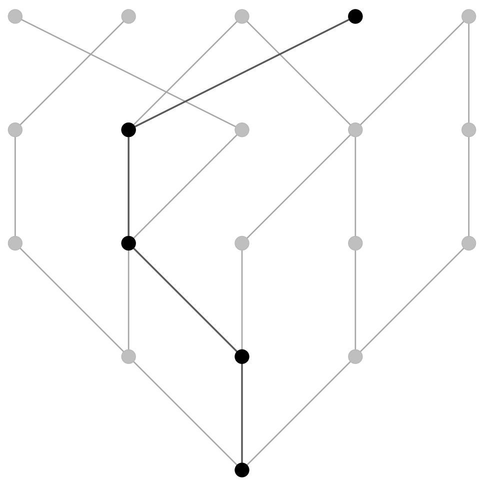
Das Zornsche Lemma

In Existenzbeweisen für z. B.:
Jeder Vektorraum besitzt eine Basis, jeder Ring mit Einselement hat ein maximales Ideal, wird das Zornsche Lemma angewendet.
Das Lemma wurde 1933 von Max Zorn unabhängig von Kazimierz Kuratowski 1922 entdeckt.

Zornsches Lemma
Sei $\leq$ eine partielle Ordnung auf M (Halbordnung $\leq$ ist reflexiv, transitiv, antisymmetrisch).
Wenn für jede Teilmenge gilt:
Ist $A \subseteq M$ linear (total) geordnet, so existiert eine obere Schranke von A.
dann existiert ein maximales Element S, aus $S \leq x$ folgt $S = x$.
Es ist also kein Element größer als S.

Eine total geordnete Teilmenge heißt Kette.
Die Grafik veranschaulicht eine Kette K in einer partiellen Ordnung.



Das Lemma besagt:
Eine partiell geordnete Menge, in der jede Kette eine obere Schranke hat, enthält (mindestens) ein maximales Element S.

Es ist hier nicht die Rede von einem Maximum S:
Für alle $x \in M$ gilt $x \leq S$.

Die Idee
Wir beginnen in einer Kette mit einem beliebigen a_0 und finden auf der Suche nach einem maximalen Element entweder ein maximales Element a_m mit $a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_m$ oder die unendliche Kette $a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n < \ldots$ Diese können wir aber überspringen, da für sie eine obere Schranke a_ω existiert: $a_0 < a_1 < a_2 \ldots < a_n < \ldots < a_\omega$. Falls a_ω noch nicht das gesuchte maximale Element ist, gehen wir über zu $a_{\omega+1}$, nötigenfalls über zu $a_{\omega+2}$ usw. Unendliche Teilketten werden mit der Schrankenbedingung übersprungen. In dieser Weise kann jede noch so große partielle Ordnung durchwandert werden. Das Verfahren endet mit einem maximalen Element. An vielen Stellen ist aus mehreren Möglichkeiten eine Auswahl zu treffen. Das Zornsche Lemma ist äquivalent zum intuitiv vielleicht naheliegenderen Auswahlaxiom und ist damit ein Theorem der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre ZFC (C steht für choise), die das Auswahlaxiom einbezieht.

Auswahlaxiom
Zu jeder Menge von zueinander disjunkten nichtleeren Mengen existiert eine Funktion, durch die jeder dieser Mengen genau ein Element aus dieser Menge zugeordnet wird, also genau ein Element aus dieser Menge ausgewählt wird.

Eine Anwendung

Bei Anwendungen wird auf Mengen (von Mengen) durch Inklusion eine partielle Ordnung erzeugt.
Die Vereinigung der Elemente einer Kette K bildet eine obere Schranke von K.
Die Existenz eines maximalen Elements ist dann begründet.

Auf diese Weise wird

Jeder Vektorraum V besitzt eine Basis.

bewiesen.

Eine Menge von Vektoren ist genau dann eine Basis von V,
wenn sie linear unabhängig und erzeugend ist. Wir setzen:

$M = \{A \subseteq V \mid \text{Die Vektoren in } A \text{ sind linear unabhängig.}\}$

Die Vereinigung einer Kette linear unabhängiger Mengen ist linear unabhängig. Ein maximales Element B ist erzeugend, da wir andernfalls B zu einer linear unabhängigen Menge $B \cup \{v\}$ in M vergrößern könnten. Also ist B eine Basis von V.

Das Zornsche Lemma impliziert das Auswahlaxiom.

Sei M eine Menge paarweise disjunkter nichtleerer Mengen. Wir setzen:

$P = \{A \subseteq \bigcup M \mid$ für alle $m \in M$ existiert höchstens ein $a \in A$ mit $a \in m\}$

P besteht aus allen Teilmengen, die mit den Mengen aus M jeweils höchstens ein Element gemeinsam haben. Hätte eine Teilmenge mit den Mengen aus M jeweils genau ein Element gemeinsam, wäre sie die gesuchte Auswahlmenge.

Die Inklusion $\subset$ definiert auf P eine partielle Ordnung, so dass die Voraussetzung des Zornschen Lemmas erfüllt ist. Für jede Kette $K \subseteq P$ ist $\bigcup K \in P$. Das maximale Element L ist eine Auswahlmenge für M. Denn andernfalls gäbe es ein $m \in M$ mit $m \cap L = \varnothing$.
Ist nun $b \in m$ beliebig, so ist $L \cup \{b\}$ in P, im Widerspruch zur Maximalität von L.

Zornsches Lemma, alternative Formulierung

Die Begründung für: Jeder Vektorraum besitzt eine Basis.
legt das Folgende nahe.

Das Zornsches Lemma besagt:
Eine partiell $\leq$ geordnete Menge M, in der jede Kette
eine obere Schranke hat, enthält (mindestens) ein maximales Element.

Zornsches Lemma, alternative Formulierung
Sei $\subset$ eine partielle Ordnung auf Z (Menge von Mengen).
Wenn für jede Kette $L \subseteq Z$ in Z gilt: $\bigcup L \in Z$,
dann existiert ein maximales Element in Z.

Zornsches Lemma $\Longrightarrow$ Zornsches Lemma, alternative Formulierung

Diese Richtung ist offensichtlich. Die Voraussetzung des Zornschen Lemmas sind erfüllt.
Es existiert ein maximales Element.

Zornsches Lemma, alternative Formulierung $\Longrightarrow$ Zornsches Lemma

Von einer partiell $\leq$ geordneten Menge M ausgehend, betrachten wir die Menge
$Q = \{K \subseteq M \mid K \text{ ist eine Kette in } M\}$ mit der partiellen Inklusions-Ordnung $\subset$.
Die Voraussetzung des Zornschen Lemmas, alternative Formulierung, ist erfüllt:
Sei hierzu $L \subseteq Q$ linear geordnet (L ist eine Kette von Ketten) und $L^* = \bigcup L$.
Wir zeigen, dass $L^* \in Q$, also eine Kette in Q ist.
Hierzu seien p,$q \in L^*$. Dann gibt es L_p,$L_q \in L$ mit $p \in L_p$ und $q \in L_q$.
Da L eine Kette in Q ist, sind L_p und L_q $\subset$-vergleichbar. Ohne Einschränkung sei $L_p \subseteq L_q$.
Dann gilt $p, q \in L_q$. Da L_q eine Kette in M ist, gilt $p \leq q$ oder $q \leq p$. Dies zeigt, dass L^* eine Kette in M ist, also ein Element von Q.
Dann existiert (Zornsches Lemma, alternative Formulierung) ein maximales Element R in Q.
Da R eine Kette in M ist, gibt es eine obere Schranke r mit $R \leq r$.
r muss ein maximales Element in M sein. Denn wäre $r < \ell$, so würde $R \subset R \cup \{\ell\}$ gelten, im Widerspruch zur Maximalität von R.