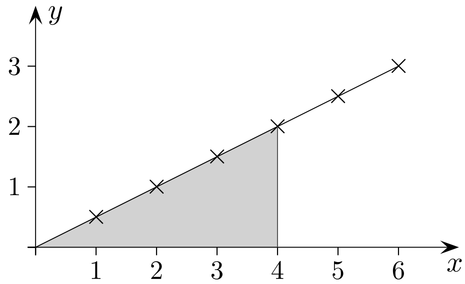
Grafische Auswertung von Messergebnissen

1. *Grundkenntnisse*:
   Zwischen den Größen x und y bestehe die proportionale Beziehung $(y \sim x)$:



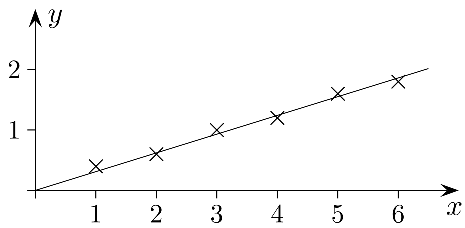
x	1	2	3	4	5	6
y	0,5	1	1,5	2	2,5	3

   genauer: $y = \frac{1}{2}x$.

   Der Faktor $\frac{1}{2}$ $\left(= \frac{y}{x}\right.$ ist die Steigung der Geraden.

   Der Ansatz $y = a\,x$, ein beliebiger Punkt $P(x_o \mid y_o)$,
   z.B. $P(4 \mid 2)$, Einsetzen und Auflösen nach a führen auch zum Ergebnis $a = \frac{1}{2}$.

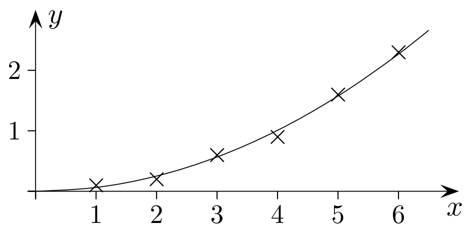
2. Wie kann ein proportionaler Zusammenhang aufgedeckt werden, falls die Tabellen-Werte fehlerbehaftet sind?



x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	0,4	0,6	1,0	1,2	1,6	1,8

   Die Wertepaare werden grafisch dargestellt.
   Nach Augenmaß wird eine Ausgleichsgerade durch den Ursprung gezeichnet und deren Steigung ermittelt. Wir erhalten $y \sim x$, genauer: $y = 0{,}31\,x$.

3. Die Grafik lässt einen parabelförmigen Kurvenverlauf, d. h. einen quadratischen Zusammenhang $y = a\,x^2$ vermuten.

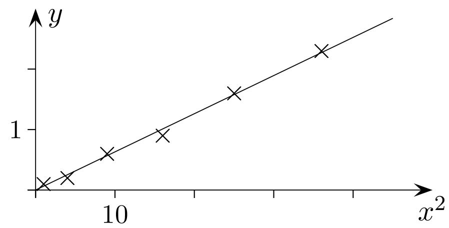


x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	0,1	0,2	0,6	0,9	1,6	2,3

   Lägen alle Punkte auf der Parabel, so könnte a mit einem Punkt $P(x_o \mid y_o)$ durch Einsetzen in $y = a\,x^2$ und Auflösen bestimmt werden, $a = \frac{y_0}{x_0^2}$.

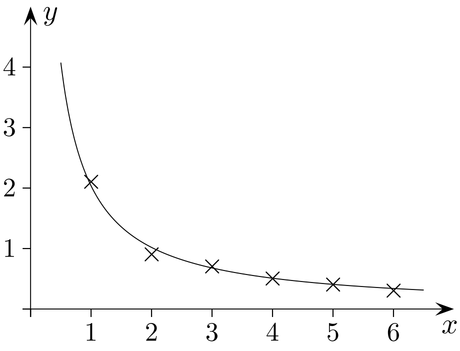
   Aufgrund der Messfehler wären alle Quotienten der folgenden Wertepaare zu betrachten.

x^2	0	1^2	2^2	3^2	4^2	5^2	6^2
y	0	0,1	0,2	0,6	0,9	1,6	2,3



   Diese Wertepaare werden nun grafisch dargestellt.
   Die Ausgleichsgerade belegt $y \sim x^2$.
   Die Steigung der Geraden ist ein Näherungswert für a,
   wir erhalten $a = 0{,}063$ und insgesamt $y = 0{,}063\,x^2$.

4. Die Grafik lässt einen hyperbelartigen Kurvenverlauf, d. h. einen antiproportionalen Zusammenhang $y = \frac{a}{x}$ vermuten.

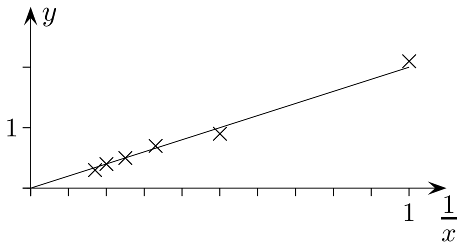


x	1	2	3	4	5	6
y	2,1	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3

Lägen alle Punkte auf der Hyperbel, so könnte a mit einem Punkt $P(x_o \mid y_o)$ durch Einsetzen in $y = \frac{a}{x}$ und Auflösen bestimmt werden, $a = \frac{y_0}{\frac{1}{x_0}}$.

Aufgrund der Messfehler wären alle Quotienten der folgenden Wertepaare zu betrachten.

$\frac{1}{x}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
y	2,1	0,9	0,7	0,5	0,4	0,3



Die Ausgleichsgerade belegt $y \sim \frac{1}{x}$.
In diesem Fall ist $a = 2{,}0$ und insgesamt dann $y = \frac{2{,}0}{x}$.

5. Wie ist vorzugehen, um Vermutungen wie $y = a\sqrt{x}$ oder $y = \sqrt{\frac{a}{x}}$ zu untersuchen?

6. Für einen vermuteten Zusammenhang $y = e^{ax}$ erhalten wir durch Auflösen $a = \frac{\ln y}{x}$.

   Zum Zeichnen der Ausgleichsgeraden sind daher die Logarithmen der y-Werte zu bilden:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	...
$\ln y$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\ln y_4$	...

7. Aus $y = x^a$ folgt $a = \frac{\ln y}{\ln x}$.

   Für diese Potenzfunktionen sind die Logarithmen der x- und y-Werte zu bilden:

$\ln x$	$\ln x_1$	$\ln x_2$	$\ln x_3$	$\ln x_4$	...
$\ln y$	$\ln y_1$	$\ln y_2$	$\ln y_3$	$\ln y_4$	...

Auswertung von Messergebnissen mit dem TI-83

1. Um die Steigung a der Ausgleichsgraden (Regressionsgeraden) durch den Ursprung zu ermitteln, reicht es in vielen Fällen aus, den Schwerpunkt der Messpunkte zu betrachten. Dies führt zu:

$$a \;=\; \frac{y_1 + y_2 + \;...\; + y_n}{x_1 + x_2 + \;...\; + x_n}$$

a ist auch Lösung der Gleichung: $y_1 - ax_1 + y_2 - ax_2 + ... + y_n - ax_n \;=\; 0\,.$
Die Punkte sind dann so um die Gerade verteilt, dass sich die y-Differenzen $y_i - ax_i$ ausgleichen.

x-Werte in L1,
y-Werte in L2 eintragen,

sum(L2)/sum(L1)

sum ist zu finden unter:

2nd LIST MATH 5: sum(

2. Eine Berechnung der Steigung a aufgrund der Methode der kleinsten Quadrate ergibt:

$$a \;=\; \frac{x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \;...\; + x_n\,y_n}{x_1^2 + x_2^2 + \;...\; + x_n^2}$$

An der Stelle a liegt ein Minimum der Funktion
$d(a) \;=\; (y_1 - ax_1)^2 + (y_2 - ax_2)^2 + ... + (y_n - ax_n)^2$ vor.
Die Ursprungsgerade liegt nun so, dass die Quadratsumme der y-Differenzen zu den Punkten minimal wird.

sum(L1 $*$ L2)/sum(L1^2)

“L1^2

L1	L2	L3
...	...	

3. Falls zunächst die x-Werte quadriert oder von ihnen reziproke Werte gebildet werden müssen, so kann dies in L3 erfolgen. Anschließend wird das Obige auf L2 und L3 angewandt.

sum(L2)/sum(L3)

oder

sum(L2 $*$ L3)/sum(L3^2)

regredi lat. zurückschreiten