Hyperreelle Zahlen

Leibniz rechnete mit Differentialen. Deren eingängige Fehl-Interpretation als unendlich kleine Größen durch die Brüder Bernoulli und l'Hospital trug zur raschen Verbreitung des Kalküls bei. Infinitesimale Zahlen (also größer als null, aber kleiner als jede positive reelle Zahl) gibt es unter den reellen Zahlen nicht. Das sah auch Leibniz so. Im 19. Jh. wurde die Analysis durch eine Präzisierung des Grenzwertbegriffs durch Bolzano, Cauchy und Weierstraß auf sichere Füße gestellt. Mathematik-Historiker bemühen sich, auch anhand von Skripten, die Jahrhunderte unentdeckt blieben, Leibniz Vorstellungen zur Grundlegung der Analysis zu ergründen. Diese scheinbare Verschwommenheit regte zu einer großen Fülle an Veröffentlichungen an. Mathematiker versuchten und bemühen sich auch noch in der Gegenwart, die vermutete Diskrepanz zwischen den unendlich kleinen Größen und der offensichtlichen Effektivität des Kalküls zu eruieren.
Im 20. Jh. gelang es, den Körper der reellen Zahlen so zu erweitern, dass nun auch in einfacher Weise mit unendlich kleinen und großen Zahlen gerechnet werden kann und zwar in einer Weise, die zur Rechnung mit Differentialen fast deckungsgleich ist. Die dahinterliegende Konstruktion dieser hyperreellen Zahlen $^*\mathbb{R}$ geht weit über das Wissen des 17. Jh. hinaus.
Man nehme die Menge aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ und definiere auf dieser Menge eine geeignete Äquivalenzrelation[1] (Anfängliches von Schmieden/Laugwitz 1958). Der hyperreelle Zahlbereich ist die Menge aller Klassen. Wie üblich, wird mit den Repräsentanten gerechnet.
$\varepsilon = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ \dots)$ ist kleiner als jede (in $^*\mathbb{R}$ eingebettete) reelle Zahl $a = (a, a, a, a, \dots)$, da gliedweise verglichen wird und bis auf höchstens endlich viele Anfangskomponenten von ε schließlich alle weiteren Komponenten kleiner als a sind. $\varepsilon < a$, fast alle Komponenten von ε sind kleiner als die Komponenten von a. ε ist unendlich klein, kurz $\varepsilon \approx 0$, siehe nächste Seite. Entsprechend stellt $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine unendlich große (infinite) Zahl dar, fast alle Folgenglieder sind größer als jede vorgegebene reelle Zahl. In $^*\mathbb{R}$ gilt dann:
$0{,}\overline{9} = (0{,}9; 0{,}99; 0{,}999; 0{,}9999; \dots) < (1, 1, 1, 1, \dots) = 1$, desgleichen $0{,}\overline{3} < \frac{1}{3}$.
Die Differenz (gerechnet wird komponentenweise) ist unendlich klein (infinitesimal):

$$\tfrac{1}{3} - 0{,}\overline{3} = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \dots) - (0{,}3; 0{,}33; 0{,}333; 0{,}3333; \dots) = (0{,}0\overline{3}; 0{,}00\overline{3}; 0{,}000\overline{3}; \dots)$$

Ableitung von $f(x) = x^2$ an der Stelle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx}, \qquad dx \approx 0\\ &= \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx}\\ &= 2x + dx \approx 2x, \qquad \approx \text{ entspricht dem scheinbar widersprüchlichen Setzen von } dx = 0.\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ist der Übergang zur reellen Zahl, die sogenannte Bildung des Standardteils. Bei ausführlicher Schreibweise wird das Rechnen mit (Null-)Folgen sichtbar.

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{[(x,x,x,x,\dots) + (1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ \dots)]^2 - (x^2,x^2,x^2,x^2,\dots)}{(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ \dots)}, \qquad (1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{4},\tfrac{1}{5},\ \dots) \approx 0\\ &= \dots\\ &= (2x+1, 2x+\tfrac{1}{2}, 2x+\tfrac{1}{3}, 2x+\tfrac{1}{4}, \dots) \approx 2x\end{aligned}$$

Der Realteil einer hyperreellen Zahl ist somit der Grenzwert dieser Folge.
Die Ableitung $f'(x)$ ist der Standardteil des Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$.

[1] Die Rechenregeln für einen angeordneten Körper sollen erfüllt sein.

Zur Stetigkeit

Mit einer stetigen Funktion verbinden wir die Vorstellung, dass sich $f(x)$ nur ganz wenig ändert, wenn man x nur ganz wenig ändert.

Für $\alpha, \beta \in {}^*\mathbb{R}$ ist α unendlich nahe bei bzw. infinitesimal benachbart zu β, kurz $\alpha \approx \beta$,
falls $\alpha - \beta$ infinitesimal ist, das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|\alpha - \beta| < \frac{1}{n}$.
Für die zugehörigen Folgen bedeutet das: $|\alpha_n - \beta_n| < \frac{1}{n}$ für fast alle $i \in \mathbb{N}$.

$f(x) = x^2$ ist stetig in a, wenn aus $x \approx a$ stets $f(x) \approx f(a)$ folgt[1].

Eine unendlich kleine Änderung des x-Wertes bewirkt höchstens eine unendlich kleine Änderung des Funktionswertes.

Aus $x \approx a$ folgt:

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) &= (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) + (h_1, h_2, h_3, h_4, \dots), && (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Nullfolge} \\
(x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2, \dots) &= ((a_1 + h_1)^2, (a_2 + h_2)^2, (a_3 + h_3)^3, (a_4 + h_4)^2, \dots) \\
&= (a_1^2, a_2^2, a_3^2, a_4^2, \dots) + \text{ Nullfolge}, && \text{d.h.} \\
x^2 &\approx a^2
\end{aligned}$$

Wir erkennen hierin das Standard-Stetigkeitskriterium $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ wieder.

[1] $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird durch $f\big((a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)\big) = (f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), \dots)$ auf ${}^*\mathbb{R}$ fortgesetzt.

Das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$

alternative Schreibweise

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left[\{x\}+\left\{\frac{1}{n}\right\}\right]^2-\{x^2\}}{\left\{\frac{1}{n}\right\}}, \qquad \left\{\tfrac{1}{n}\right\} = (1,\, \tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{3},\, \tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{5},\, \dots) \approx 0$$

$$= \dots$$

$$= 2x + \left\{\tfrac{1}{n}\right\} \approx 2x \qquad 2x = \{2x\} = (2x,\, 2x,\, 2x,\, 2x,\, \dots)$$

Ist die Folge $(\frac{2n-1}{4-n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent?

Sei $\Omega = \{n\} = (1,\, 2,\, 3,\, 4,\, \dots)$ eine unendlich große Zahl.

$$\frac{2\Omega-1}{4-\Omega} = \frac{2-\frac{1}{\Omega}}{\frac{4}{\Omega}-1} \approx -2$$

ausführlich

$$\frac{\{2\}\{n\}-\{1\}}{\{4\}-\{n\}} = \frac{\{2\}-\frac{\{1\}}{\{n\}}}{\frac{\{4\}}{\{n\}}-\{1\}} \approx -2$$

das entspricht

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{4-n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{4}{n}-1} = -2$$

In ${}^*\mathbb{R}$ wird mit Folgen als Ganzes gerechnet, in $\mathbb{R}$ rechnen wir mit Folgen gliedweise.
Die Folgen, genauer deren Äquivalenzklassen, werden abgekürzt mit
$1,\, 2,\, 3,\, \sqrt{2},\, \pi,\, \dots, a,\, b,\, \dots,\, \alpha,\, \beta,\, \dots,\, dx,\, dy,\, \Omega$ und sind beim Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ nicht mehr erkennbar. Dass auch mit unendlich kleinen und unendlich großen Zahlen in der bekannten Weise addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden kann, ist nicht offensichtlich.
Es scheint, als wäre $(1, 0, 1, 0, \dots) \cdot (0, 1, 0, 1, \dots) = 0$, ohne dass einer der Faktoren null ist.
Die Äquivalenzrelation muss daher so modifiziert werden, dass ein Faktor null ist. Dies gelang erst im 20. Jh., als Ergebnisse der Mengenlehre wie das Zornsche Lemma vorlagen.

Unter anderen plädieren Baumann, Kuhlemann, Bedürftig für einen Einstieg in die Analysis mit hyperreellen Zahlen und heben insbesondere die Exaktheit dieser Theorie hervor. Der in Lehrplänen geforderte propädeutische Grenzwertbegriff erscheint ihnen suspekt.

Mengensysteme (Filter) $\mathcal{F}$ und $\mathcal{U}$

Folgen, die höchstens in endlich vielen Gliedern verschieden sind, sollten als gleich (äquivalent) betrachtet werden: $\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \neq b_n\} = \overline{\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = b_n\}}$ ist endlich.

Wir betrachten nun die Menge $\mathcal{F}$ aller Teilmengen von $\mathbb{N}$, deren Komplement endlich ist, die sogenannten koendlichen Teilmengen. Damit ist: $\{a_n\} \sim \{b_n\} \iff \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = b_n\} \in \mathcal{F}$

Es gilt $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Mit zwei Mengen aus $\mathcal{F}$ ist daher auch deren Schnittmenge in $\mathcal{F}$.
Aus $A \subset B$ folgt $\overline{B} \subset \overline{A}$. Somit gehört mit $A \in \mathcal{F}$ auch jede Obermenge von A zu $\mathcal{F}$, $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

Dieses Mengensystem heißt Filter. Ein Filter, zu dem es keinen echten Oberfilter gibt, nennt man Ultrafilter $\mathcal{U}$. Für jede Teilmenge $A \subset \mathbb{N}$ gilt $A \in \mathcal{U}$ oder $\overline{A} = \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{U}$.

Legt man nun für die Definition der Äquivalenzrelation einen Ultrafilter zugrunde, so wird $^*\mathbb{R}$ zu einem angeordneten Körper.
Für $\alpha \cdot \beta = (1, 0, 1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, 1, \ldots) = 0$ sei α an den Stellen $A \subset \mathbb{N}$ null, β ist es dann an den Stellen $\overline{A} \subset \mathbb{N}$. Ein Faktor ist somit null.

Die Ordnung ist total (partiell liegt auf der Hand).
$*$ Für $\{a_n\} \leq \{b_n\} \iff \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$ gilt $\{a_n\} \leq \{b_n\}$ oder $\{b_n\} \leq \{a_n\}$.

Für den Nachweis wird benötigt:
$**$ Sei $\mathcal{U}$ ein Ultrafilter über $\mathbb{N}$. Dann gilt für $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{N}$:
$A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{U} \implies A_k \in \mathcal{U}$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Sei für $n = 2$ $A_1 \notin U$ und $A_2 \notin U$. Dann ist aber $\overline{A_1} \in U$ und $\overline{A_2} \in U$,
$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} = \overline{A_1 \cup A_2} \in U$ und schließlich $\overline{A_1 \cup A_2} \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset \in U$. ↯
Das Vorgehen kann verallgemeinert werden.

Nachweis für $*$
Sei nun $A := \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$ und $B := \{n \in \mathbb{N} \,|\, b_n \leq a_n\} \in \mathcal{U} \implies A \cup B = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$
Nach $**$ gilt $A \in \mathcal{U}$ oder $B \in \mathcal{U}$. $\square$

Die Ordnung ist transitiv.
$\{a_n\} \leq \{b_n\}$ und $\{b_n\} \leq \{c_n\} \implies \{a_n\} \leq \{c_n\}$

$A := \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \leq b_n\} \in \mathcal{U}$ und $B := \{n \in \mathbb{N} \,|\, b_n \leq c_n\} \in \mathcal{U}$
Dann folgt $A \cap B \subseteq \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \leq c_n\} \in \mathcal{U}$

$\{a_n\} < \{b_n\} \iff \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n < b_n\} \in \mathcal{U}$

Für zwei Zahlen gilt $\{a_n\} < \{b_n\}$ oder $\{a_n\} = \{b_n\}$ oder $\{b_n\} < \{a_n\}$.

Gilt weder $\{a_n\} < \{b_n\}$ noch $\{b_n\} < \{a_n\}$, dann muss
$\emptyset \neq \overline{\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n < b_n\}} \cap \overline{\{n \in \mathbb{N} \,|\, b_n < a_n\}} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = b_n\} \in \mathcal{U}$ sein.

Sei $\{a_n\} \not< \{b_n\}$ und $\{a_n\} \neq \{b_n\}$, dann muss
$\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n \geq b_n\} \cap \overline{\{n \in \mathbb{N} \,|\, a_n = b_n\}} = \{n \in \mathbb{N} \,|\, b_n < a_n\} \in \mathcal{U}$ sein.

Die Existenz eines Ultrafilters wird mit dem Zornschen Lemma begründet.
Die explizite Angabe eines Ultrafilters ist nicht möglich, für das Rechnen in ${}^*\mathbb{R}$ ist das jedoch ohne Belang.

Leibniz' Kalkül
Reelle Zahlen
Grenzwerte, 11. Jg.
Grenzwert
Startseite