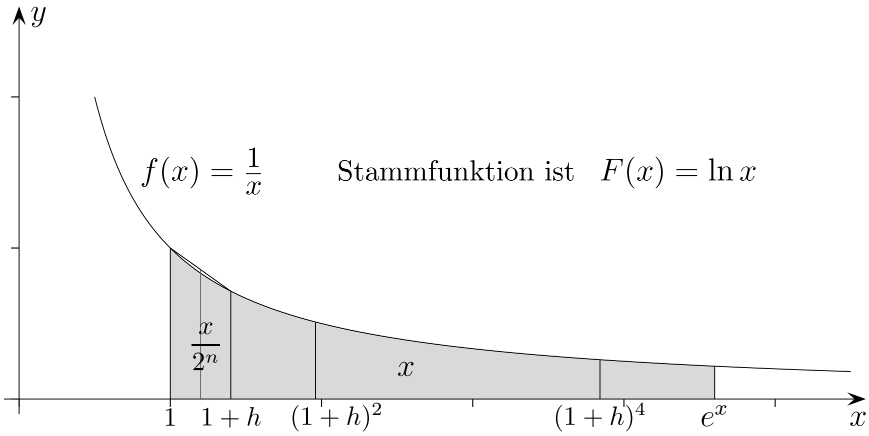
Numerische Berechnung von e^x



Sei x gegeben, gesucht ist e^x.
Wir betrachten die Fläche (grau gefärbt) mit den Inhalt x. Die linke Grenze sei 1.
Die rechte Grenze ist dann e^x, siehe Stammfunktion.
Um die rechte Grenze zu bestimmen, halbieren wir x n-mal (z. B. $n = 16$), ermitteln einen genäherten Wert für $\frac{x}{2^n}$, errechnen h und verdoppeln den genäherten Wert n-mal.
Die zugehörige rechte Grenze wird jeweils quadriert. $(1+h)^{2^n}$ ergibt genähert e^x.

Näherung für $\frac{x}{2^n}$, Berechnung der Trapezhöhe h

$$\frac{x}{2^n} \approx A_{\text{Trapez}} = \underbrace{\frac{1 + \frac{1}{1+h}}{2}}_{\frac{2+h}{2+2h}} \cdot h \qquad \Longrightarrow \qquad h = A_{\text{Trapez}} - 1 + \sqrt{1 + A_{\text{Trapez}}^2}$$

Verdopplung der Fläche

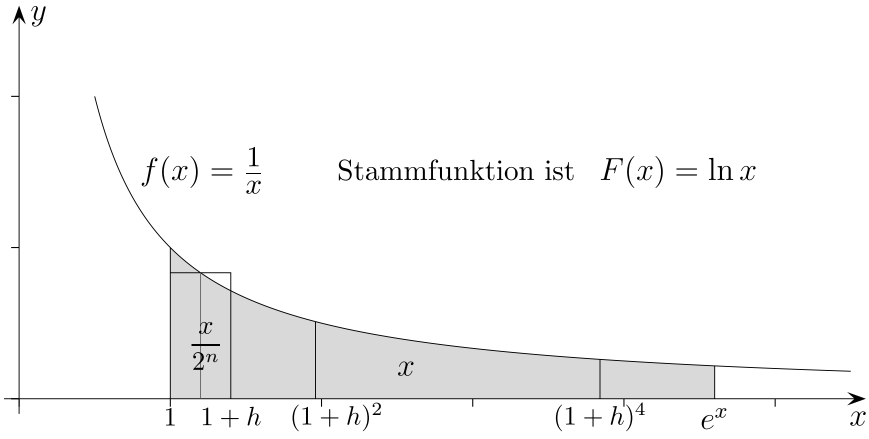
Aus $e^{2x} = (e^x)^2$ ist zu sehen, dass durch wiederholtes Quadrieren von $1 + h = e^{\frac{x}{2^n}}$ sich der Flächeninhalt jeweils verdoppelt, $\ln(1+h)^2 = 2 \cdot \ln(1+h)$, $\ln(1+h)^4 = 4 \cdot \ln(1+h)$.

$x = 1$, $n = 16$
$1 + h = 1{,}00001525890548$
$(1+h)^{2^n} = 2{,}71828183$

Die Näherung $\frac{2+h}{2+2h} \approx 1$ ergibt $h = \frac{x}{2^n}$ und damit $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{2^n}\right)^{2^n}$

bzw. $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Numerische Berechnung von e^x, Alternativen



Näherung für $\frac{x}{2^n}$, alternativ

$$\frac{x}{2^n} \approx A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{\frac{1+1+h}{2}} \cdot h \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{2A_{\text{Rechteck}}}{2 - A_{\text{Rechteck}}}$$

In diesem Beispiel treten keine Veränderungen auf.

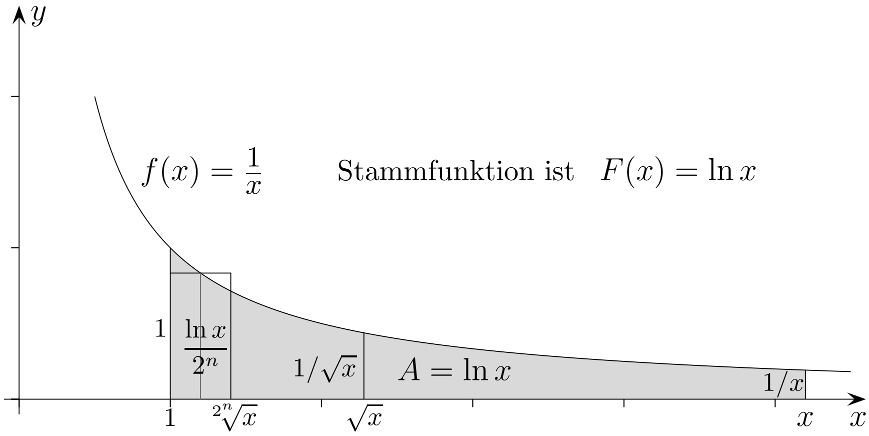
$x = 1$, $n = 16$
$1 + h = 1{,}00001525890548$
$(1+h)^{2^n} = 2{,}71828183$

Ein leicht besseres Ergebnis wird mit $g(x) = e^x - 1$ erreicht, $e^x = g(x) + 1$.
Die Verdopplungsformel $e^{2x} = (e^x)^2$ geht in $g(2x) = g(x)[2 + g(x)]$ über.

	A	
0	0,0000152589	$1/2^{16}$
1	0,0000305180	=A0*(2+A0)
2	0,0000610370	
3	0,0001220778	
...	...	
15	0,6487212707	
16	1,7182818285	2,7182818285

Alle 11 Stellen sind richtig.

Numerische Berechnung von $\ln x$



$\sqrt{x}$ halbiert die Fläche A unter dem Graphen von f in den Grenzen von 1 bis x.
Das ist auch ohne Rechnung einsehbar. Die rechte Hälfte geht aus der linken durch Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\sqrt{x}$ und Stauchung in y-Richtung mit dem Faktor $1/\sqrt{x}$ hervor.

Wir halbieren A durch wiederholtes Wurzelziehen n-mal, finden für $A/2^n$ eine Näherung und verdoppeln diese Näherung n-mal.

Näherung für $\frac{A}{2^n}$

$$\frac{A}{2^n} \approx A_{\text{Rechteck}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt[2^n]{x}}{2}} \cdot \left(\sqrt[2^n]{x} - 1\right)$$

Beispiel

$x = 4$, $n = 16$
$A/2^n \approx 0{,}0000211531732$
$A_{\text{Rechteck}} \cdot 2^n \approx \ln 4 \approx 1{,}38629436$

alternativ (nachrechnen)

$A_{\text{Trapez}} = \frac{a - 1/a}{2}$

$a = \sqrt[2^n]{x}$