Gewichtetes harmonisches Mittel

$s_1 = 480\,\text{km}$ $\qquad$ $s_2 = 180\,\text{km}$

$v_1 = 120\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$ $\qquad$ $v_2 = 90\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

Ein Auto fährt die ersten 480 km mit 120 km/h, weitere 180 km mit 90 km/h.
Berechne die Durchschnittsgeschwindigkeit $\overline{v}$.

Die Strecke s_1 wird in $t_1 = 4$ h durchfahren $(t = s/v)$, s_2 in $t_2 = 2$ h.
Wir erhalten $\overline{v} = \frac{s_1+s_2}{t_1+t_2} = \dfrac{480\text{ km} + 180\text{ km}}{4\text{ h} + 2\text{ h}} = \dfrac{660\text{ km}}{6\text{ h}} = 110\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}}$.

Probe: $110\ \dfrac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 6\text{ h} = 660\,\text{km}$

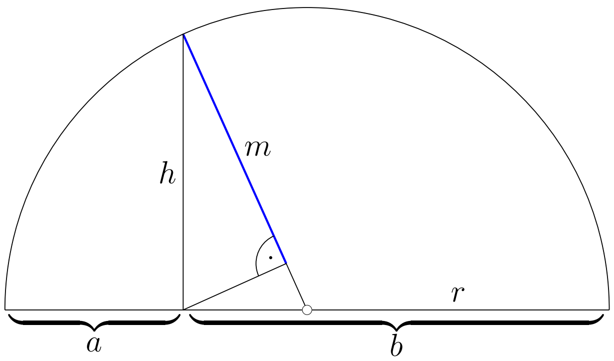
Für eine Formel für $\overline{v}$ werden t_1 und t_2 ersetzt.

$\overline{v} = \dfrac{s_1+s_2}{\frac{s_1}{v_1}+\frac{s_2}{v_2}}$ $\qquad$ Dies kann naheliegend verallgemeinert werden.

Die Formulierung:
$\overline{v}$ ist das mit den Wegstrecken gewichtete harmonische Mittel der Teilgeschwindigkeiten.
lässt Tiefgründiges vermuten.
Jedoch stimmt $\overline{v}$ ersichtlich mit der durchschnittlichen Änderungsrate $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ überein.
Dieser Hintergrund bleibt häufig unerwähnt.

Für $s_1 = s_2$ erhält man durch Kürzen das gewöhnliche harmonische Mittel $\overline{v} = \dfrac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$.

Harmonisches Mittel



Mittelwert von a und b

arithmetisch $\quad r = \frac{a+b}{2}$

geometrisch $\quad h = \sqrt{a \cdot b} \qquad |$Höhensatz $h^2 = a \cdot b$

harmonisch $\quad m = \frac{h^2}{r} \qquad |$Kathetensatz $h^2 = r \cdot m$ oder ähnliche Dreiecke $\frac{m}{h} = \frac{h}{r}$

$$= \frac{2\,a\,b}{a+b} = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$ $|$harmonisches Mittel allgemein $m = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+ ... +\frac{1}{a_n}}$

für $0 < a \neq b: \quad m < h < r$

Das harmonische Mittel von $\dfrac{1}{n-1}$ und $\dfrac{1}{n+1}$ ist $\dfrac{1}{n}$,
daher die Bezeichnung harmonische Reihe.

Genau dann ist c das arithmetische Mittel von a und b,
wenn $\dfrac{1}{c}$ das harmonische Mittel von $\dfrac{1}{a}$ und $\dfrac{1}{b}$ ist.