Transformation Beispiele



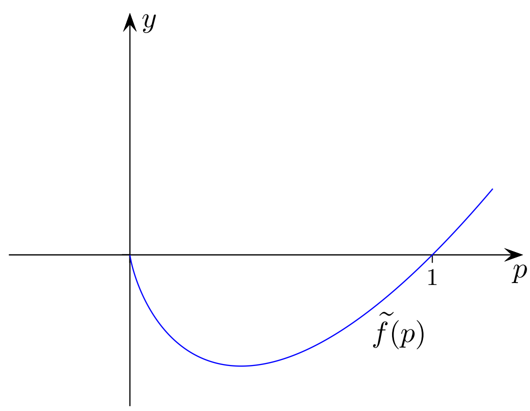
Die Bezeichnung der neuen Variablen sei p.
Wir suchen auf dem Graphen von f die Stelle $x(p)$ mit der Steigung p und berechnen den y-Achsenabschnitt y_p der zugehörigen Tangente. Die Legendre-Transformierte $\widetilde{f}(p)$ ist die Zuordnung $p \to -y_p$.

$$\begin{aligned} y_p &= f(x) - px \\ \widetilde{f}(p) &= px - f(x) && |x = x(p) \text{ ist die Lösung von } f'(x) = p \\ \widetilde{f}(p) &= px(p) - f(x(p)) && \text{Legendre-Transformierte} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x-1} \\ p = f'(x) &= e^{x-1} \\ \ln p &= \ln e^{x-1} = x - 1 && p = e^{x-1} \text{ nach } x \text{ auflösen} \\ x &= \ln p + 1 && \text{Umkehrfunktion der Ableitung} \\ \widetilde{f}(p) &= px - f(x) && x \text{ eingesetzt, ergibt die Legendre-Transformierte} \\ &= p(\ln p + 1) - p = p \ln p \end{aligned}$$

Die Rücktransformation führt zur Ausgangsfunktion.

$$\begin{aligned} \widetilde{f}(p) &= p \ln p \\ \widetilde{f}'(p) &= \ldots = \ln p + 1 = x && \text{Produktregel} \\ \ln p &= x - 1 && \text{nach } p \text{ auflösen} \\ p &= e^{x-1} \\ \widetilde{\widetilde{f}}(x) &= xp - \widetilde{f}(p) \\ &= xe^{x-1} - e^{x-1}(x-1) \\ &= e^{x-1} \end{aligned}$$



↑ Hamilton-Funktion

Was ist die Legendre-Transformierte g einer Funktion $f(x,y)$ mit zwei Variablen?
Die partiellen Ableitungen seien $u = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $v = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ und $x = x(u)$ und $y = y(v)$ deren Umkehrungen.

$g(u,y) = ux(u) - f(x(u),y)$ — Die 1. Variable wird geändert.

$g(x,v) = vy(v) - f(x,y(v))$ — Die 2. Variable wird geändert.

$g(u,v) = ux(u) + vy(v) - f(x(u),y(v))$ — Festlegung: Beide Variablen werden (sukzessive) geändert.

Schreibweise in der Lagrange-Mechanik

$\mathcal{L}(q,\dot q)$ $\qquad p = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q}$ Die 2. Variable wird geändert. p heißt verallgemeinerter Impuls.

Die Umkehrung lautet $\dot q = \dot q(q,p)$.

$\mathcal{H}(q,p) = p\dot q(q,p) - \mathcal{L}(q,\dot q(q,p))$

Die Hamilton-Funktion ist die Legendre-Transformierte der Lagrange-Funktion.

Beispiel horizontales Federpendel

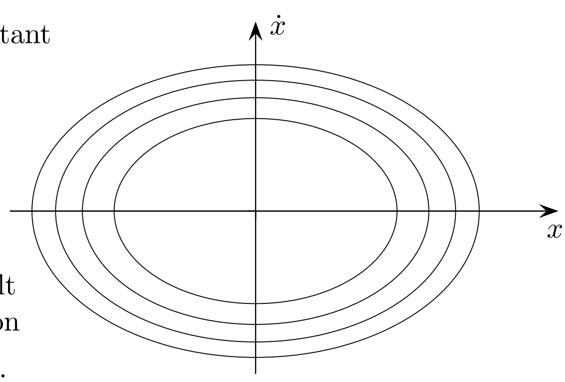
$\mathcal{L}(q,\dot q) = \frac{1}{2}m\dot q^2 - \frac{1}{2}Dq^2$ $\qquad p = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} = m\dot q$ Die Umkehrung lautet $\dot q = \dfrac{p}{m}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(q,p) &= p\dot q - \mathcal{L}\\
&= p\frac{p}{m} - \left[\frac{1}{2}m\frac{p^2}{m^2} - \frac{1}{2}Dq^2\right]\\
&= \frac{p^2}{m} - \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}Dq^2\\
&= \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}Dq^2\\
&= E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \qquad\qquad p = m\dot q
\end{aligned}$$

Satz $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \implies \dfrac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$ $\qquad$ ohne Beweis

Satz $\mathcal{H} = T + U$, wenn die kartesischen Koordinaten nicht von t abhängig sind.

Wenn also $\mathcal{H} \neq \mathcal{H}(t)$ und somit $\dfrac{d\mathcal{H}}{dt} = 0$ ist, dann ist $\mathcal{H}$ konstant und die Gesamtenergie $T + U$ bleibt erhalten.



Mit der Hamilton-Funktion kann ein Phasendiagramm erstellt werden. Zu gegebener Energie E wird der Zusammenhang von Ort und Geschwindigkeit erfasst, $E = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}Dq^2$ (Ellipse).

↑ Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

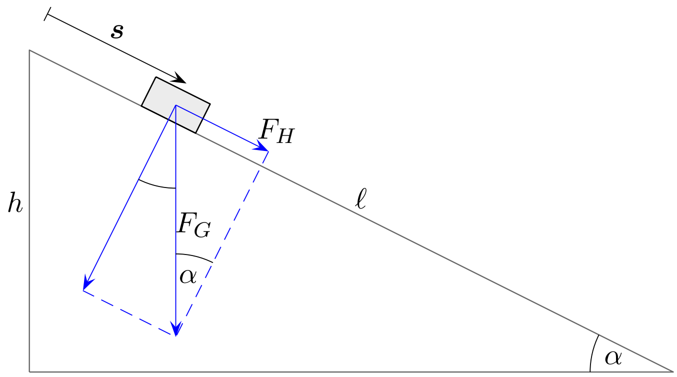
$$\mathcal{H}(q,p) = p\dot{q} - \mathcal{L}(q,\dot{q}) \qquad |\, p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \;\star$$

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \qquad p \text{ ist nur im Term } p\dot{q} \text{ enthalten.}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \quad (= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}) \qquad |\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \dot{p} \qquad \text{siehe } \star$$

Mit den Gleichungen für $\dot{q}$ und $\dot{p}$ kann ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung aufgestellt werden. Diese Überlegungen können auf beliebig viele Variablen q_i und $\dot{q}_i$ ausgedehnt werden.

↑ Schiefe Ebene Lagrange- und Hamilton-Funktion



$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = T - U \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy && |\, x = \boldsymbol{s}\cos\alpha,\;\; y = h - \boldsymbol{s}\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{s}}^2 - mg(h - \boldsymbol{s}\sin\alpha) && |\, \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\boldsymbol{s}}^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \dot{\boldsymbol{s}}^2 \\ \mathcal{L}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}}) &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{s}}^2 - mgh + mg\boldsymbol{s}\sin\alpha \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{s}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{s}}} &= 0 \\ \cancel{m}g\sin\alpha - \cancel{m}\ddot{\boldsymbol{s}} &= 0 \\ \ddot{\boldsymbol{s}} &= g\sin\alpha && \text{wie gehabt } \boldsymbol{s}(t) = \frac{1}{2}gt^2\sin\alpha \quad \text{zweimaliges Integrieren} \end{aligned}$$

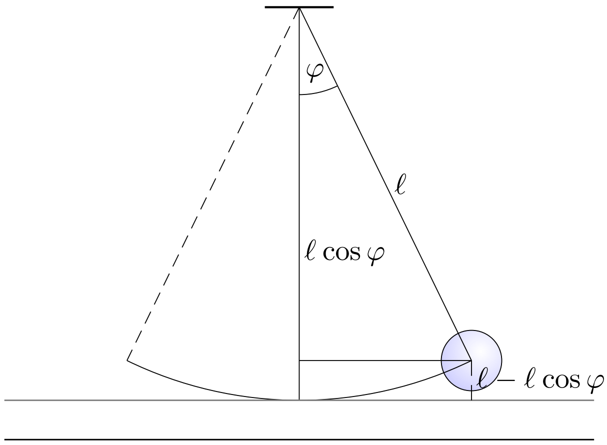
$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\boldsymbol{s},\dot{\boldsymbol{s}}) &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{s}}^2 - mgh + mg\boldsymbol{s}\sin\alpha && |\, p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{s}}} = m\dot{\boldsymbol{s}} \quad \text{Die Umkehrung lautet } \dot{\boldsymbol{s}} = \frac{p}{m}. \\ \mathcal{H}(p,\boldsymbol{s}) &= p\dot{\boldsymbol{s}} - \mathcal{L} \\ &= m\dot{\boldsymbol{s}}\dot{\boldsymbol{s}} - \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{s}}^2 + mgh - mg\boldsymbol{s}\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{s}}^2 + mg(h - \boldsymbol{s}\sin\alpha) = \frac{p^2}{2m} + mg(h - \boldsymbol{s}\sin\alpha) = T + U = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \end{aligned}$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen

$$\dot{\boldsymbol{s}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m} \implies \ddot{\boldsymbol{s}} = \frac{\dot{p}}{m}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{s}} = mg\sin\alpha \qquad \text{eingesetzt ergibt erneut } \ddot{\boldsymbol{s}} = g\sin\alpha$$

↑ Fadenpendel Lagrange- und Hamilton-Funktion



$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = T - U \\
&= \frac{1}{2} m \dot{\boldsymbol{v}}^2 - mg\ell(1-\cos\varphi) \\
\mathcal{L}(\varphi,\dot\varphi) &= \frac{1}{2} m\ell^2\dot\varphi^2 - mg\ell(1-\cos\varphi) && \mid v = \ell\dot\varphi \quad \text{direkt einsehbar}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} &= 0 \\
\cancel{m} g\ell\sin\varphi + \cancel{m}\ell^2\ddot\varphi &= 0 \qquad \mid \sin\varphi \approx \varphi && \text{Approximation für kleine Auslenkungswinkel} \\
\ddot\varphi + \frac{g}{\ell}\varphi &= 0 && \varphi = \varphi_0 \cos\sqrt{\frac{g}{\ell}}t
\end{aligned}
$$

Hamiltonsche Bewegungsgleichungen, $\varphi = q$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(q,\dot q) &= \frac{1}{2} m\ell^2\dot q^2 - mg\ell + mg\ell\cos q \\
\mathcal{H}(q,p) &= p\dot q - \mathcal{L}(q,\dot q) && \mid p = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot q} = m\ell^2\dot q \text{ (generalisierter Impuls)} \quad \Longrightarrow \\
\dot q &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p} = \frac{p}{m\ell^2} \\
\dot p &= -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q} = -mg\ell\sin q && \Longrightarrow \quad \ddot q = \frac{\dot p}{m\ell^2} = -\frac{g}{\ell}\sin q
\end{aligned}
$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung ist eine Differentialgleichung 2. Ordnung. Diese kann in ein Differentialgleichungssystem 1. Ordnung überführt werden. Das sind die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen.

↑ Hamiltonsche bzw. kanonische Bewegungsgleichungen

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} = T(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) - U(\boldsymbol{q},t) \qquad |\ \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots) \quad \text{generalisierte Variablen}$$

$$\mathcal{H} = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} - \mathcal{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},t) \qquad |\ \boldsymbol{p} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} \quad \text{generalisierte Impulse, } \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}} = \sum p_k\dot{q}_k$$

$$\mathcal{H}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t) - \mathcal{L}(\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t),t)$$

Die Umkehrung $\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p},t)$ wird in $\mathcal{H}$ eingesetzt.
Die generalisierten Geschwindigkeiten werden somit durch die Impulse ersetzt.

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{p}} \qquad |\ \text{d. h. } \dot{q}_k = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\boldsymbol{q}}$$