Bedingter Erwartungswert

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad = P_B(A) = P_B(A \cap B)$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A\,|\,B)$ kann als Neueinschätzung der Wahrscheinlichkeit von A interpretiert werden, wenn die Information vorliegt, dass das Ereignis B bereits eingetreten ist.
Dann ist von A nur noch derjenige Teil zu berücksichtigen, der sich in B abspielt, also $A \cap B$, und dieser Teil ist in Bezug zu B zu bringen. Das bewirkt, dass $P_B(B) = 1$ ist.

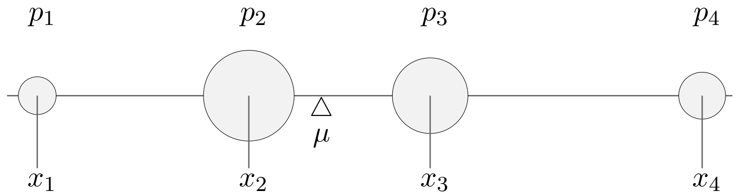
Nimmt eine Zufallsvariable X die Werte x_1, x_2, ... , x_n mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten p_1, p_2, ... , p_n an, so ist der Erwartungswert: $E(X) \;=\; x_1p_1 + x_2p_2 + \;...\; + x_np_n$.

$$\begin{aligned} E(X) \;&=\; \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \\ &=\; \sum_{k=1}^{n} x_k P(X = x_k) \end{aligned}$$

Sei X eine Zufallsvariable mit der Verteilung:

x_1	x_2	x_3	x_4
p_1	p_2	p_3	p_4

Die Verteilung kann immer als Massenverteilung gedeutet werden.
Die Gesamtmasse 1 wird auf die Punkte x_i verteilt. Dabei wird dem Punkt x_i die Masse p_i zugewiesen.
Der Schwerpunkt μ charakterisiert die Massenverteilung.
Nach dem Hebelgesetz müssen die links- und rechtsdrehenden Momente gleich sein.



$$(\mu - x_1)p_1 + (\mu - x_2)p_2 \;=\; (x_3 - \mu)p_3 + (x_4 - \mu)p_4$$

Durch Auflösen nach μ und unter Berücksichtigung von $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$ folgt:

$$\mu \;=\; x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 + x_4p_4$$

$$\begin{aligned} E(X\,|\,B) \;&=\; \sum_{k=1}^{n} x_k \, P(X = x_k\,|\,B) \\ &=\; \sum x_k \, \frac{P(\{X = x_k\} \cap B)}{P(B)} = \frac{E(\mathbf{1}_B \cdot X)}{P(B)} \end{aligned}$$

Der bedingte Erwartungswert $E(X\,|\,B)$ gibt an, welchen Wert man für die Zufallsvariable X im Mittel erwartet, wenn man die Information hat, dass das Ereignis B eingetreten ist. Hierbei ist $\mathbf{1}_B$ die Indikatorfunktion von B, also die Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, wenn B eintritt und 0 sonst.
$\mathbf{1}_B$ bewirkt, dass nur diejenigen Funktionswerte von X bei der Erwartungswertbildung berücksichtigt werden, deren Argumente in B enthalten sind.

Bedingter Erwartungswert

Der bedingte Erwartungswert soll anhand der Tabelle veranschaulicht werden.
Für x_1, x_2 wäre Sommer, Winter möglich, die y_i könnten Stundenangaben sein.

$X \setminus Y$	y_1	y_2	y_3	$\sum$
x_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}	$P(X = x_1)$
x_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}	$P(X = x_2)$
$\sum$	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	$P(Y = y_3)$	1

$$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$\begin{aligned} E(Y \,|\, X = x_1) &= \frac{1}{P(X = x_1)}\,[y_1 p_{11} + y_2 p_{12} + y_3 p_{13}], \qquad P(X = x_i) > 0 \\ E(Y \,|\, X = x_2) &= \frac{1}{P(X = x_2)}\,[y_1 p_{21} + y_2 p_{22} + y_3 p_{23}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(Y \,|\, X = x_1)P(X = x_1) + E(Y \,|\, X = x_2)P(X = x_2) \quad \text{bedingte Erwartungswerte als Zufallsgröße} \\ E(Y) &= E\big(E(Y \,|\, X = \circ)\big) \end{aligned}$$

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $n = 10$ und $p = 1/2$, $E(X) = np = 5$.
Y zählt die Anzahl der Treffer in den ersten $m = 4$ Versuchen. Es ist

$$\begin{aligned} E(X \,|\, Y = y) &= y + (n - m)p \\ E(X \,|\, Y = 1) &= 1 + (10 - 4)p = 4 \end{aligned}$$

Augensumme beim Würfeln

X sei die Augenzahl beim Werfen eines regelmäßigen Würfels und B sei das Ereignis, eine 5 oder 6 zu würfeln. Dann ist

$$E(X\,|\,B) = \frac{P(X=5)\cdot 5 + P(X=6)\cdot 6}{P(B)} = \frac{11/6}{2/6} = 5{,}5$$

Für die Zufallsvariablen X, Y gilt $E(X\,|\,Y=y) = \sum_x x\,P(X=x\,|\,Y=y) = \sum_x x\,\frac{P(X=x, Y=y)}{P(Y=y)}$,

wobei über alle x im Wertebereich von X summiert wird.

	1	2	3	4	5	6
1	(1|1)	(1|2)	(1|3)	(1|4)	(1|5)	(1|6)
2	(2|1)	(2|2)	(2|3)	(2|4)	(2|5)	(2|6)
3	(3|1)	(3|2)	(3|3)	(3|4)	(3|5)	(3|6)
4	(4|1)	(4|2)	(4|3)	(4|4)	(4|5)	(4|6)
5	(5|1)	(5|2)	(5|3)	(5|4)	(5|5)	(5|6)
6	(6|1)	(6|2)	(6|3)	(6|4)	(6|5)	(6|6)

X und Y seien die Augenzahlen bei zwei Würfen mit einem regelmäßigen Würfel und $Z = X + Y$ die Augensumme. Die Verteilung von Z ist gegeben durch $P(Z=z) = \frac{6-|7-z|}{36}$, $z = 2, \ldots, 12$. Wenn wir aber das Ergebnis X des ersten Wurfs kennen und wissen, dass wir z. B. den Wert 4 gewürfelt haben, erhalten wir die bedingte Verteilung

$$P(Z=z\,|\,X=4) = \frac{P(X=4\,|\,Y=z-4)}{P(X=4)} = \begin{cases} 1/6 & \text{falls } z = 5, \ldots, 10 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Der Erwartungswert dieser Verteilung, der bedingte Erwartungswert von Z, gegeben $X=4$, ist

$E(Z\,|\,X=4) = \frac{1}{6}(5+6+\cdots+10) = 7{,}5$ (auch direkt aus der Tabelle ablesbar) und allgemeiner

$E(Z\,|\,X=x) = \frac{1}{6}((x+1)+\cdots+(x+6)) = x + 3{,}5$

Bedingter Erwartungswert für stetige Zufallsvariablen

Angenommen, wir haben zwei Zufallsvariablen X und Y mit einer gemeinsamen Dichtefunktion
$f_{X,Y}(x,y) = 4xy$ auf $[0,1] \times [0,1]$.

Wir suchen den bedingten Erwartungswert $E(Y|X = x)$ von Y gegeben $X = x$, x ist konkreter Wert.

Von der Randdichte von X wird nur der Wert für x benötigt:

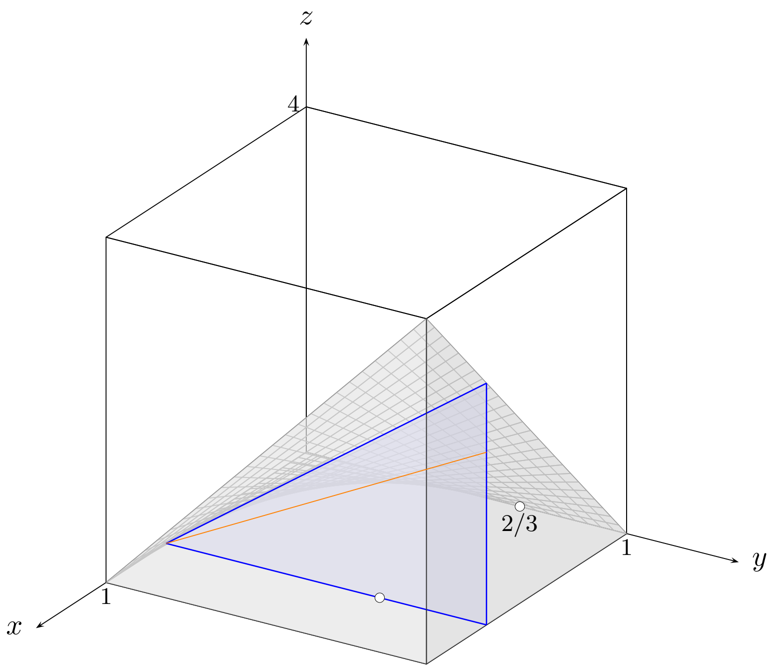
$$f_X(x) = \int_0^1 4xy\, dy = 4x \int_0^1 y\, dy = 2x$$

Die bedingte Dichtefunktion ist:

$$f_{Y|X=x}(y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{4xy}{2x} = 2y, \quad 0 \le y \le 1, \qquad \text{Flächeninhalt ist 1.}$$

Der bedingte Erwartungswert von Y gegeben $X = x$ ist:

$$E(Y|X = x) = \int_0^1 y f_{Y|X=x}(y)\, dy = \int_0^1 y \cdot 2y\, dy = 2\int_0^1 y^2\, dy = \frac{2}{3}$$



Der math. Hintergrund der obigen Rechnung ist einsichtig.
Die zweidimensionale Dichte begrenzt in z-Richtung einen Körper mit dem Volumen 1.
Zu $X = x$ ist die blau umrandete Schnittfläche zu betrachten.
Damit eine (bedingte) Dichte vorliegt, ist die Schnittfläche zu normieren (orange gefärbt).
Mit dieser Dichte wird der (bedingte) Erwartungswert für Y berechnet.

Startseite