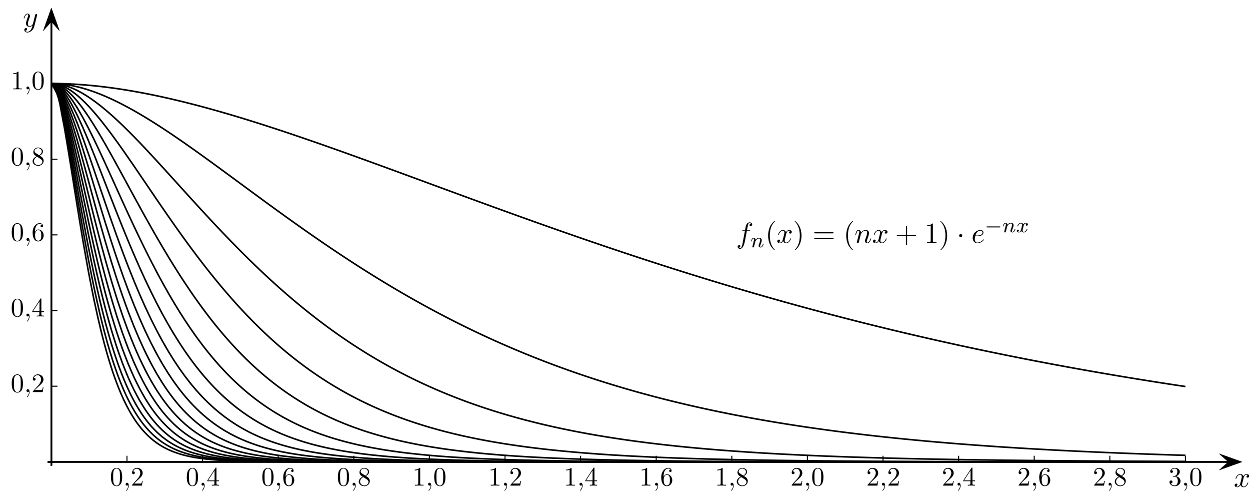
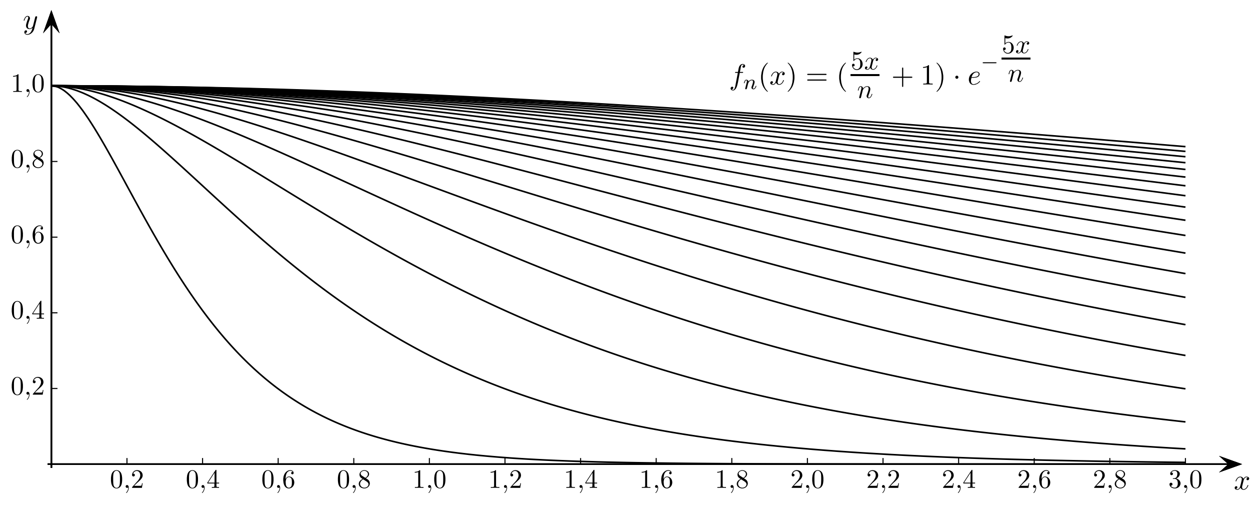
Gleichmäßige Konvergenz

Untersuche das Konvergenzverhalten von f_n für $n \longrightarrow \infty$ auf dem Intervall $[0, a]$.





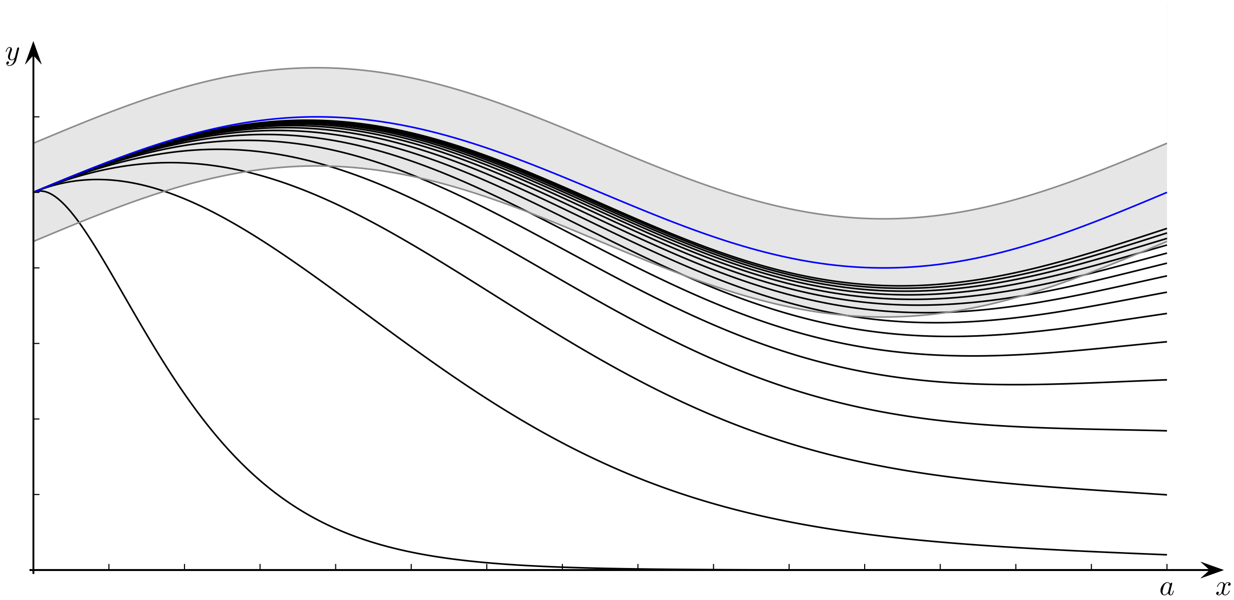
Gleichmäßige Konvergenz

Die 1. Funktionenfolge (vorige Seite) konvergiert nur punktweise:

$$\lim_{x \longrightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x = 0 \\ 0 & \qquad x \in [0, a] \end{cases}$$

Die 2. Funktionenfolge konvergiert zudem gleichmäßig: $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f_n(x) = 1$ auf $[0, a]$

Bei gleichmäßiger Konvergenz wird die Stetigkeit der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion übertragen.
Überdies gilt, falls die Folge f_n' gleichmäßig konvergiert: $(\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f_n(x))' = \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f_n'(x)$
Analoges trifft auch für die Integration zu.



Gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge auf dem Intervall $[0, a]$ bedeutet:
Zu jeder „Umgebung“ der Grenzfunktion gibt es in der Folge eine Funktion, von der ab alle weiteren in der Umgebung verlaufen.

Der gemeinsame Definitionsbereich sei $\mathbb{D}$.
Man überlege sich, dass gleichmäßige Konvergenz gegen f durch

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n \geq n_0}{\forall} \quad \underset{x \in \mathbb{D}}{\forall} \quad |\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon \qquad \text{erfasst wird,}$$

punktweise Konvergenz hingegen durch

$$\underset{x_0 \in \mathbb{D}}{\forall} \quad \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n \geq n_0}{\forall} \quad |\, f_n(x_0) - f(x_0) \,| < \varepsilon$$

Negation

Gleichmäßige Konvergenz gegen f bedeutet:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n \geq n_0}{\forall} \quad \underset{x \in \mathbb{D}}{\forall} \; |\, f_n(x) - f(x) \,| < \varepsilon$$

punktweise Konvergenz hingegen:

$$\underset{x_0 \in \mathbb{D}}{\forall} \quad \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\exists} \quad \underset{n \geq n_0}{\forall} \; |\, f_n(x_0) - f(x_0) \,| < \varepsilon$$

Eine gleichmäßige Konvergenz gegen f liegt nicht vor, falls gilt:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\exists} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{n \geq n_0}{\exists} \quad \underset{x \in \mathbb{D}}{\exists} \; |\, f_n(x) - f(x) \,| \geq \varepsilon$$

Die Verneinung der punktweisen Konvergenz lautet:

$$\underset{x_0 \in \mathbb{D}}{\exists} \quad \underset{\varepsilon > 0}{\exists} \quad \underset{n_0 \in \mathbb{N}}{\forall} \quad \underset{n \geq n_0}{\exists} \; |\, f_n(x_0) - f(x_0) \,| \geq \varepsilon$$