Erzeugende Funktionen

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

k	0	1	2	3	4	...
$P(X=k)$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	...

Die erzeugende Funktion von X lautet:

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k, \qquad s \in [0,1]$$

Aus G_X kann die Verteilung wiedergewonnen werden: $p_k = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}$
Mit der erzeugenden Funktion von Y

$$G_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k\, s^k, \qquad s \in [0,1]$$

gilt dann

$$\begin{aligned} G_X(s) \cdot G_Y(s) &= (p_0 + p_1 s + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \ldots) \cdot (q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + \ldots) \\ &= p_0 q_0 + (p_0 q_1 + p_1 q_0)s + (p_0 q_2 + p_1 q_1 + p_2 q_0)s^2 + \ldots \\ &= G_{X+Y}(s). \end{aligned}$$

Die betrachteten Zufallsvariablen werden als unabhängig vorausgesetzt.

X binomialverteilt

$$G_X(s) = (q + ps)^n$$

X, Y poissonverteilt

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)\, s^k = \exp(-\lambda) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} = \exp(-\lambda)\exp(\lambda s) = \exp(\lambda(s-1))$$

$$G_Y(s) = \exp(\mu(s-1))$$

$$G_{X+Y}(s) = G_X(s) \cdot G_Y(s) = \exp((\lambda + \mu)(s-1))$$

X geometrisch verteilt

$$G_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} s^k = ps \sum_{k=1}^{\infty} s(1-p)^{k-1} = ps \sum_{k'=0}^{\infty} s(1-p)^{k'}$$

$$\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{ps}{1-s(1-p)} = \frac{ps}{1-sq}$$

Erwartungswert und Varianz

$$\begin{aligned}
G(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} p_k\, s^k \\
G'(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} k p_k\, s^{k-1} \qquad \Longrightarrow \qquad E[X] = G'(1) \\
G''(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) p_k\, s^{k-2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k^2 p_k\, s^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k\, s^{k-2} \qquad \Longrightarrow \qquad G''(1) = E[X^2] - G'(1) \\
E[X^2] &= G'(1) + G''(1) \\
V[X] &= E[X^2] - \big(E[X]\big)^2 = G'(1) + G''(1) - \big(G'(1)\big)^2
\end{aligned}$$

X binomialverteilt

$$E[X] = np$$
$$V[X] = npq$$

X geometrisch verteilt

$$E[X] = \frac{1}{p}$$
$$V[X] = \frac{q}{p^2}$$

X poissonverteilt

$$E[X] = \lambda$$
$$V[X] = \lambda$$

Zufällige Summen von Zufallsvariablen

Seien $X_1, X_2, X_3, \ldots$ unabhängige, identisch verteilte ($X_i = X$), diskrete ZV und N eine weitere unabhängige ZV mit $p_i = P(N = n_i)$.

Wir suchen die Verteilung von $Z = \sum\limits_{i=0}^{N} X_i$.

Die erzeugende Funktion von Z lautet:

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= p_0 + p_1 G_X(s) + p_2\big(G_X(s)\big)^2 + p_3\big(G_X(s)\big)^3 + \ldots \\ &= G_N(G_X(s)) \end{aligned}$$

Beachte: $\big(G_X(s)\big)^{n_i} = q_0 + q_1 s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + \ldots$ ist die erzeugende Funktion von $\sum\limits_{i=0}^{n_i} X_i$.
n_i tritt mit der Wahrscheinlichkeit p_i auf.

Aus $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ folgt mit der Kettenregel unmittelbar
die Waldsche Identität $E[Z] = E[N]E[X]$
(intuitiv klar, mittlere Anzahl mal mittlere Größe der Summanden).

$V[Z] = E[N]V[X] + \big(E[X]\big)^2 V[N]$ kann mit $V[X] = G'(1) + G''(1) - \big(G'(1)\big)^2$,
der Ketten- und der Produktregel verifiziert werden.
Der Term für $V[Z]$ liegt nahe.
Im ersten Summanden wird die mittlere Anzahl mal der mittleren Schwankung von X betrachtet, im zweiten die mittlere Schwankung von N, wobei die mittlere Größe von X zugrundegelegt wird, beachte $V[E[X]\,N] = \big(E[X]\big)^2 V[N]$.

Eine Henne legt N Eier (poissonverteilt mit $\lambda = 6$).
Jedes Ei brütet sie (unabhängig von den anderen) mit einer Wahrscheinlichkeit $p = 0{,}3$ aus.
Z ist die Anzahl der Küken.

$$\begin{aligned} G_N(s) &= \exp(\lambda(s-1)) \\ G_X(s) &= 1 - p + ps \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_Z(s) &= \exp(\lambda(1 - p + ps - 1)) \\ G_Z(s) &= \exp(\lambda p(s-1)) \end{aligned}$$

Z ist auch poissonverteilt mit λp.

Zufällige Summe

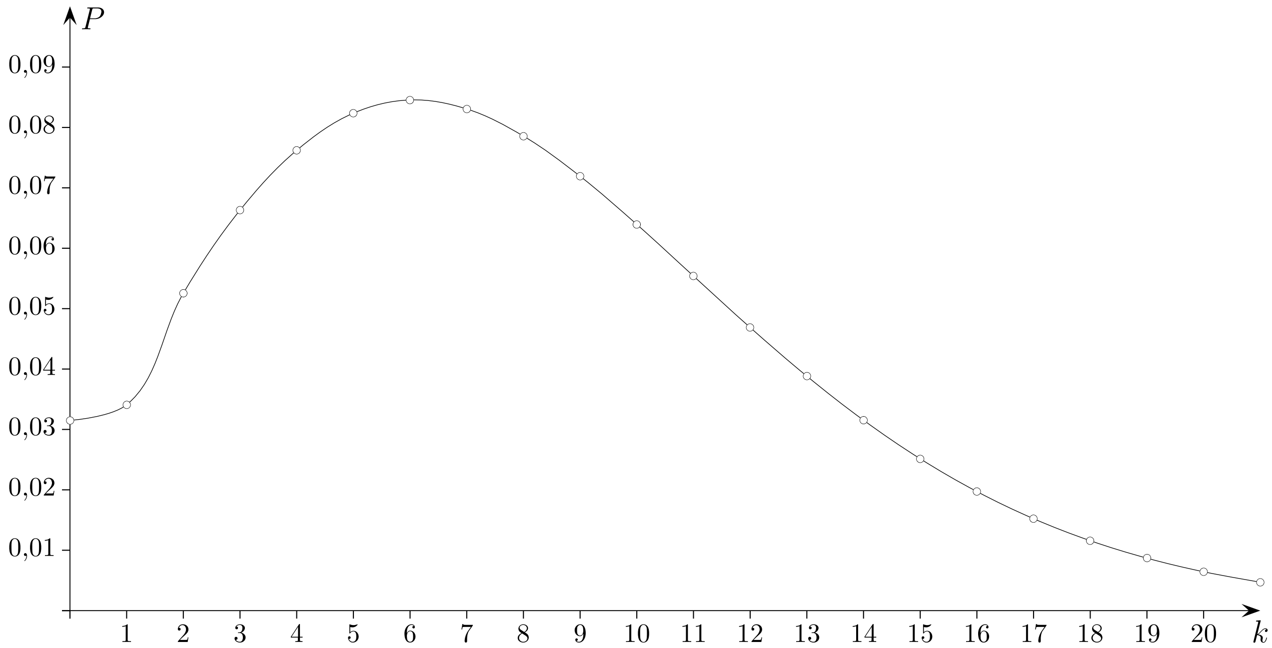
Gruppenanzahl N ist poissonverteilt mit $\lambda = 4$.
Mitgliederanzahl X pro Gruppe ist poissonverteilt mit $\lambda = 2$.
Z Mitglieder insgesamt

$$G_N(s) = \exp(4(s-1))$$

$$G_X(s) = \exp(2(s-1))$$

$$G_Z(s) = \exp(4(\exp(2(s-1))-1))$$

$$G_Z(s) = \exp(4\exp(2s-2)-4)$$



$E[Z] = 4 \cdot 2 = 8$

$V[Z] = 4 \cdot 2 + 4 \cdot 4 = 24, \quad \sigma \approx 5$

Binomial- und Poissonverteilung

X binomialverteilt mit $p = \frac{\lambda}{n}$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= (q + ps)^n \\ &= \left(1 - \tfrac{\lambda}{n} + \tfrac{\lambda s}{n}\right)^n \\ &= \left(1 - \tfrac{\lambda(s-1)}{n}\right)^n \qquad \longrightarrow \qquad \exp(\lambda(s-1)) \end{aligned}$$

Y poissonverteilt

$$G_Y(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)\, s^k = \exp(\lambda(s-1)) \qquad \text{siehe oben}$$