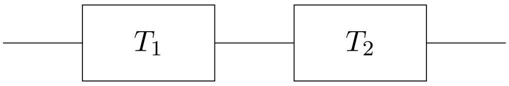
Zuverlässigkeit eines Systems   Berechnung mit Indikatoren

Dies ist eine Fortsetzung der Ausarbeitung Zuverlässigkeit eines Systems, nun in der Formulierung mit Indikatoren. Dies wird - wie wir noch sehen werden - weitere Berechnungsmöglichkeiten eröffnen.

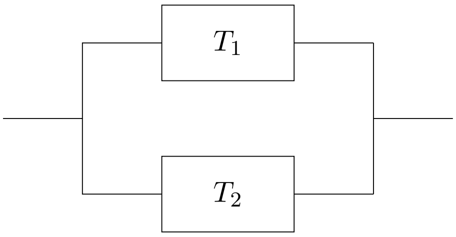
A Serien- oder Reihensysteme:



T_1	T_2	I
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Ein Seriensystem funktioniert genau dann, wenn alle Bauteile funktionieren. Der Zustand des Systems (arbeitet/arbeitet nicht) wird durch die Funktion I erfasst, der Zustand der Bauteile durch die Komponentenfunktionen I_1 und I_2 mit $E(I_k) = p_k$. Das ganze System hat die Zuverlässigkeit $p_A = E(I)$. Die Indikatoren I_k sind unabhängige Zufallsvariable und es gilt: $I = I_1 I_2$, $E(I_1 I_2) = E(I_1)E(I_2) = p_1 p_2$.

B Parallelsysteme:

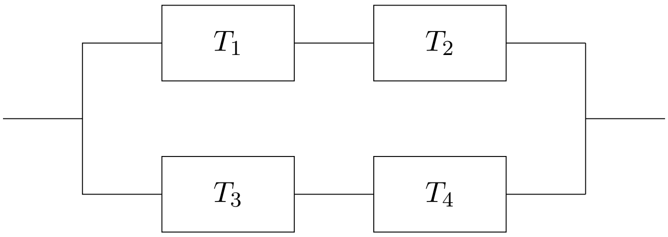


T_1	T_2	B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Ein Parallelsystem funktioniert genau dann, wenn mindestens ein Bauteil funktioniert. Es ist offenbar: $I = 1 - (1 - I_1)(1 - I_2)$
Nur wenn beide Teile defekt sind, ist $I = 0$, sonst $I = 1$.
Durch Ausmultiplizieren folgt: $I = I_1 + I_2 - I_1 I_2$.
Für den Erwartungswert gilt dann $p_B = p_1 + p_2 - p_1 p_2$.

Gesucht ist die Zuverlässigkeit der Systeme.

System C

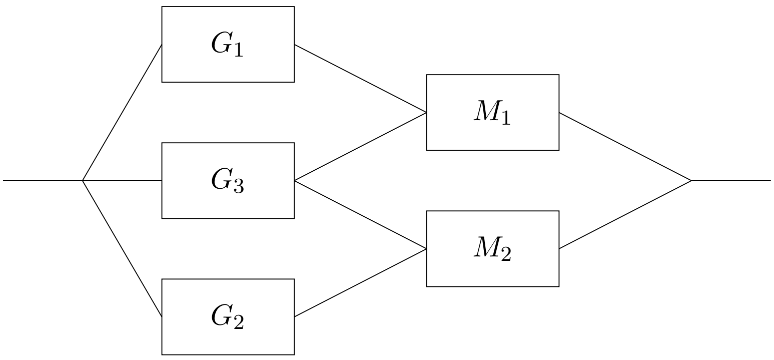


$$I = 1 - (1 - I_1 I_2)(1 - I_3 I_4)$$

$$p_C = 1 - (1 - p_1 p_2) \cdot (1 - p_3 p_4)$$

Es ist ein System denkbar (siehe System D), bei dem die Zufallsvariablen I_k ein Produkt abhängiger Variablen bilden (in beiden Klammern ist z. B. I_3 enthalten). Dann müssen vor dem Übergang zum Erwartungswert die Klammern aufgelöst und mit der Umformung $I_k^2 = 1$ alle Abhängigkeiten beseitigt werden.

System D



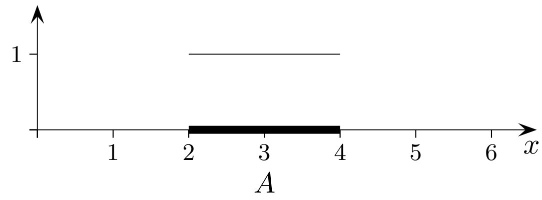
Der Generator G_1 treibt die Maschine M_1, der Generator G_2 die Maschine M_2. G_3 ist zur Reserve da. Wenn einer oder beide Generatoren ausfallen, kann er deren Arbeit übernehmen. Das System ist funktionsfähig, wenn wenigstens eine Maschine arbeitet. Wir ordnen dem Generator G_i den Indikator X_i zu, $E(X_i) = p_i$, und der Maschine M_i den Indikator Y_i, $E(Y_i) = r_i$.

$$\begin{aligned}
I &= 1 - (1 - X_1Y_1)(1 - X_2Y_2)(1 - X_3Y_1)(1 - X_3Y_2) \\
&= X_1Y_1 + X_2Y_2 + X_3Y_1 + X_3Y_2 - X_1X_3Y_1 - X_2X_3Y_2 - X_3Y_1Y_2 - X_1X_2Y_1Y_2 + X_1X_2X_3Y_1Y_2 \\
p_D &= p_1r_1 + p_2r_2 + p_3r_1 + p_3r_2 - p_1p_3r_1 - p_2p_3r_2 - p_3r_1r_2 - p_1p_2r_1r_2 + p_1p_2p_3r_1r_2 \\
&= [p_1(1 - p_3)r_1 + p_2(1 - p_3)r_2 - p_1p_2(1 - p_3)r_1r_2] + [p_3r_1 + p_3r_2 - p_3r_1r_2] \quad \text{direkt einsehbar}
\end{aligned}$$

z. B. $p_1 = p_2 = p_3 = 0{,}7;\ r_1 = r_2 = 0{,}8$ ergibt $p_D = 0{,}96$.

Indikator eines Ereignisses

Sei A ein Ereignis in Ω.
Wir betrachten die Funktion, die jedem Element aus A den Wert 1 und jedem Element aus $\overline{A}$ den Wert 0 zuordnet. Sie heißt Indikator von A und wird mit I_A bezeichnet.



Indikatoren und Ereignisse entsprechen einander eineindeutig.

Es gilt: $E(I_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\overline{A}) = P(A)$

Der Erwartungswert eines Indikators ist gleich der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, das er anzeigt.
Offensichtlich aber wichtig ist die Eigenschaft: $I_A^2 = I_A$
Grundlegende Beziehungen zwischen Mengen- und Indikator-Operationen sind:

$$I_{\overline{A}} = 1 - I_A$$
$$I_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = I_{A_1} \cdot I_{A_2} \cdot \ldots \cdot I_{A_n} = \min\{I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}\}$$
$$I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = 1 - (1 - I_{A_1})(1 - I_{A_2}) \ldots (1 - I_{A_n}) = \max\{I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}\}$$

Insbesondere ist:

$$\begin{aligned} I_{A \cup B} &= 1 - (1 - I_A)(1 - I_B) \\ &= I_A + I_B - I_A I_B \\ &= I_A + I_B - I_{A \cap B} \quad \Longrightarrow \quad \text{(Erwartungswert auf beiden Seiten)} \\ P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

Ebenso beweist man:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Allgemein kann durch Ausmultiplizieren die Siebformel erhalten werden:

$$\begin{aligned} I_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} &= \sum_{i=1}^{n} I_{A_i} - \sum_{i<j} I_{A_i \cap A_j} + \sum_{i<j<k} I_{A_i \cap A_j \cap A_k} - \ \ldots \ (-1)^{n+1} \cdot I_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} \\ P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ \ldots \ (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

n Kugeln werden zufällig auf 3 Urnen verteilt

Es sei X die Anzahl der leeren Urnen. Wir wollen $E(X)$ bestimmen.
Zu diesem Zweck definieren wir drei Indikatoren.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn die } i\text{-te Urne leer ist} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

$X_1 = 0$ $X_2 = 1$ $X_3 = 0$

Es ist dann $X = X_1 + X_2 + X_3,$

$E(X_i) = P(X_i = 1) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ und wegen der Linearität von E

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) = 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2^n}{3^{n-1}}\,.$$