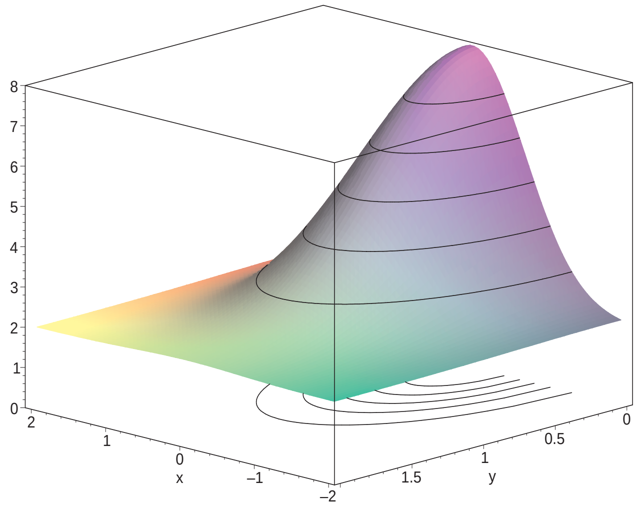
Exakte Differentialgleichung



Wir gehen von einer Funktion $F(x,y)$ aus und schneiden den Graphen mit einer Ebene, die zur xy-Ebene parallel ist und zu dieser einen Abstand C hat. Es entsteht eine Schnittkurve, deren Projektion in die xy-Ebene durch $F(x,y(x)) = C$ implizit gegeben ist.
Für die Schnittkurve kann durch beiderseitiges Ableiten von $F(x,y(x)) = C$ nach x eine Differentialgleichung aufgestellt werden (wir beschreiten gleich den umgekehrten Weg).

$$\big(F(x,y(x))\big)' = F_x(x,y(x)) + F_y(x,y(x)) \cdot y'(x) = 0 \qquad \textit{verallgemeinerte Kettenregel}$$

Die mit $F(x,y) = C$ implizit gegebene Funktion y ist also die Lösung der Differentialgleichung

$$F_x(x,y) + F_y(x,y) \cdot y' = 0$$

Alternative anschauliche Schreibweise: $F_x(x,y)\,dx + F_y(x,y)\,dy = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx}$
Das Differenzial von F (linke Seite) ist null. Es liegt keine Zunahme in z-Richtung vor.

Sei nun eine DGL der Art

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

zu lösen.
Die DGL heißt exakt, wenn eine Funktion $F(x,y)$ existiert, so dass $F_x = P$ und $F_y = Q$ gilt (P, Q stetig).

Wenn F existiert, ist die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unerheblich (Satz von Schwarz):

$$F_{xy} = F_{yx}$$

Es ist daher zunächst

$$(F_{xy} =) \;\; P_y = Q_x \;\; (= F_{yx})$$

zu überprüfen.

$F(x,y)$ wird durch Integration von $P = F_x$ nach x (Variante 1) oder von $Q = F_y$ nach y (Variante 2) berechnet, je nachdem, was einfacher ist.

Exakte Differentialgleichung

Variante 1

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + C(y) \quad *$$

P nach x integrieren, $C(y)$ addieren

$$F_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int P(x,y)\,dx \;+\; C'(y) \stackrel{!}{=} Q(x,y) \quad\Longrightarrow\quad C'(y) = \ldots$$

partiell nach y ableiten,
mit Q gleichsetzen
und nach $C'(y)$ umstellen

$$C(y) = \int \ldots\, dy$$

$C'(y)$ nach y integrieren und in $*$ einsetzen

Variante 2

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\,dy + C(x) \quad *$$

Q nach y integrieren, $C(x)$ addieren

$$F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int Q(x,y)\,dy \;+\; C'(x) \stackrel{!}{=} P(x,y) \quad\Longrightarrow\quad C'(x) = \ldots$$

partiell nach x ableiten,
mit P gleichsetzen
und nach $C'(x)$ umstellen

$$C(x) = \int \ldots\, dx$$

$C'(x)$ nach x integrieren und in $*$ einsetzen

$F(x,y) = C$ ist eine implizite Darstellung der Lösungskurve.

Falls eine Anfangsbedingung $y(x_0) = y_0$ gegeben ist, wird die Konstante C angepasst.

$F(x,y) = C$ wird, wenn möglich, nach y aufgelöst.

einfaches Beispiel einer exakten Differentialgleichung

$\frac{1}{250}xy + \left(\frac{1}{500}x^2 + \frac{1}{4}\right)y' = 0, \quad y(0) = 4$

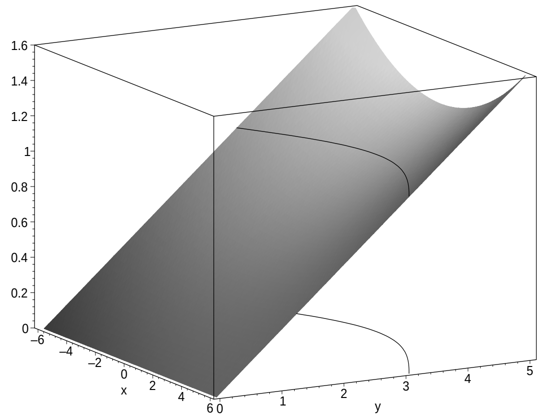
Exakte Differentialgleichung

$$F(x,y) = \frac{1}{500}\,yx^2 + \frac{1}{4}\,y$$

$$F(0,4) = 1$$

$$F(x,y) = 1$$

$$y(x) = \frac{500}{125 + x^2}$$



Exakte Differentialgleichung

In einer chemischen Reaktion setzen sich die Stoffe A und B zu einem neuen Stoff zusammen.
Man kann annehmen, dass die Geschwindigkeit der Reaktion proportional zu den jeweils vorhandenen Mengen an A und B ist. Dies führt zur Differentialgleichung

$$y' = k(a-y)\cdot(b-y)$$

Wir bringen sie auf die Form

$$-k + \frac{1}{(a-y)\cdot(b-y)}\,y' = 0$$

Die Integrabilitätsbedingung $P_y = Q_x$ ist erfüllt.

Variante 1

$$F(t,y) = \int P(t,y)\,dt + C(y) = -kt + C(y)$$

$$F_y(t,y) = C'(y) \overset{!}{=} Q(t,y) = \frac{1}{(a-y)\cdot(b-y)}$$

$$C(y) = \frac{1}{a-b}\left[\int \frac{dy}{b-y} - \int \frac{dy}{a-y}\right] + C$$

Partialbruchzerlegung $\quad \dfrac{1}{(a-y)\cdot(b-y)} = \dfrac{1}{(a-b)\cdot(b-y)} - \dfrac{1}{(a-b)\cdot(a-y)}$

integrieren ergibt:

$$-kt + \frac{1}{a-b}\ln\frac{a-y}{b-y} + C = 0$$

Um C zu bestimmen, muss berücksichtigt werden, dass zur Zeit $t=0$
die Menge an umgesetztem Material $y=0$ ist.

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{a}{b} + C = 0 \quad\Longrightarrow\quad C = \frac{1}{a-b}\ln\frac{b}{a}$$

Das Endresultat lautet

$$\frac{1}{a-b}\ln\frac{b(a-y)}{a(b-y)} = kt.$$

exakte Differentialgleichung

1. $y + \cos(x) + (x + 2y) \cdot y' = 0$

2. $x - y + (\frac{1}{y^2} - x) \cdot y' = 0$

3. $12xy + 3 + 6x^2 \cdot y' = 0, \quad y(1) = 0$

4. $2xe^y + 1 + (x^2 e^y + 1) \cdot y' = 0$

exakte Differentialgleichung Lösungen

1. $V(x,y) = xy + \sin(x) + y^2 + C = 0$

2. $V(x,y) = \frac{x^2}{2} - xy - \frac{1}{y} + C = 0$

3. $y = \frac{1-x}{2x^2}$

4. $e^y x^2 + x + y + C = 0$

Integrierender Faktor

Die DGL

$$\underbrace{(3xy + y^2)}_{P} + \underbrace{(x^2 + xy)}_{Q}\, y' = 0$$

ist offensichtlich nicht exakt $(P_y \neq Q_x)$, wohl aber, wenn sie mit x multipliziert wird:

$$x(3xy + y^2) + x(x^2 + xy)y' = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0$$

$\mu(x) = x$ wird als integrierender Faktor bezeichnet.
Die Frage ist, wie so ein Faktor ermittelt wird.
Für diesen Faktor kann - auf einfache Weise - eine Bedingung hergeleitet werden,
genau genommen eine lineare DGL, die jedoch einfach zu lösen ist.

Lösung der linearen DGL des exponentiellen Wachstums

$$\begin{aligned}
f'(x) &= k \cdot f(x) & & \\
\frac{f'(x)}{f(x)} &= k & & \textit{integrieren, beachte: } \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln f(x) + C \\
\ln f(x) &= kx + C & & \textit{entlogarithmieren} \\
f(x) &= e^{kx+C} & & \\
f(x) &= e^{kx} \cdot e^C & & \\
f(x) &= a\,e^{kx} & & \textit{mit } \; a = e^C
\end{aligned}$$

Zeige auf 2 Weisen (durch eine Probe und durch Herleitung), dass $f(x) = \frac{1}{x^2}$
die DGL

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{2}{x}$$

löst.

Der Rechenweg kann abgekürzt werden:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = g(x) \quad \Longrightarrow \quad f(x) = e^{\int g(x)\,dx}$$

Integrierender Faktor

Eine DGL der Art

$$P(x,y) + Q(x,y) \cdot y' = 0$$

kann mit dem obigen Verfahren gelöst werden, falls
die Exaktheits-Bedingung $P_y = Q_x$ vorliegt.

Häufig ist sie erst durch Multiplikation mit einem Faktor $\mu(x)$ gegeben.

$$\mu(x)P(x,y) + \mu(x)Q(x,y) \cdot y' = 0$$

Die Exaktheits-Bedingung lautet nun (Produktregel anwenden)

$$\mu(x)P_y(x,y) = \mu(x)Q_x(x,y) + \mu_x(x)Q(x,y)$$

oder umgeformt: $\underbrace{\dfrac{P_y - Q_x}{Q}}_{f(x)} = \dfrac{\mu_x}{\mu}$

Wenn die linke Seite nur von x abhängig ist, kann $\mu(x)$ aus dieser Gleichung ermittelt werden.

Beispiel einer nicht exakten DGL:

$$(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$$

Die Exaktheits-Bedingung nach Multiplikation mit einem Faktor $\mu(x)$ führt zu

$$\frac{\mu_x}{\mu} = \frac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \ldots = \frac{1}{x}$$

also zu $\mu(x) = x$.

Die DGL geht in

$$(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0$$

über. Diese nun exakte DGL hat die implizite Lösung: $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$

Allgemein folgt aus $\dfrac{\mu_x(x)}{\mu(x)} = f(x)$ der integrierende Faktor $\mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$.

Der integrierender Faktor kann auch $\mu(y)$ lauten.

$$\mu(y)P(x,y) + \mu(y)Q(x,y) \cdot y' = 0$$

Die Exaktheits-Bedingung lautet nun umgeformt: $\underbrace{\dfrac{P_y - Q_x}{P}}_{g(y)} = -\dfrac{\mu_y}{\mu}$

In diesem Fall ist die linke Seite nur von y abhängig. Der integrierende Faktor lautet: $\mu(y) = e^{-\int g(y)\,dy}$.

Integrierender Faktor

Zusammengefasst:
2 Fälle - neben vielen anderen - sind hier zu unterscheiden:

$$P(x, y) + Q(x, y) \cdot y' = 0$$

$$\underbrace{\frac{P_y - Q_x}{Q}}_{f(x)} = \frac{\mu_x}{\mu} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(x) = e^{\int f(x)\,dx}$$

$$\underbrace{\frac{P_y - Q_x}{P}}_{g(y)} = -\frac{\mu_y}{\mu} \qquad \Longrightarrow \qquad \mu(y) = e^{-\int g(y)\,dy}$$

Die DGL

$$(x^2 - 3y^2) + 2xy\,y' = 0$$

hat den integrierenden Faktor $\frac{1}{x^4}$.

Die DGL

$$(xy^2 - y^3) + (1 - xy^2)\,y' = 0$$

hat den integrierenden Faktor $\frac{1}{y^2}$.