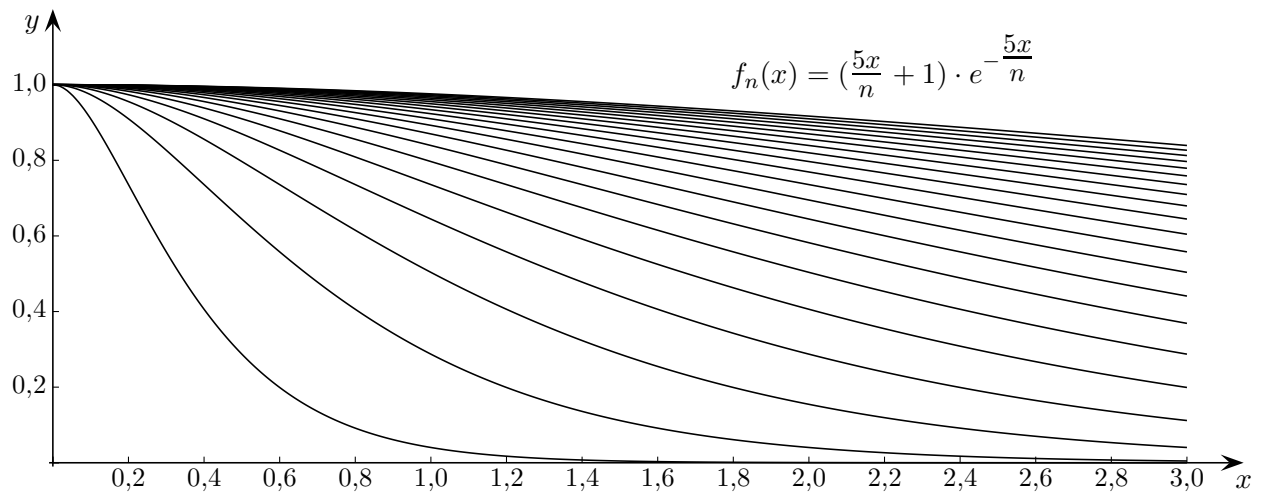
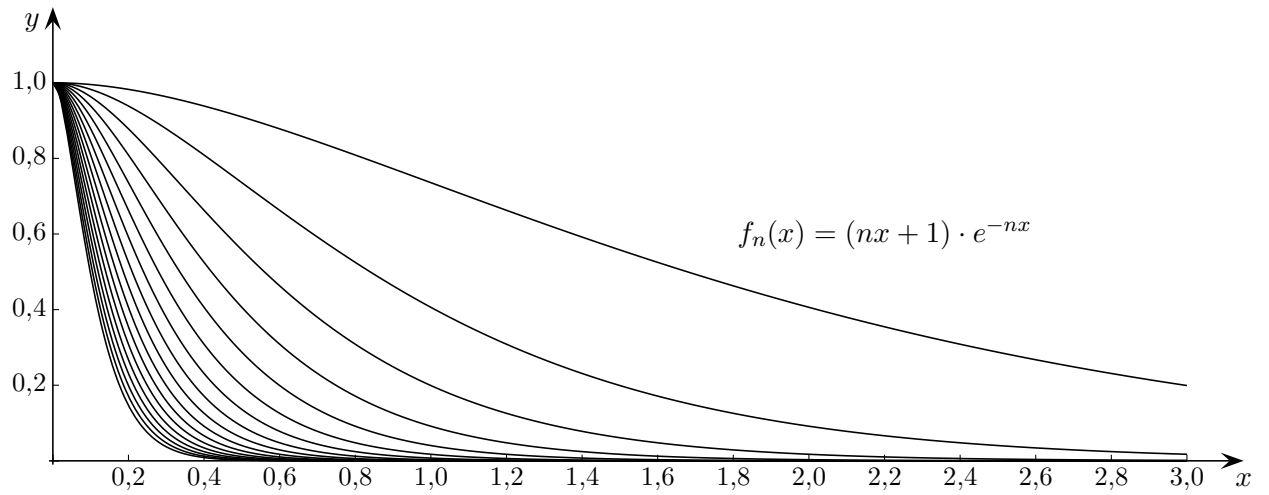


Gleichmäßige Konvergenz

Untersuche das Konvergenzverhalten von f_n für $n \rightarrow \infty$ auf dem Intervall $[0, a]$.



Gleichmäßige Konvergenz

Die 1. Funktionenfolge (vorige Seite) konvergiert nur punktweise:

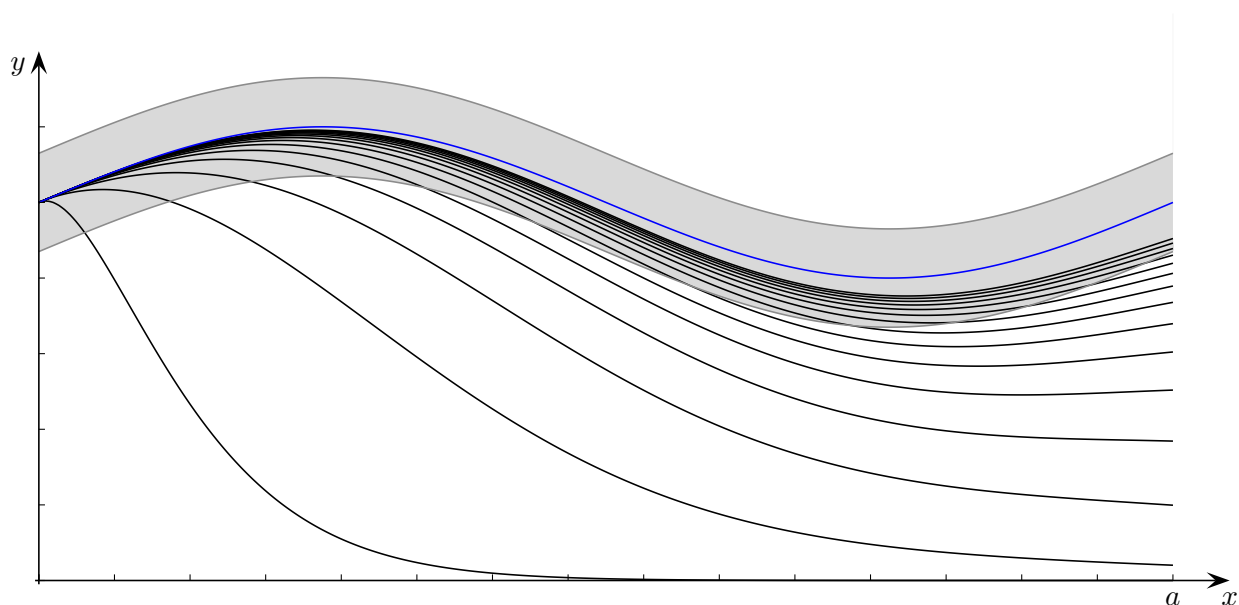
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \in [0, a] \end{cases}$$

Die 2. Funktionenfolge konvergiert zudem gleichmäßig: $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 1$ auf $[0, a]$

Bei gleichmäßiger Konvergenz wird die Stetigkeit der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion übertragen.

Überdies gilt, falls die Folge f'_n gleichmäßig konvergiert: $(\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x))' = \lim_{x \rightarrow \infty} f'_n(x)$

Analoges trifft auch für die Integration zu.



Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge auf dem Intervall $[0, a]$ bedeutet:
Zu jeder „Umgebung“ der Grenzfunktion gibt es in der Folge eine Funktion, von der ab alle weiteren in der Umgebung verlaufen.

Der gemeinsame Definitionsbereich sei \mathbb{D} .

Man überlege sich, dass gleichmäßige Konvergenz gegen f durch

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{D} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{erfasst wird,}$$

punktweise Konvergenz hingegen durch

$$\forall x_0 \in \mathbb{D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Roofls

Negation

Gleichmäßige Konvergenz gegen f bedeutet:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in \mathbb{D} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

punktweise Konvergenz hingegen:

$$\forall x_0 \in \mathbb{D} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Eine gleichmäßige Konvergenz gegen f liegt nicht vor, falls gilt:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad \exists x \in \mathbb{D} \quad |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

Die Verneinung der punktweisen Konvergenz lautet:

$$\exists x_0 \in \mathbb{D} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$$