Wiener-Prozess

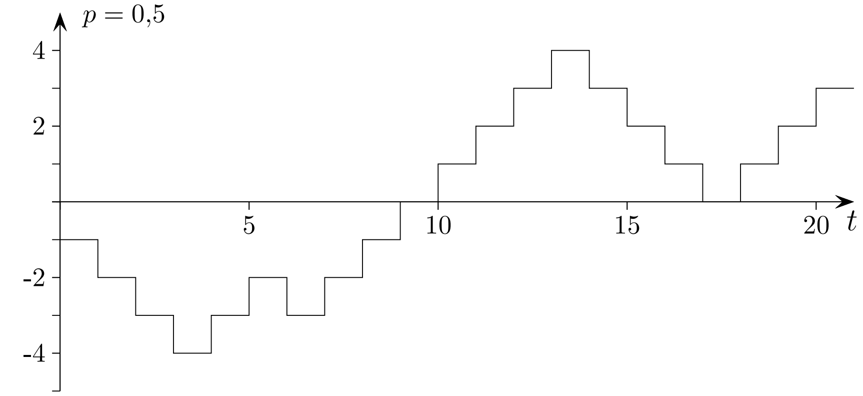
↑ Wiener-Prozess

Betrachten wir zunächst den einfacheren Bernoulli-Prozess.
Sei X_1, X_2, X_3, ... eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen, die die Werte ± 1 mit den Wahrscheinlichkeiten p und $q = 1 - p$ annehmen.
B_n bezeichne den jeweils konstanten Funktionswert auf dem n-ten Intervall $[n-1, n)$, $n = 1, 2, \ldots$ und ist festgelegt durch

$$\begin{aligned} B_1 &= X_1 \\ B_{n+1} &= B_n + X_{n+1}\,, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Hierdurch ist ein Bernoulli-Prozess $B(t)$, $t \geq 0$, definiert.
Zu jedem t, $t \geq 1$, wird zum Funktionswert für das vorhergehende Intervall zufallsbedingt ± 1 addiert.
Liegt t im n-ten Intervall, so gilt $B(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Wir erkennen hierin die eindimensionale Zufallsbewegung (Random Walk) wieder.
Diese Formulierung erlaubt nun eine naheliegende Verallgemeinerung, ähnlich dem Übergang von der Binomial- zur Normalverteilung.

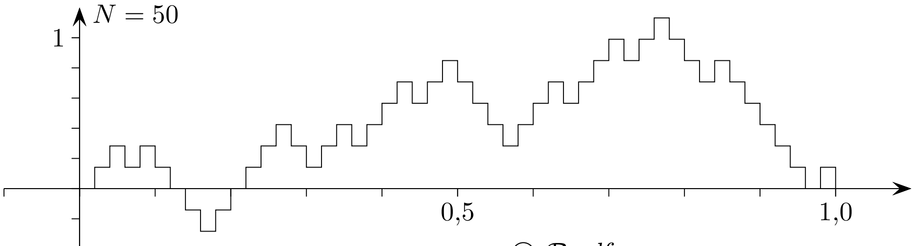


Wir beschränken uns auf das Intervall $[0, 1)$ und zerlegen es in N gleiche Teile:

$$[\frac{n-1}{N}, \frac{n}{N}), \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

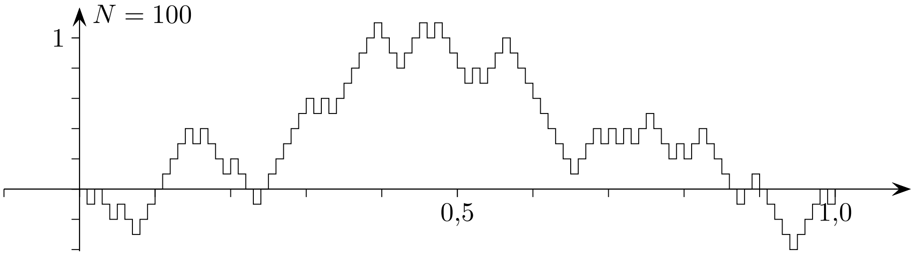
Parallel dazu verkleinern wir die Sprungweite der X_n, so dass die Varianz jeweils $\frac{1}{N}$ beträgt[1], $p = 0{,}5$ vorausgesetzt. Für die Approximation des Wiener-Prozesses soll dann gelten (Bezeichnungen wie beim Bernoulli-Prozess):

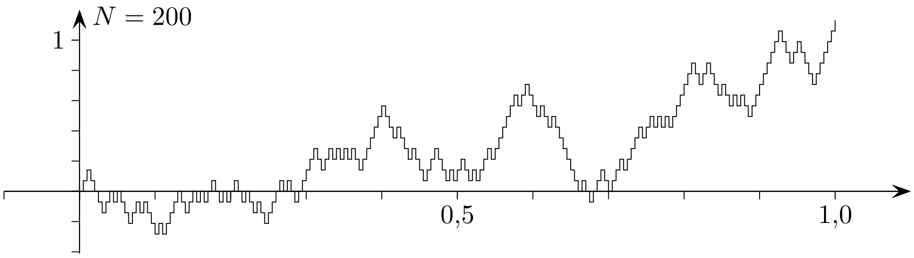
$$\begin{aligned} W_1 &= X_1 \qquad \text{Anfang wird hier festgelegt. } X_1 = 0 \text{ mit Wahrscheinlichkeit 1.} \\ W_{n+1} &= W_n + \frac{1}{\sqrt{N}} X_{n+1}\,, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

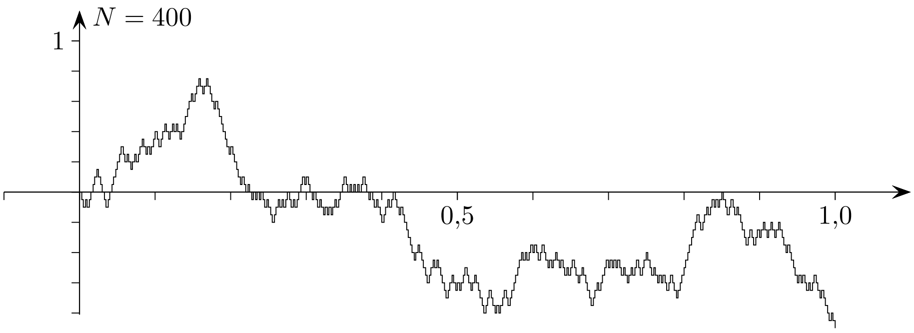


[1] Für unabhängige Zufallsvariablen gilt: $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$

↑ Wiener-Prozess







$N \longrightarrow \infty$ ist vorstellbar und ergibt den Wiener-Prozess $W(t)$,
der für jedes t eine Zufallsvariable ist. Aufgrund der Konstruktion ist offensichtlich, dass $W(t)$ normalverteilt ist (zentraler Grenzwertsatz), wir bestimmen die Varianz:

Für $t = \dfrac{k}{N}$ ist $W(t) \approx \displaystyle\sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{N}} X_n$ (t ist Element der $k+1$-ten Intervalls).

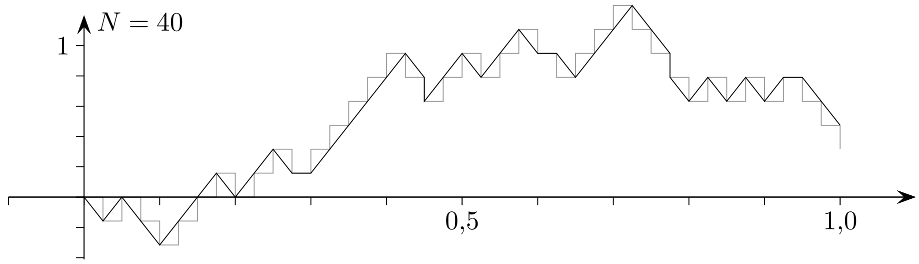
$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Var}\big(W(t)\big) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=2}^{k+1} \operatorname{Var}(X_n) = \frac{k}{N} = t \qquad (\text{beachte } \operatorname{Var}(X_n) = 1)$$

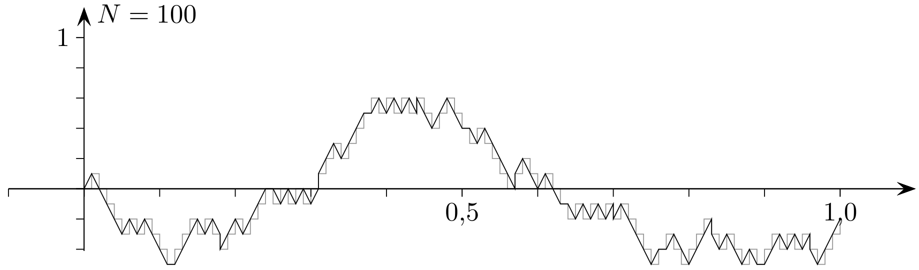
Für $s = \dfrac{k}{N}$, $t = \dfrac{l}{N}$ $(s < t)$ ist $W(t) - W(s) \approx \displaystyle\sum_{n=2}^{l+1} \frac{1}{\sqrt{N}} X_n - \sum_{n=2}^{k+1} \frac{1}{\sqrt{N}} X_n = \sum_{n=k+2}^{l+1} \frac{1}{\sqrt{N}} X_n .$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{Var}\big(W(t) - W(s)\big) \approx \frac{1}{N} \sum_{n=k+2}^{l+1} \operatorname{Var}(X_n) = \frac{1}{N}(l-k) = t - s$$

↑ Wiener-Prozess

Zu den Pfaden gibt es stets eine stetige Variante.
An welchen Stellen sind die Graphen fehlerhaft?





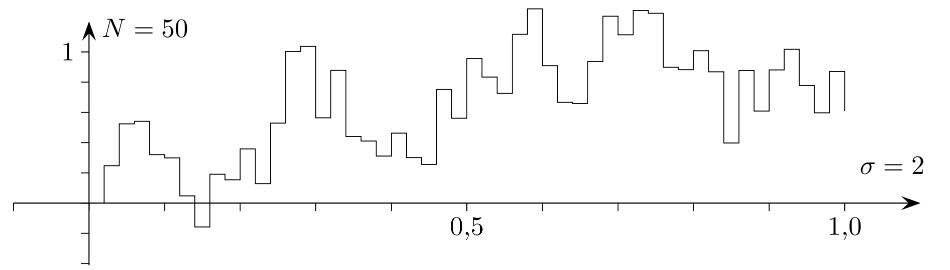
↑ Wiener-Prozess (Gauß-Prozess) alternativer Einstieg

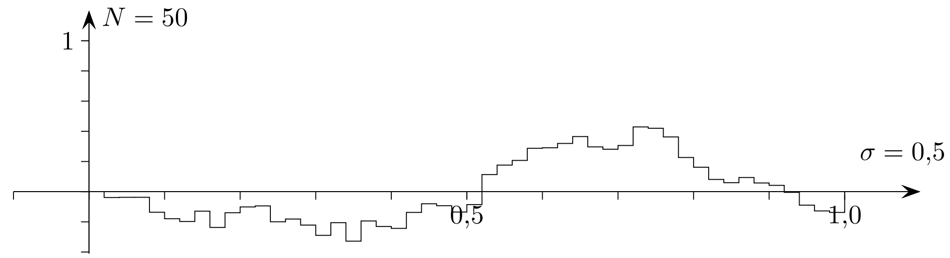
Weitere Prozesse können mit Hilfe des Wiener-Prozesses beschrieben werden.
Dieser wird hierzu für den diskreten Fall noch einmal formuliert:

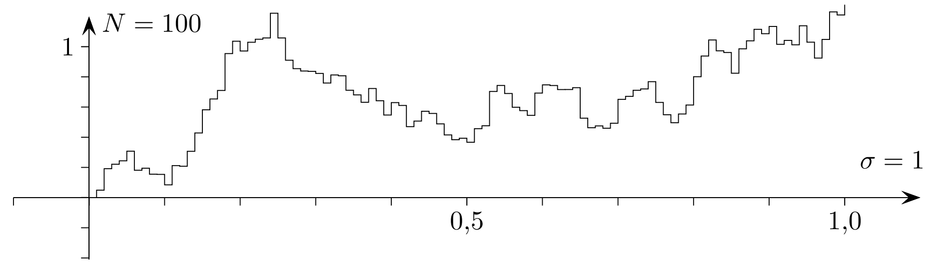
$$W_1 = 0$$

$$W_{n+1} = W_n + \sigma\,\Delta W \qquad \text{mit} \quad \Delta W \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1), \quad \text{beachte:}\, \mathcal{N}(0,\sigma^2\,\Delta t) = \sigma\,\sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1)$$

Genauer: $X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a}\,X \sim \mathcal{N}(0,a)$
Der Faktor $\sqrt{\Delta t}$ stellt sicher, dass die Varianz auf jedem Intervall auch bei weiterer Unterteilung gleich bleibt.







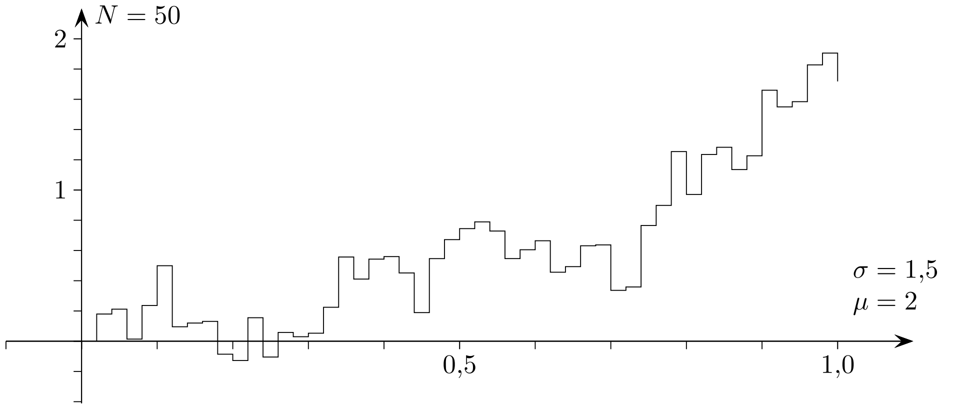
Die Normalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ wurde durch die Summe von 12 auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallsvariablen vermindert um 6 ersetzt. Der Erwartungswert ist dann gerade 0, die Varianz 1.

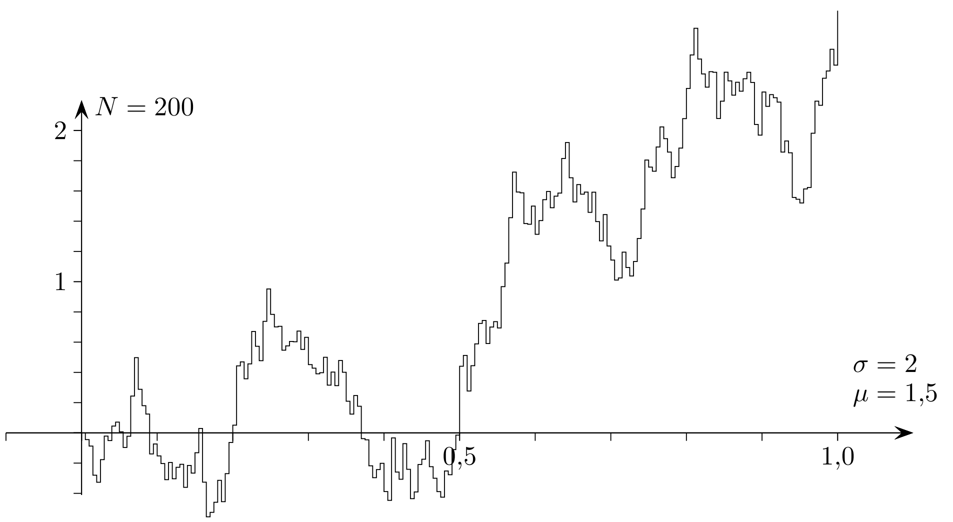
↑ Wiener-Prozess mit Drift

Um steigende Aktienkurse zu modellieren, ist eine Ergänzung erforderlich:

$$S_1 = 0$$
$$S_{n+1} = S_n + \mu\,\Delta t + \sigma\,\Delta W \qquad \text{mit} \quad \Delta W \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1)$$

μ heißt Drift.





Die Modellierung muss noch verbessert werden. Warum?

Dieser stochastische Prozess kann übersichtlich durch $\Delta S = \mu\,\Delta t + \sigma\,\Delta W$ beschrieben werden oder durch $dS = \mu\,dt + \sigma\,dW$, wenn N gegen Unendlich streben soll.
Die Gleichung wird stochastische Differenzialgleichung genannt. Eine stochastische Differenzialgleichung eines Prozesses beinhaltet, wie diskrete Realisierungen erstellt werden können.
Möglich ist, dass μ und σ von S und t abhängig sind.

↑ Itô-Formel 1942

Sei W (besser W_t) der Wiener-Prozess mit $\sigma = 1$:

$$\begin{aligned} W_1 &= 0 \\ W_{n+1} &= W_n + \Delta W \qquad \text{mit} \quad \Delta W \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

Mit einer Funktion f kann ein neuer stochastischer Prozess gewonnen werden, indem jeweils die Funktionswerte der W_n gebildet werden. Wie kann dann z. B. für den Prozess $f(W_t) = W_t^2$ die iterative diskrete Näherung ermittelt werden?
Bei Anwendungen in der Finanzmathematik wird häufig der umgekehrte Weg eingeschlagen. Mit Hilfe von Annahmen hinsichtlich der lokalen Änderung eines Prozesses wird der Prozess rekonstruiert. Die Berechnung des Erwartungswerts für einen gegebenen Zeitpunkt t erlaubt den ersehnten Blick in die Zukunft.
Die Vorgehensweise entspricht dem Aufstellen und Lösen einer Differenzialgleichung. Der Unterschied besteht in den Argumenten, die bei stochastischen Prozessen normalverteilt rumzappeln.

Und nun zur Fragestellung:

$$\begin{aligned} W_1 &= 0 \\ f(W_{n+1}) &= (W_n + \Delta W)^2 \\ &= W_n^2 + 2\,W_n\,\Delta W + (\Delta W)^2 \\ &= f(W_n) + f'(W_n)\,\Delta W + (\Delta W)^2 \end{aligned}$$

$(\Delta W)^2$ ersetzen wir durch seinen Mittelwert: $E(\Delta W)^2 = \mathit{VAR}(\Delta W) = \Delta t$

$$\begin{aligned} W_1 &= 0 \\ f(W_{n+1}) &= f(W_n) + f'(W_n)\,\Delta W + \Delta t \end{aligned}$$

oder kurz $\quad df(W) = f'(W)\,dW + dt$

Für $f(W) = W^3$ erhalten wir $\quad f(W_{n+1}) = W_n^3 + 3\,W_n^2\,\Delta W + 3\,W_n\,\Delta W^2 + \Delta W^3$

oder $\quad f(W_{n+1}) \approx W_n^3 + f'(W_n)\Delta W + \dfrac{1}{2}\,f''(W_n)\,\Delta W^2 \qquad E(\Delta W)^3 = 0$ ohne Nachweis

kurz $\quad df(W) = f'(W)\,dW + \dfrac{1}{2}\,f''(W)\,dt$

Dieser Sachverhalt kann verallgemeinert werden.
Die Funktion f wird hierbei in eine Taylorreihe bis zum quadratischen Term entwickelt und $(\Delta W)^2$ wie oben durch seinen Erwartungswert ersetzt.

Auch dann lautet das Ergebnis: $\quad df(W) = f'(W)\,dW + \dfrac{1}{2}\,f''(W)\,dt$

Es erinnert an die Kettenregel, jedoch sind die Symbole $df(W)$ und dW keine Differenziale der Analysis. Die Pfade der Prozesse sind offensichtlich nicht differenzierbar.

↑ Stochastische Differenzialgleichung

Für eine Näherung für $f(W)$ kann von einer Näherung für W ausgegangen werden.

Aus der Kenntnis der lokalen Änderungsrate, die durch die Ableitung oder allgemeiner einer Differenzialgleichung gegeben ist, und einem Anfangswert kann der Verlauf einer reellen Funktion rekonstruiert werden, z. B. durch das Eulersche Polygonzugverfahren.

Parallel hierzu werden bei einem stochastischen Prozess die Verläufe der Pfade durch lokale Änderungsraten bestimmt, deren zufälliges Schwanken in einer stochastischen Differenzialgleichung, z. B. $df(W) = f'(W)\,dW + dt$, festgelegt ist. In einer stochastischen Differenzialgleichung ist also der iterative Bauplan enthalten, der der Entstehung der Pfade zugrunde liegt.
Mit ihm können diskrete Näherungen und in günstigen Fällen, wie im Reellen, eine explizite Darstellung des Prozesses erhalten werden.
Itô gelang es, eine zur Analysis analoge Integraldarstellung einer stochastischen Differenzialgleichung anzugeben. Hierbei führte der Grenzwert von speziellen Summen zu einer Erweiterung des Integralbegriffs mit eigenen Rechenregeln. Dies ermöglichte auch, Erwartungswerte und Standardabweichungen von stochastischen Prozessen auf neuartige Weise zu bestimmen.

↑ Itô-Formel

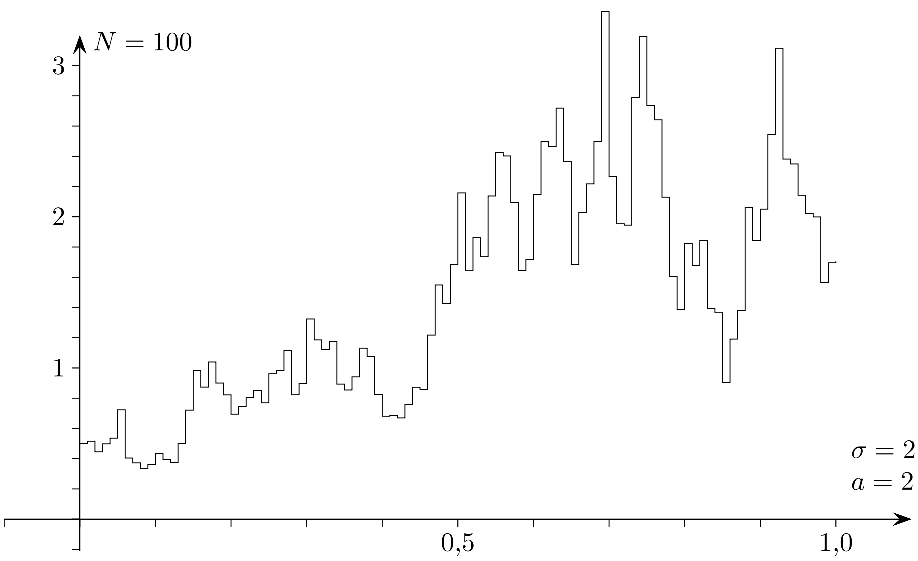
Für den Prozess $X_t = f(t, W_t)$ ist nach der diskreten Näherung gefragt.
Hierzu wird die Taylor-Entwicklung von f für zwei Variablen herangezogen und es werden Ersetzungen wie $(\Delta W)^2$ durch seinen Mittelwert vorgenommen. Das Ergebnis lautet:

$$dX_t = f_x(t, W_t)\, dW_t + f_t(t, W_t)\, dt + \frac{1}{2}\, f_{xx}(t, W_t)\, dt$$

Beispiel:

$$f(t, W) = 2 + t + e^W$$

$$\begin{aligned} df(t, W) &= e^W\, dW + dt + \frac{1}{2}\, e^W\, dt \\ &= \big[1 + \frac{1}{2}\, e^W\big]\, dt + e^W\, dW \end{aligned}$$



Die Grafik zeigt eine diskrete Näherung des stochastischen Prozesses S mit

$$dS = a\, S\, dt + \sigma\, S\, dW.$$

Mit der Itô-Formel kann

$S = S_0 e^{(a - \frac{1}{2}\sigma^2)\, t + \sigma W}$ nachgewiesen werden.

Sei durch

$$dS_t = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \quad \iff \quad S_t = \mu t + \sigma W_t$$

eine sogenannte arithmetische Brownsche Bewegung (μ, σ konstant) gegeben.
Mit ihr kann die Entwicklung der logarithmischen Rendite einer Aktie modelliert werden, siehe Seite 18. Es ist $S_t \sim \mathcal{N}(\mu t, \sigma^2 t)$.

Für die geometrisch Brownsche Bewegung $Z_t = e^{S_t}$ gilt dann (Nachweis mit der Itô-Formel):

$$dZ_t = (\mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2) Z_t\, dt + Z_t \sigma\, dW_t$$

$Z_t = S_0 \cdot e^{S_t}$ beschreibt den Aktienkurs, beachte $S_t = \ln \frac{Z_t}{S_0}$.

Mit der Verteilung von S_t sind Wahrscheinlichkeitsaussagen über den Kurs Z_t möglich:

$$P(Z_t > k) = P(S_0 \cdot e^{S_t} > k) = P(S_t > \ln \tfrac{k}{S_0})$$

Umgekehrt sei durch

$$dS_t = \mu\, S_t\, dt + \sigma\, S_t\, dW_t \quad \iff \quad S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\, t + \sigma\, W_t}$$

eine geometrisch Brownsche Bewegung gegeben.
Für $Z_t = \ln S_t$ gilt dann:

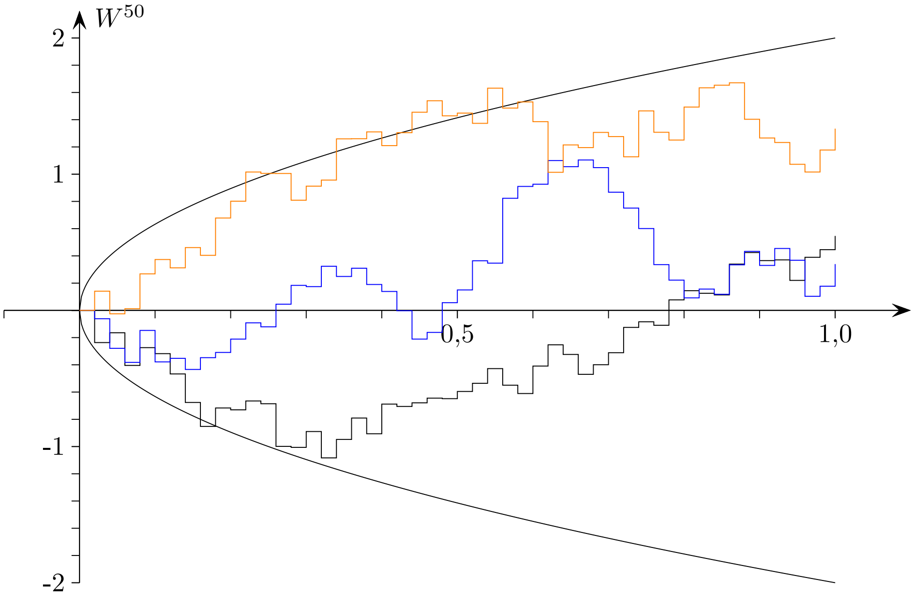
$$dZ_t = (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\, dt + \sigma\, dW_t$$

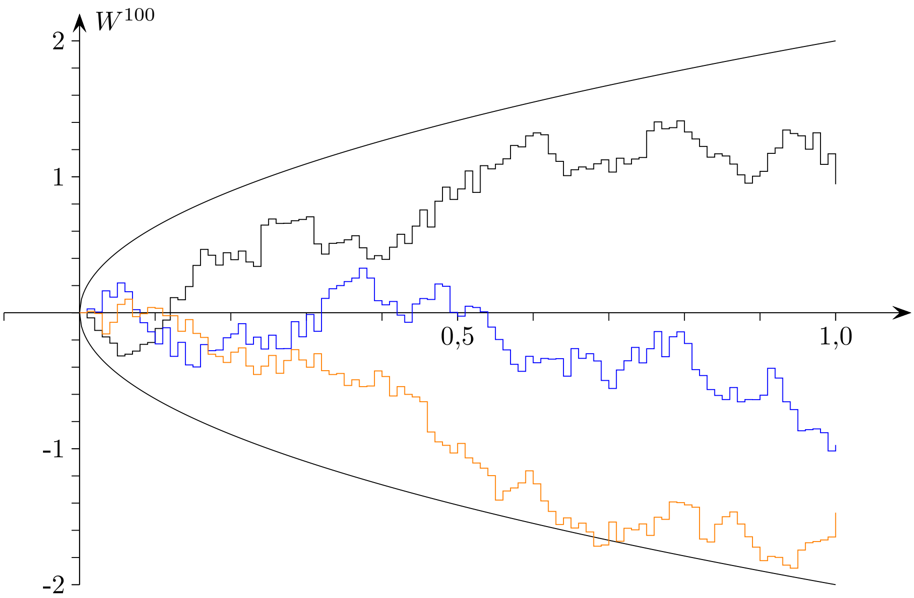
$\uparrow$ Wiener-Prozess $W^N \qquad N \longrightarrow \infty$

Der Wiener-Prozess wird durch seine diskreten Näherungen W^N erfasst, genauer durch eine Folge (W^N) mit $N \longrightarrow \infty$.

$$W_0^N = 0$$

$$W_{n+1}^N = W_n^N + \Delta W_n^N \qquad \text{mit} \quad \Delta W_n^N \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1), \quad \Delta t = \frac{1}{N}$$





Die mittlere Sprunghöhe $\sqrt{\Delta t}$ strebt gegen Null,
die mittlere Pfadlänge jedoch gegen Unendlich, $\sqrt{\Delta t} \cdot N = \sqrt{N}$.

↑ Wiener-Prozess W^N $\quad N \longrightarrow \infty$

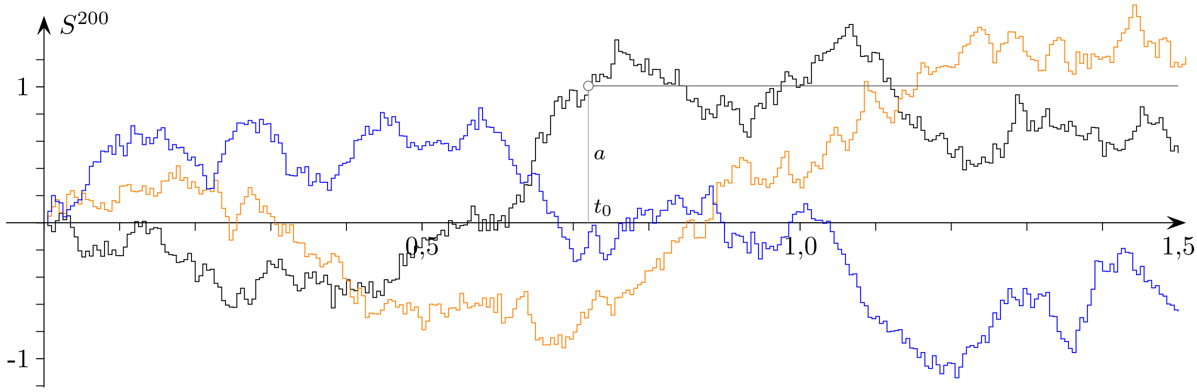
$$W_0^N = 0$$
$$W_{n+1}^N = W_n^N + \Delta W_n^N \qquad \text{mit} \quad \Delta W_n^N \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1)\,, \quad \Delta t = \frac{1}{N}$$

Die explizite Darstellung des diskreten Prozesses lautet:

$$S_t^N = \sum_{i \le t} \Delta W_i^N, \quad t \in \mathbb{R}$$

Für jedes t konvergiert S_t^N für $N \longrightarrow \infty$ gegen eine normalverteilte Zufallsvariable S_t (Grenzwertsatz) mit dem Erwartungswert 0 und der Varianz t.

Es gilt für $s < t$: $\quad S_t - S_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$
Diese Eigenschaft begrenzt die Pfadvariationen.



Der Wiener-Prozess ist ein Martingal. Was ist damit gemeint?
Nehmen wir an, dass wir einen Pfad bis zum Zeitpunkt t_0 durchlaufen und den Wert a erreichen. Was ist zukünftig im Mittel zu erwarten?
Der Erwartungswert aller Zuwächse ist Null.
Die möglichen Fortsetzungen des Pfades schwanken daher um a, also um den zuletzt beobachteten Wert. Für den bedingten Erwartungswert gilt $E(S_{t+\Delta t} \mid S_t) = S_t$. Der Drift ist null.

↑ Itô-Integration

Für die explizite Darstellung des diskreten Prozesses:

$$S_t^N = \sum_{i \le t} \Delta W_i^N, \quad t \in \mathbb{R}$$

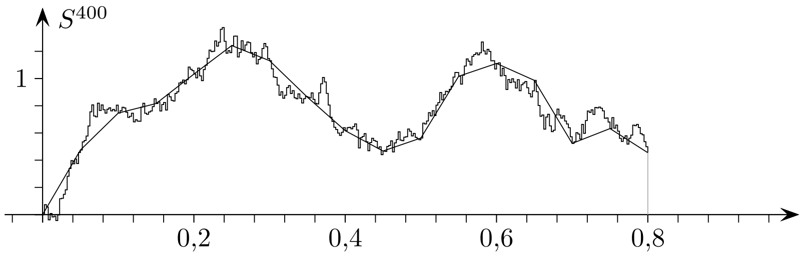
ist auch die Integralschreibweise möglich:
(Wie im Reellen, eine Rechtecksumme geht in ein Integral über.)

$$S_t^N = \int_0^t dW_i^N, \quad t \in \mathbb{R}$$

Für $N \longrightarrow \infty$ wird daraus

$$W_t = \int_0^t dW_u$$

Das Integral ist also für jedes t eine Zufallsvariable.
Hierbei wird für eine Zerlegung des Intervalls $[0, t]$ die Summe der Differenzen $W_{s+\Delta s} - W_s$ $(\sim \mathcal{N}(0, \Delta s))$ gebildet, es folgt $\Delta s \longrightarrow 0$.



Um eine stochastische Differenzialgleichung (SDG) wie z. B. $\quad dW^2 = 2W dW + dt$
zu integrieren,

$$W_t^2 = \int_0^t 2W_u dW_u + \int_0^t du$$

muss die Integraldefinition auf Summanden
der Art $f(W_s)(W_{s+\Delta s} - W_s)$ verallgemeinert werden.
Wir erhalten eine zur SDG gleichwertige Darstellung.

$$\int_0^t W_u dW_u = \frac{1}{2} W_t^2 - \frac{1}{2} t$$

$$\begin{aligned} dW_0^2 &= 0 \\ dW_1^2 &= 2W_1 dW_1 + \Delta t \\ dW_2^2 &= 2W_2 dW_2 + \Delta t \\ &\cdots \end{aligned}$$

$$W_t^2 = \int_0^t dW_u^2 \approx 2 \underbrace{\sum W_i dW_i}_{\approx \int_0^t W_u dW_u} + t$$

↑ Itô-Integration

Für den stochastischen Prozess $S = S_0 e^{(a-\frac{1}{2}\sigma^2)t+\sigma W}$ mit der SDG

$dS = a\,S\,dt + \sigma\,S\,dW$ soll der Erwartungswert $E(S_t)$ ermittelt werden.

An die diskreten Näherungen S^N sei nochmal erinnert:

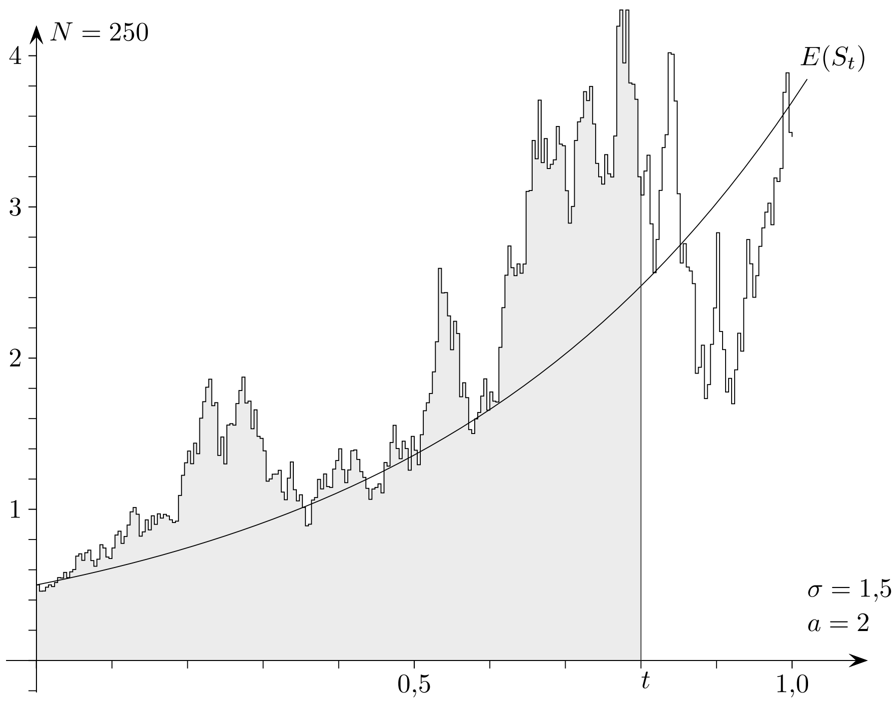
$$S_0^N = S_0$$
$$S_{n+1}^N = S_n^N + aS_n^N\,\Delta t + \sigma S_n\,\Delta S_n^N \qquad \text{mit} \quad \Delta S_n^N \sim \sqrt{\Delta t}\,\mathcal{N}(0,1), \quad \Delta t = \frac{1}{N}$$

Itô dachte quer. Er setzte nicht sukzessive ein, sondern addierte (links: $\Delta S_i^N = S_{i+1}^N - S_i^N$) jeweils die linken und rechten Seiten und interpretierte die Summen-Terme. Dies führt zu

$$S_t^N = \sum_{i\le t} \Delta S_i^N, \quad t \in \mathbb{R}$$

und für $N \longrightarrow \infty$ zur Integralgleichung, in der S_t (und nicht nur Näherungen) implizit erfasst wird:

$$S_t = S_0 \;+\; \underbrace{\int_0^t aS_t\,dt}_{\text{Zufallsvariable, siehe Grafik}} \;+\; \int_0^t \sigma S_u\,dW_u$$



Für den Erwartungswert gilt dann

$$E(S_t) = E(S_0) + \int_0^t aE(S_u)\,du \qquad \text{beachte:} \quad E(dW_u) = 0$$

Die Funktion $t \longrightarrow E(S_t)$ erfüllt damit die DGL $f'(t) = af(t)$. Dies ergibt $E(S_t) = S_0 e^{at}$.

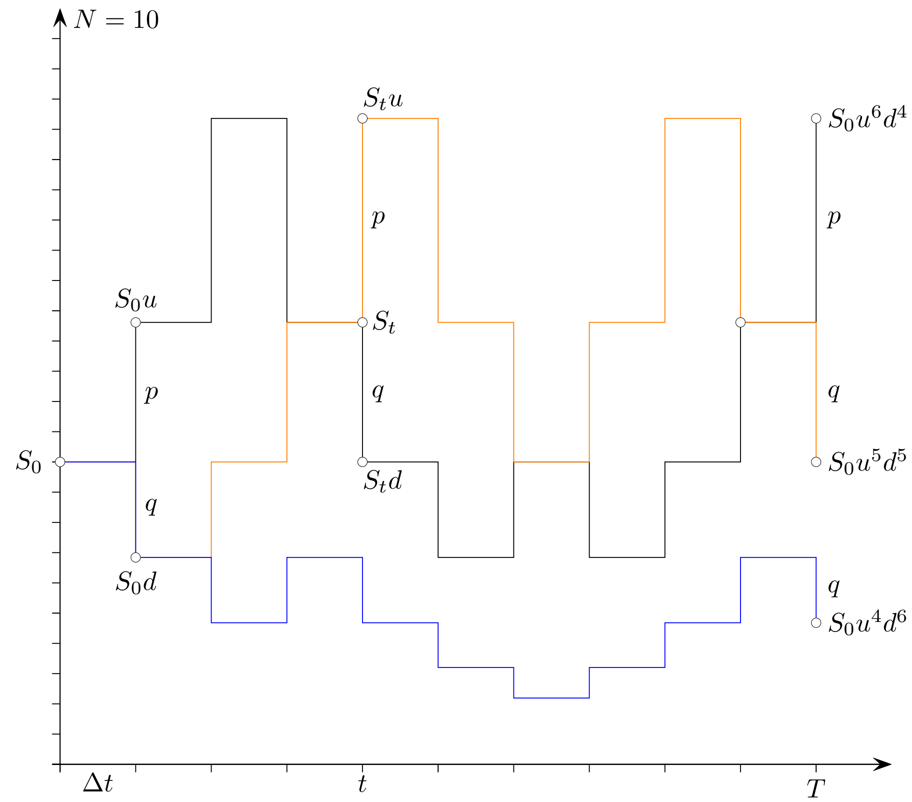
Ohne Nachweis sei erwähnt: $Var(S_t) = S_0^2 e^{2at}(e^{\sigma^2 t} - 1)$.

$\uparrow$ Binomialmodell

Der stochastische Prozess,

$$dS_t = a\,S_t\,dt + \sigma\,S_t\,dW_t \quad \iff \quad S_t = S_0 e^{(a-\frac{1}{2}\sigma^2)\,t+\sigma W_t}$$

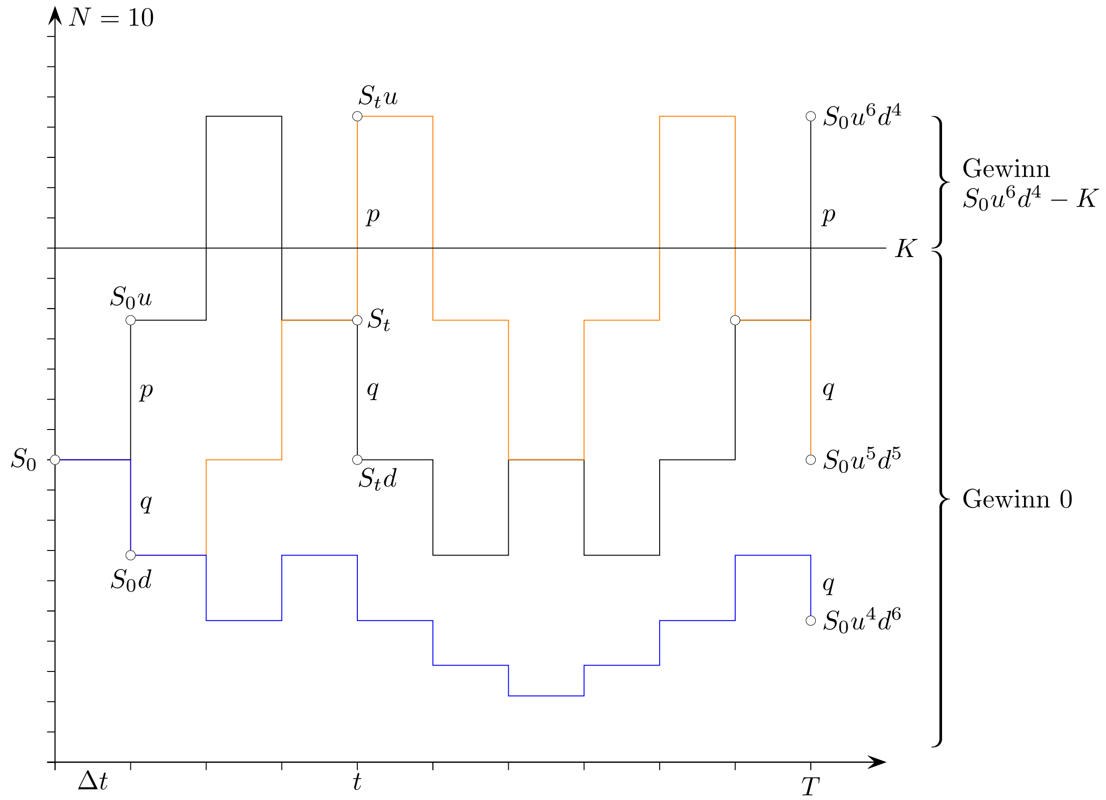
der zur Modellierung von Aktienkursverläufen geeignet ist, kann als Grenzprozess diskreter Näherungen (Cox-Ross-Rubinstein) gesehen werden, für die dann eine einfache Optionspreisberechnung möglich ist.



Die Eigenschaften des diskreten Prozesses sind in der Grafik enthalten.
Zu den Zeitpunkten $t = n \cdot \Delta t$ wird S_t mit der Wahrscheinlichkeit p mit u (up) und mit der Gegenwahrscheinlichkeit q mit d (down) multipliziert.
Für die Faktoren gilt $u \cdot d = 1$.
Hierdurch nehmen die 2^N Pfade nur die Zwischenwerte $S_0 u^n d^{N-n}$, $n = 0, \ldots, N$, an.

$\uparrow$ Optionspreisberechnung (naive Idee)

Mit einer Kaufoption (Call) erwirbt der Käufer durch Zahlung eines Optionspreises (Prämie) das Recht, eine bestimmte Anzahl von Aktion zu einem bestimmten Preis K am Ende einer festgelegten Laufzeit T zu beziehen oder das Optionsrecht verfallen zu lassen.



Wir betrachten den Prozess vom Zeitpunkt $t = 0$ aus.
Immer dann, wenn der Aktienkurs zum Zeitpunkt T über K liegt, wird ein Gewinn erzielt.
Der Erwartungswert E dieser Gewinne kann ermittelt werden.
Der faire Optionspreis ist nun der diskontierte Erwartungswert (Zinsrate r).
Die Berechnung kann auch in N Schritten (mit einem Tabellenkalkulationsblatt) erfolgen:

$$E_t = (1+r)^{-\Delta t}(p \cdot E^{up}_{t+\Delta t} + q \cdot E^{down}_{t+\Delta t})$$

Zu Beginn sind alle Wertepaare E^{up}_T, E^{down}_T am rechten Rand durch die Gewinne bekannt und somit auch ihr Erwartungswert. Die Diskontierungszeit beträgt Δt.
Auf diese Weise hangelt man sich bis E_0 vor.

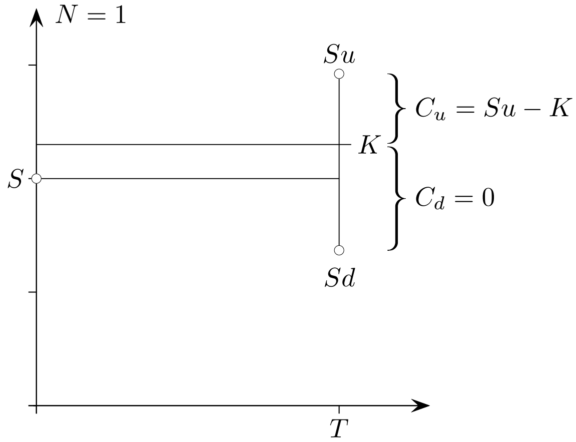
Für jedes Pfadende gilt: $E_T = \max(S_T - K, 0) \quad (= (S_T - K)^+)$
Hätte der Käufer das Recht, auch zu allen Zwischenzeiten $n \cdot \Delta t$ die Aktien zum Preis K zu kaufen (Bermuda-Option), so müsste die Rückwärtsiteration für die Bewertung in naheliegender Weise abgeändert werden zu:

$$E_t = \max\big((S_t - K)^+,\ (1+r)^{-\Delta t}(p \cdot E^{up}_{t+\Delta t} + q \cdot E^{down}_{t+\Delta t})\big)$$

Hierbei stellt sich die Frage nach der optimalen Ausübungszeit der Option (Stoppzeit).
Es erscheint angebracht, so lange zu warten, so lange der diskontierte Erwartungswert größer als $(S_t - K)^+$ ist.

↑ Preisberechnung einer Call-Option

Die Wahrscheinlichkeit p geht - entgegen aller Erwartung - jedoch nicht in die Berechnung des Optionspreises C ein.
Wie gleich ersichtlich werden wird, liegt das daran, dass es zum Kauf einer Option eine risikolose Alternative mit demselben Auszahlungsprofil gibt, die zudem nur vom Zinsfaktor r abhängt. Das hierfür notwendige Kapital sei C^*. Wäre $C > C^*$, so würde die verminderte Options-Nachfrage dessen Preis so weit senken, bis Gleichheit herrscht. Umgekehrt ergäbe sich für $C < C^*$ eine Bewegung von rechts nach links.
C^* stimmt daher mit dem Optionspreis C überein. Wie sieht nun die Alternative aus?
Betrachten wir zunächst das Binomialmodell für $N = 1$ $\;(u \cdot d = 1$ wird nicht vorausgesetzt).



Die Auszahlung kann - abhängig vom Aktienkurs - zur Zeit T nur die Werte C_u oder C_d annehmen.
Welche Zusammenstellung (Portfolio) an Kapital und Aktien führt zur selben Auszahlung?
Hierbei kann als Eigenkapital nur C^* verwendet werden, ein aufgenommener Kredit B (mit späterer Rückzahlung zum Termin T) wäre aber möglich.

Es wird also ein Kredit B aufgenommen und mit dem Kapital $C^* + B$ ein Anteil Δ der Aktie S gekauft, so dass

$$\begin{aligned} Su\Delta - Br &= Su - K \\ Sd\Delta &= Br \end{aligned}$$

gegeben ist (Verzinsungsfaktor r, Jahreszinsfaktor bezogen auf das Zeitintervall).

Die 1. Gleichung beinhaltet, dass vom erhöhten Aktienkurs zur Zeit T der verzinste Kredit zurückgezahlt werden kann und noch die Auszahlung C_u übrig bleibt.
Die 2. Gleichung beinhaltet, dass der verminderte Aktienwert $Sd\Delta$ nur der Tilgung des Kredits dient.
Zum Zeitpunkt $t = 0$ kann mit $C^* + B$ der Aktienwert $S\Delta$ gekauft werden, d. h. es ist dafür das Kapital $C^* = S\Delta - B$ erforderlich. Δ und B ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems.
Zum selben Ergebnis gelangt man, indem mit der Lösung der Gleichung $S = \frac{1}{r}\big(pSu + (1-p)Sd\big)$, nämlich $p^* = \dfrac{r-d}{u-d}$ (sogenannte risikoneutrale Wahrscheinlichkeit, Voraussetzungen $d \le r \le u$, $d < u$), der diskontierte Erwartungswert der Auszahlung bestimmt wird, $C^* = \frac{1}{r}E_{p^*}(S_T - K)^+$.
Für ein N-stufiges Binomialmodell erfolgt die Berechnung von C^* durch Rückwärtsiteration mit p^*.

↑ Rückwärtsiteration

Für den allgemeinen Schritt ist das Gleichungssystem nach Δ und B

$$\begin{array}{rcl} Su\Delta - Br & = & C_u \\ Sd\Delta - Br & = & C_d \\ \hline \end{array}$$

zu lösen.

Die 1. Gleichung beinhaltet, dass vom erhöhten Aktienkurs (Intervall ΔT) der verzinste Kredit zurückgezahlt werden kann und noch die Auszahlung C_u übrig bleibt.
Die 2. Gleichung beinhaltet das Entsprechende für den verminderten Aktienwert.
Der Optionspreis lautet dann:

$$C_0 = S\Delta - B = \frac{(r-d)C_u + (u-r)C_d}{(u-d)r}$$

oder

$$C_0 = \frac{1}{r}\left(p^* C_u + q^* C_d\right) \qquad \text{mit} \quad p^* = \frac{r-d}{u-d}, \quad q^* = 1 - p^* = \frac{u-r}{u-d}$$

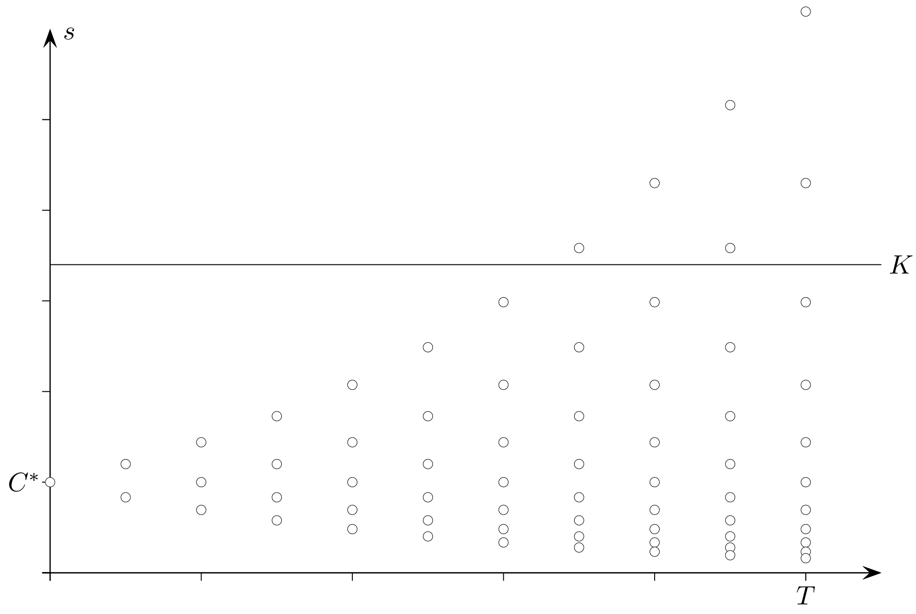
Hervorzuheben ist, dass p^* und q^* keine echten Wahrscheinlichkeiten sind, auch wenn es zweckmäßig ist, sie als solche zu interpretieren.

Die Rückwärtsiteration der wiederholten Berechnung der diskontierten Erwartungswerte berücksichtigt die unterschiedlichen Anzahlen der Pfade mit gleichem Ende.

Der Optionspreisberechnung liegt das Hedgen zugrunde (to hedge, engl. absichern).
Mit dieser Strategie könnte der Verkäufer (Emittent) einer Call-Option das Risiko eines Verlustes mindern bzw. eliminieren, indem er mit der Optionsprämie ein paralleles, seiner Zahlungsverpflichtung gleichwertiges Portfolio aus Kapital und Aktien anlegt und dieses der Aktienkursentwicklung jeweils anpasst.

In der Finanzmathematik entspricht einem Preis (hier Optionspreis) dem fairen Einsatz bei einem Glücksspiel, Verlust- und Gewinnmöglichkeit sind im Schnitt ausgeglichen.
Anders formuliert:
Es besteht für den Verkäufer und Käufer keine Arbitrage-Möglichkeit, also ohne einen eigenen finanziellen Aufwand mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn zu erzielen, auch wenn z. B. der Verkäufer einer Option mit der Optionsprämie eine noch so geschickte Handelsstrategie verfolgt.
Die in der Praxis anfallenden Gebühren und Provisionen bleiben in der Theorie unberücksichtigt.
Beachtenswert ist, dass die tatsächlichen Wahrscheinlichkeiten von Kursänderungen p und q in die Bewertung von Optionen nicht eingehen. Mit Hilfe der bekannten Kursschwankungen (Volatilität) werden die Terme p^* und q^* berechnet, von denen es zweckmäßig ist, sie als sogenannte risikolose Wahrscheinlichkeiten zu betrachten.

↑ Preisberechnung einer Call-Option



Für das N-stufige Binomialmodell lautet die Formel (siehe Bernoulli-Kette) für den Optionspreis:

$$C^* = \frac{1}{r^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot p^{*k} \cdot q^{*n-k} \cdot (Su^k d^{n-k} - K)^+, \qquad p^* = \frac{r-d}{u-d}, \quad q^* = 1 - p^*$$

Hierbei brauchen nur die Summanden berücksichtigt werden, für die $(Su^k d^{n-k} - K)^+ > 0$
d. h. $Su^k d^{n-k} > K$ ist. Die Summation beginnt mit dem kleinsten a, für das $Su^a d^{n-a} > K$ ist.
In die Berechnung von C^* geht nicht die den Aktienverlauf bestimmende Wahrscheinlichkeit p ein, sondern nur die Auf- und Abwärtsbewegungen u und d, die sich aus der Standardabweichung (Volatilität, lat. volatilis fliegend, flüchtig) berechnen lassen, $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Hierbei ist σ die Standardabweichung der logarithmischen Rendite $\ln \frac{S_N}{S_0}$.

Sie wird als auf $[0, T]$ bezogene, also mit $\sqrt{N}$ multiplizierten, Standardabweichung der logarithmischen Renditen (z. B. Tages-, Wochen-Renditen)

$$\ln \frac{S_1}{S_0},\ \ln \frac{S_2}{S_1},\ \ldots\ ,\ \ln \frac{S_N}{S_{N-1}}$$

für die N aufeinanderfolgenden gleichen Zeitabschnitte ermittelt.

$$\ln \frac{S_N}{S_0} = \ln\left(\frac{S_1}{S_0} \cdot \frac{S_2}{S_1} \cdot \ldots \cdot \frac{S_N}{S_{N-1}}\right) = \ln \frac{S_1}{S_0} + \ln \frac{S_2}{S_1} + \ldots + \ln \frac{S_N}{S_{N-1}}$$

Die logarithmische Rendite $\ln(R_k)$ schwankt also nach oben im Schnitt auf $\ln(R_k) + \sigma \quad (\Delta t = 1)$, die Rendite R_k dann auf $e^{\ln(R_k)+\sigma} = R_k \cdot e^\sigma$ und der Aktienkurs schließlich auf $S_{k+1} = S_k \cdot e^\sigma = Su$.

u, d und p werden so gewählt, dass Erwartungswert und Varianz des Binomialmodells und des stochastischen Prozesses S_t annähernd übereinstimmen. Hierfür gibt es mehrere Möglichkeiten (siehe später).

↑ Modellannahmen

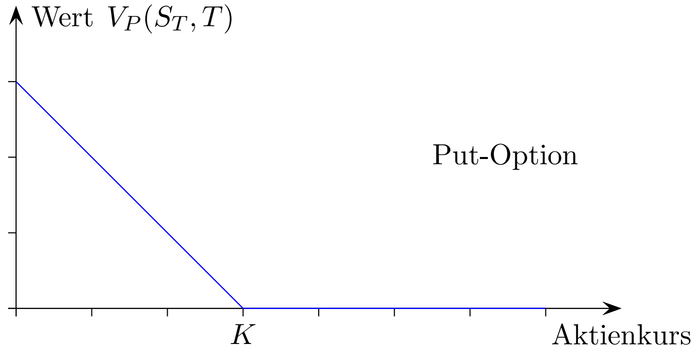
In der Optionspreisberechnung stecken viele vereinfachende Annahmen, unter anderem:

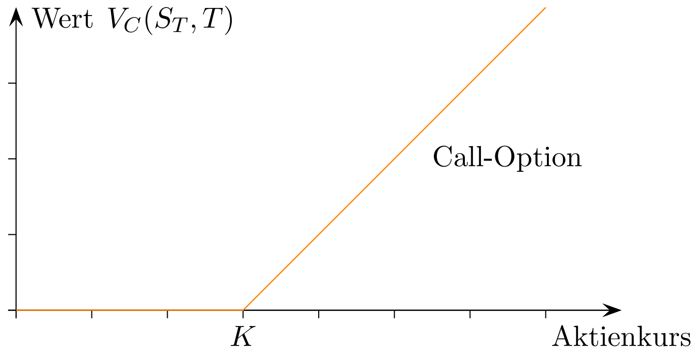
- Zinssätze für Geldanlagen und Kredite sind gleich und zeitlich konstant.
- Es entstehen keine Gebühren (Transaktionskosten).
- Eine Aktie ist beliebig teilbar.

Wenn all dies vorläge, wäre der Kauf einer Option im Prinzip überflüssig; das Auszahlungsprofil könnte auch in Eigenregie erzeugt werden.

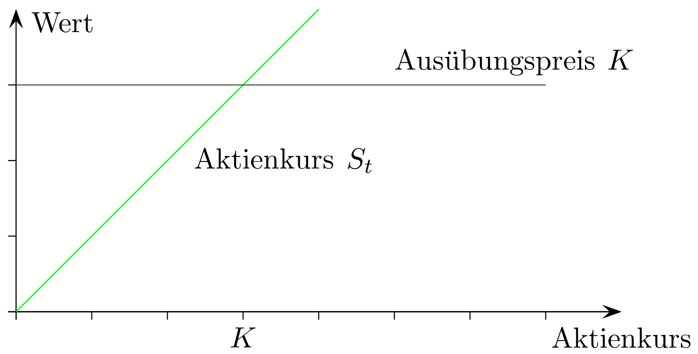
↑ Put-Call-Parität

Mit einer (europäischen) Verkaufsoption (Put) erwirbt der Optionsnehmer durch Zahlung einer Prämie das Recht, ein Wirtschaftsgut zu einem bestimmten Preis K am Ende einer festgelegten Laufzeit T zu verkaufen oder das Optionsrecht verfallen zu lassen.
Sei wieder S_t der Kurs einer Aktie.
Der Wert $V_P(S_t, t)$ einer Put-Option zur Ausübungszeit T beträgt $V_P(S_T, T) = \max(K - S_T, 0)$.
Die Auszahlungsprofile haben dann folgendes Aussehen:



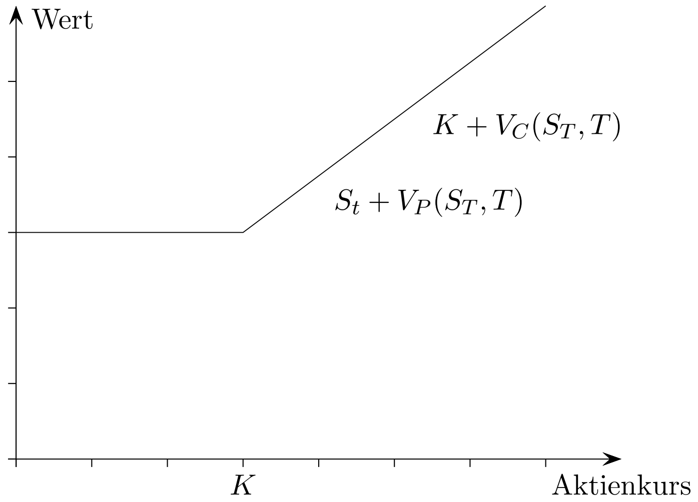


Mit der Hinzunahme der zunächst wenig aussagekräftigen Graphen für S_t und K



kann die Gleichheit $\quad K + V_C(S_T, T) = S_t + V_P(S_T, T) \quad$ erkannt werden.

↑ Put-Call-Parität

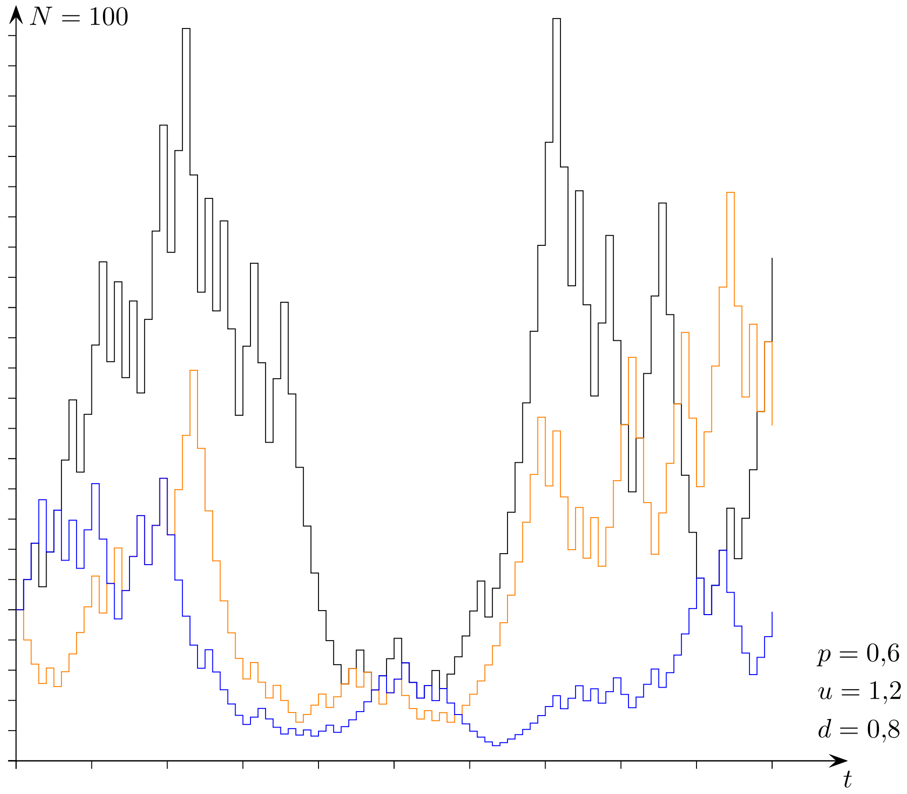


Für einen früheren Zeitpunkt t muss dann gelten: $Ke^{-r(T-t)} + V_C(S_t, t) = S_t + V_P(S_t, t)$
K wird diskontiert.

Würde diese Beziehung nicht eingehalten, wäre z. B. $Ke^{-r(T-t)} + V_C(S_t, t) > S_t + V_P(S_t, t)$,
so wäre ein Verkauf des linken Terms (Portfolios) bei gleichzeitigem Kauf des rechten Terms vorteilhaft, ein risikoloser Arbitragegewinn könnte erzielt werden, da am Verfallstag beide Seiten denselben Betrag erbringen. Die Nachfrage nach dem rechten Term wird dessen Preis so weit in die Höhe treiben, bis Gleichheit herrscht.

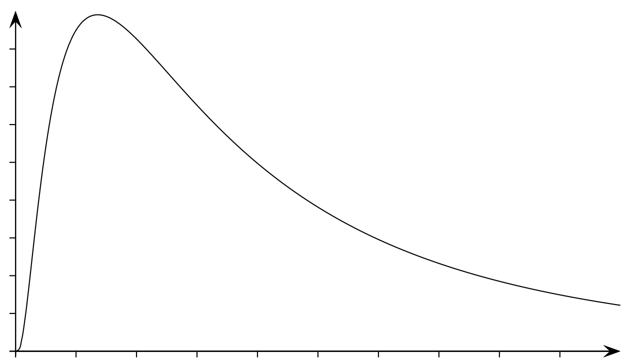
Nachzutragen bleibt:
Eine Option ist für den Inhaber natürlich nur dann gewinnbringend,
wenn die Auszahlung (Payoff) die Optionsprämie (samt Verzinsung) überwiegt.

Arbitrage bezeichnet einen am Finanzmarkt erzielbaren risikofreien Gewinn.
Beispielsweise könnte ein Produkt auf zwei verschiedenen Märkten zu unterschiedlichen Preisen gehandelt werden. Indem man das Produkt auf dem "billigeren" Markt kauft und auf dem "teureren" Markt verkauft, könnte man einen risikofreien Profit erzielen. In der Praxis wird diese Möglichkeit nur für kurze Zeit bestehen, die Preise werden sich umgehend angleichen. In der Finanzmathematik geht man bei Preisberechnungen daher gleich von einer Arbitrage-Freiheit aus.



Die Zufallsvariable $\ln B_t^N$ (nun Summe!, t fest, $B_0^N = 1$) ist nach dem Grenzwertsatz (annähernd) normalverteilt. B_t^N besitzt daher eine logarithmische Normalverteilung (auch Lognormalverteilung) mit der Dichtefunktion (siehe Summe, Produkt, Quotient von Zufallsvariablen, Seite 6):

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\,x}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2}$$



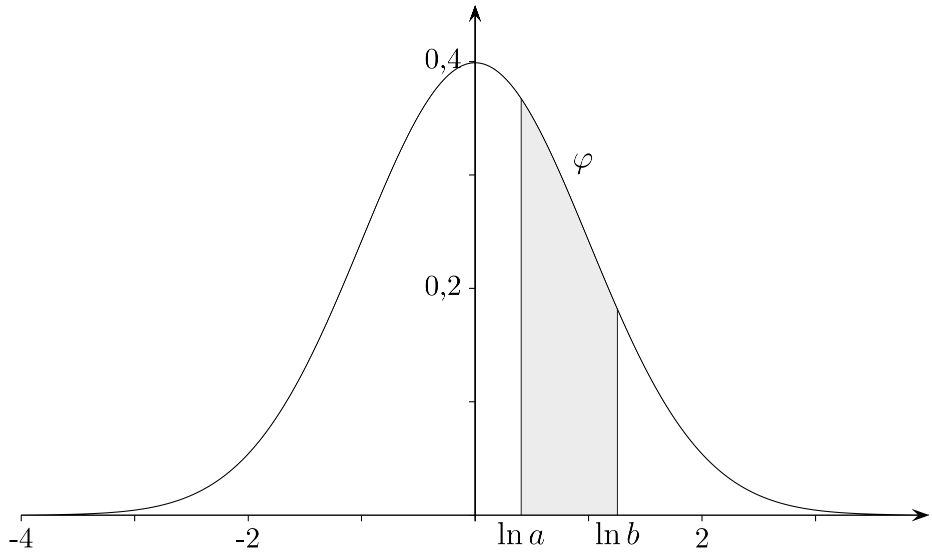
Beachte: $\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$

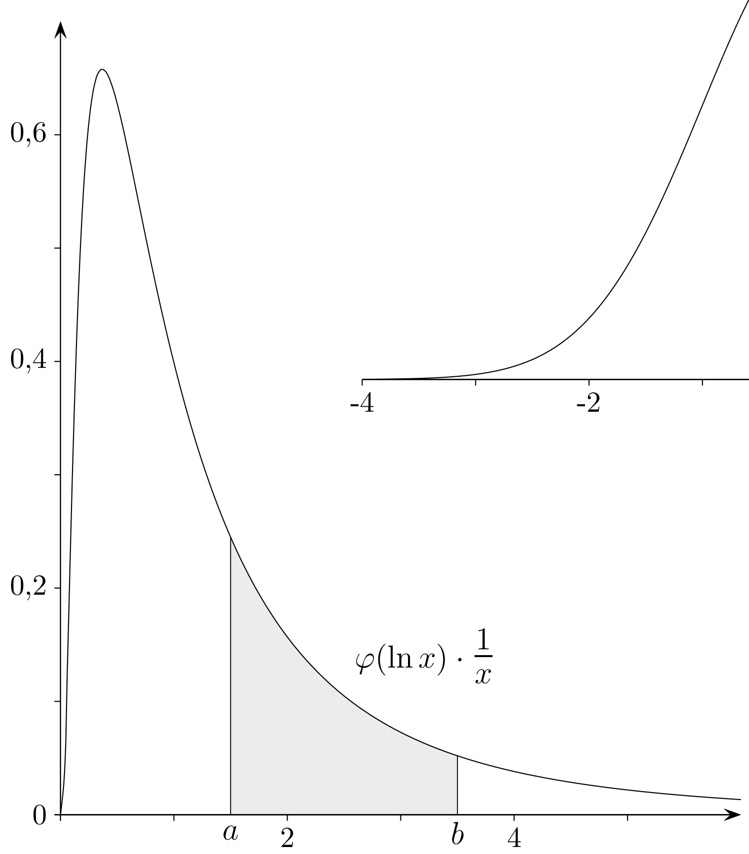
Z. B. würde das Einsetzen von $2x$ (statt $\ln x$) eine Multiplikation mit 2 erfordern, um die Stauchung auszugleichen, damit der Flächeninhalt 1 erhalten bleibt.

↑ Logarithmische Normalverteilung

Für eine Zufallsvariable $X = \prod_n X_n$ ist der logarithmierte Wert $\ln X = \sum_n \ln(X_n)$ (unter schwachen Voraussetzungen, Grenzwertsatz) annähernd normalverteilt.
Falls dem so ist, ist X log-normalverteilt.

Hierzu beachte man folgende Zusammenhänge:





$$\begin{aligned}
P(a \leq X \leq b) &= P(\ln a \leq \ln X \leq \ln b) \\
&= \int_{\ln a}^{\ln b} \varphi(x)\, dx \\
&= \Phi(\ln b) - \Phi(\ln a) \\
&= \int_a^b \varphi(\ln x) \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}\, x}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} dx
\end{aligned}$$

Das Binomialmodell B_t^N konvergiert gegen den stochastischen Prozess

$$dS_t = a\,S_t\,dt + \sigma\,S_t\,dW_t\,.$$

Hierzu vergleichen wir die Logarithmen der Erwartungswerte und der Varianzen.

Für $Z_t = \ln S_t$ war: $\quad dZ_t = (a - \frac{1}{2}\sigma^2)\,dt + \sigma\,dW_t$

Sei $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ und $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

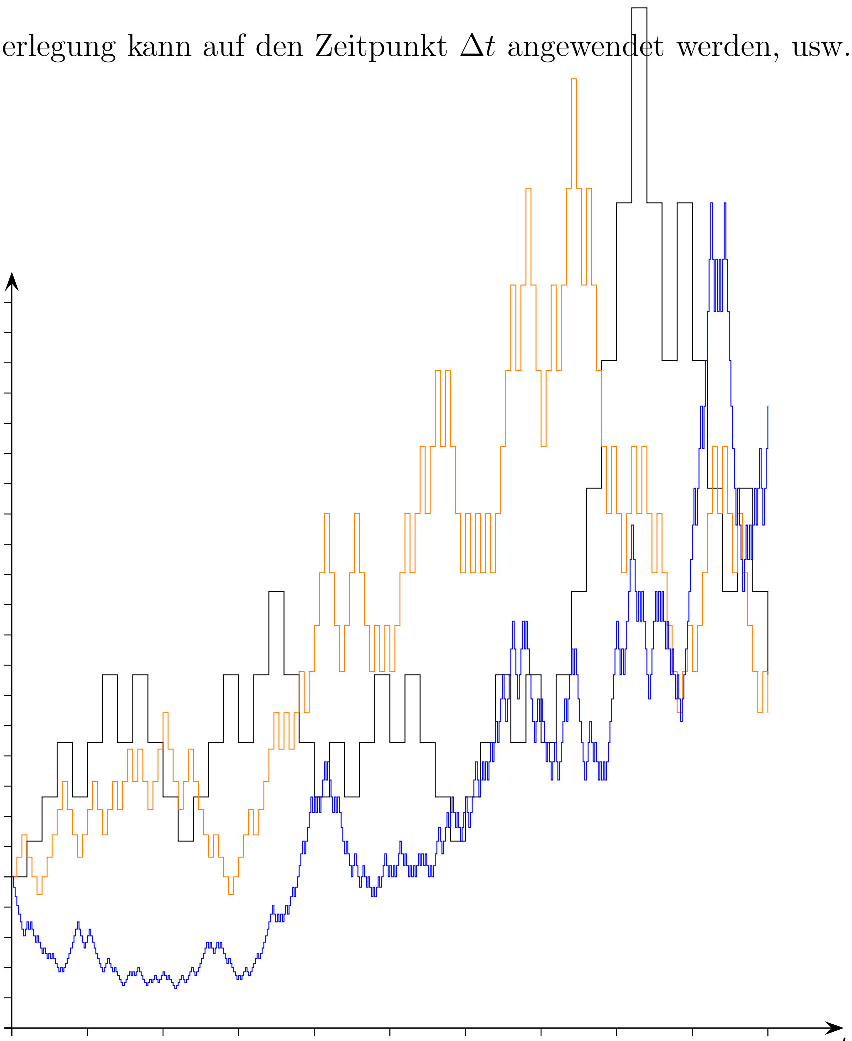
$$p \cdot \ln(u\,B_t^N) + q \cdot \ln(d\,B_t^N) \;=\; \ln(S_t) + (a - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\,\Delta t \quad (= E)$$

Mit $B_0^N = S_0$ folgt $\quad p = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{\Delta t}}{2\sigma}(a - \frac{1}{2}\sigma^2)$.

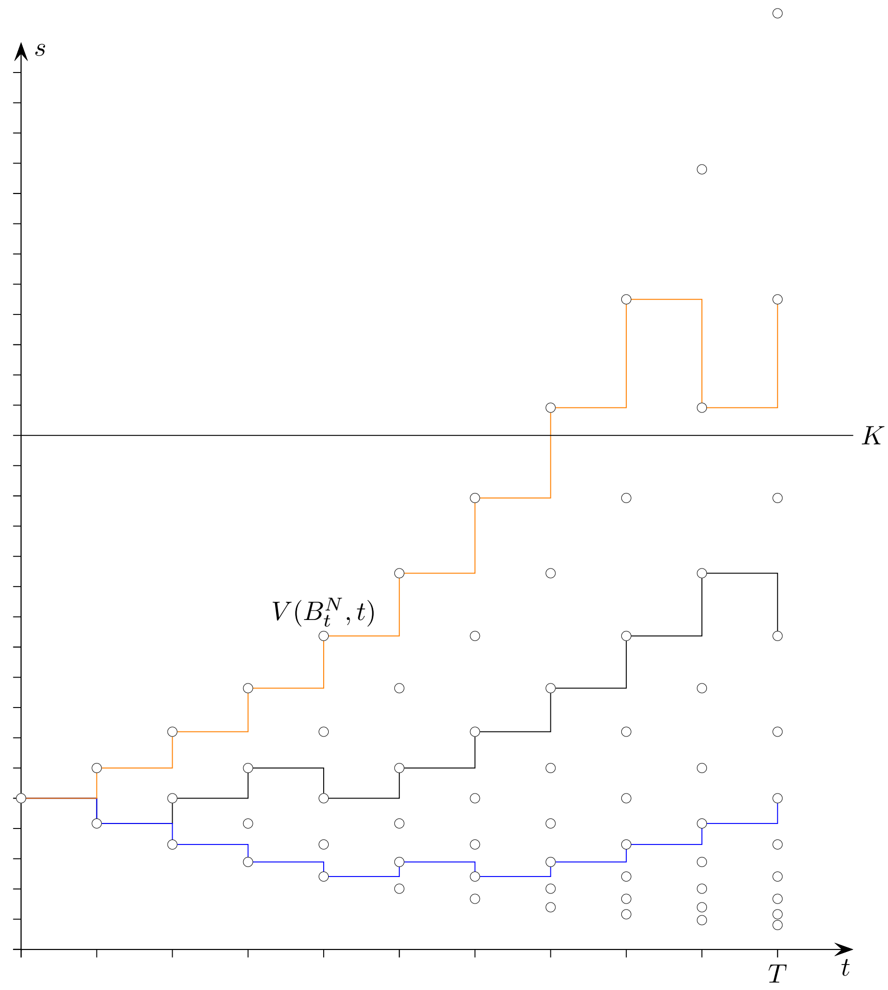
Mit diesem p gilt auch (bis auf Terme, die klein gegen Δt sind):

$$p \cdot (\ln(u\,B_t^N) - E)^2 + q \cdot (\ln(d\,B_t^N) - E)^2 \;=\; \sigma^2\,\Delta t$$

Dieselbe Überlegung kann auf den Zeitpunkt Δt angewendet werden, usw.

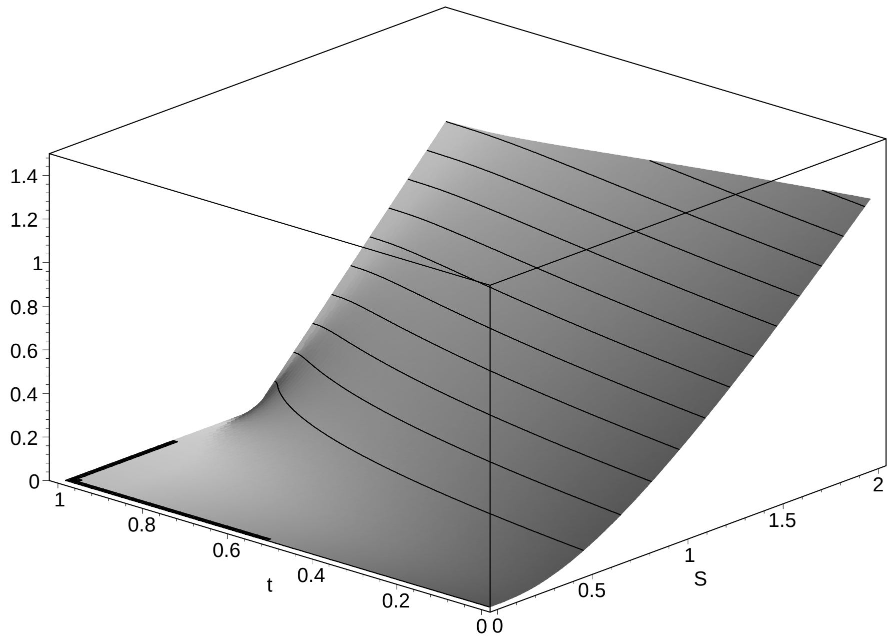


$\uparrow$ Binomialmodell $B_t^N \quad N \longrightarrow \infty$



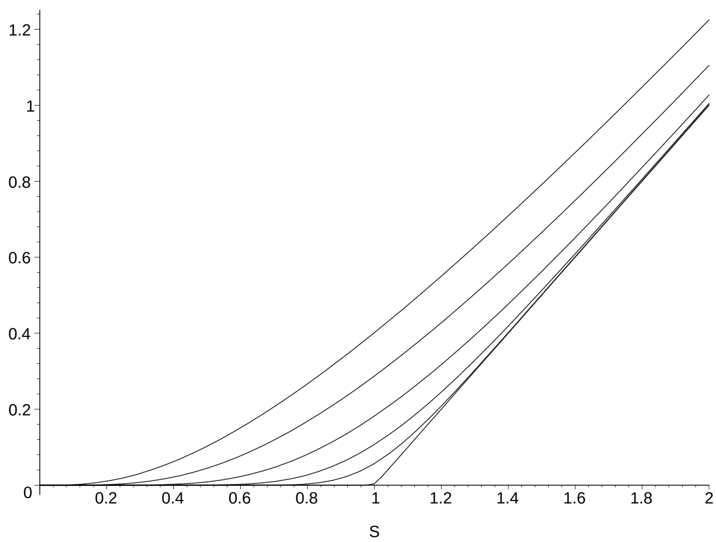
Der Optionswert $V(B_t^N, t)$ kann durch Rückwärtsrechnen - wie oben beschrieben - für alle Wertepaare (B_t^N, t) ermittelt werden, da die Werte für den rechten Rand vorliegen.
Hierbei legt man jedoch nicht p sondern die sogenannte risikoneutrale Wahrscheinlichkeit p^* zugrunde. Aufgrund des einfachen Modells kann eine Formel für $V(B_t^N, t)$ angegeben werden, der die Binomialverteilung zugrunde liegt. Da diese mit der Normalverteilung approximiert werden kann, liegt es nahe, eine Untersuchung für $N \longrightarrow \infty$ vorzunehmen (Cox-Ross-Rubinstein, 1979).

Black und Scholes (1973) beschritten einen anderen Weg. Sie betrachteten $V(S_t, t)$ als stochastischen Prozess, wendeten hierauf die Itô-Formel an und konnten eine partielle Differentialgleichung für $V(s, t)$ herleiten und lösen. Der Optionswert $V(s, t)$ ist dann eine Funktion mit zwei Variablen, die als Fläche grafisch dargestellt werden kann.



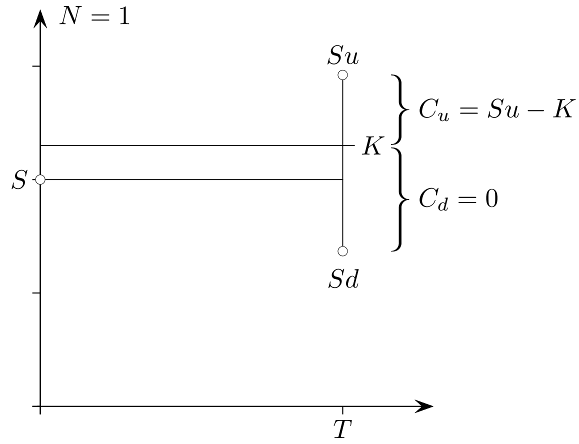
$K = 1,\ \ r = 0{,}06,\ \ T = 1,\ \ \sigma = 1$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - rV + rS\frac{\partial V}{\partial S} = 0$$



↑ Black-Scholes Gleichung

Die partielle DGL kann (mit dem Vorigen) auf genial einfache Weise hergeleitet werden.
Hierzu erinnern wir uns an das diskrete Vorgehen.



$$\begin{aligned} Su\Delta - Br &= Su - K \\ Sd\Delta &= Br \end{aligned}$$

$C^* = \Delta S - B$, Δ und B (Bond, geliehenes Kapital) ergeben sich als Lösung des Gleichungssystems.
Mit dem Optionspreis C^* und der Hedge-Strategie kann der Emittent der Call-Option seine Zahlungsverpflichtung abfedern.
Der Emittent muss genau denjenigen Anteil Δ kaufen, der ihn unabhängig von der zufälligen Aktienkursentwicklung macht (er verfolgt eine risikoneutrale Anlagestrategie).
Im zeitstetigen Fall kann das hierzu erforderliche Kapital $B(C, S) = \Delta S - C$,
oder in üblicher Schreibweise $\Pi(V, S) = \Delta S - V$, als stochastischer Prozess angesehen werden, für den $d\Pi = \Delta dS - dV$ gilt.
Hierbei wird $dS = \mu S\, dt + \sigma S\, dW$ angenommen. Mit Itô wissen wir:

$$dV = \Big(\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Big)\, dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\, dW$$

Zusammen ergibt das:

$$d\Pi = -\Big(\mu S\big(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\big) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Big)\, dt + \sigma S\big(\frac{\partial V}{\partial S} - \Delta\big) dW$$

Das stochastische Risiko wird nun durch die Wahl $\Delta = \dfrac{\partial V}{\partial S}$ (diskret $\Delta = \dfrac{C_u - C_d}{S_u - S_d}$)
eliminiert und wir erhalten die deterministische Gleichung:

$$d\Pi = -\Big(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\Big)\, dt$$

Vom Bond Π ist bekannt (beachte die Definition von Π und die Wahl von Δ):

$$d\Pi = r\Pi dt = \Big(rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV\Big)\, dt$$

Aus den beiden Gleichungen für $d\Pi$ folgt die Black-Scholes Gleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

↑ Black-Scholes Gleichung

Mehrere Variablentransformationen führen die Black-Scholes Gleichung

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} = rV$$

in die Wärmeleitungsgleichung über, mit der die Temperaturverteilung in einem Körper beschrieben werden kann.

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 D}{\partial y^2}$$

Die Wärmeleitungsgleichung wird mit der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung gelöst. Durch Rücktransformation auf die alten Variablen S und t erhalten wir die Black-Scholes-Formel:

$$V_{\text{Call}}(S,t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)$$

$$d_{1/2} = \frac{\ln\frac{S}{K} + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

Dieses Ergebnis kann auf mehreren, gänzlich verschiedenen Wegen gewonnen werden. Von ihnen sei einer noch skizziert.

↑ Black-Scholes-Formel

Mit der stochastischen Differentialgleichung

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t$$

wird das Verhalten der relativen Aktienkursänderung bzw. der Aktienrendite modelliert.
Diese unterliegt innerhalb eines kleinen Zeitintervalls Δt einer Normalverteilung mit Erwartungswert $\mu \cdot \Delta t$ und Varianz $\sigma^2 \cdot \Delta t$.

$$\frac{\Delta S_t}{S_t} \sim \mathcal{N}(\mu \cdot \Delta t, \sigma^2 \cdot \Delta t)$$

Für den Aktienkurs selbst wird damit ein exponentieller Verlauf erwartet.
Dieser schließt negative Aktienkurse aus.

Für den logarithmierten Aktienkursprozess gilt:

$$d \ln(S_t) = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})\, dt + \sigma\, dW_t$$

$$\ln(S_T) \sim \mathcal{N}\big(\ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T, \sigma^2 \cdot T\big)$$

d.h. $\ln(S_T)$ ist normalverteilt mit den Parametern

$$E(\ln(S_T)) = \ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2}) \cdot T \quad \text{und}$$

$$Var(\ln(S_T)) = \sigma^2 \cdot T$$

S_T ist dann lognormalverteilt mit diesen Parametern, die Dichte lautet:

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T}s}\, e^{-\frac{1}{2}\Big[\frac{\ln(\frac{s}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2} \cdot T)}{\sigma \cdot \sqrt{T}}\Big]^2}, \qquad s > 0$$

Der diskontierte Erwartungswert

$$e^{-rT} \cdot \int_K^\infty (s - K) \cdot g(s)\; ds$$

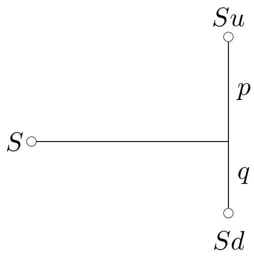
ist noch nicht der Preis für eine Kaufoption (siehe naive Idee).
Eine geringfügige Abänderung führt jedoch zum Richtigen.

In dem Erwartungswert steckt die stochastische Zufälligkeit der Aktienkursentwicklung, von der der Optionspreis unabhängig ist.
Statt wie oben p durch p^* zu ersetzen, müsste hier lediglich . . ..

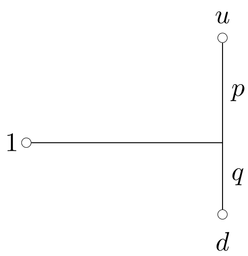
Das schon Bekannte kann mit mehreren Variablensubstitutionen wiederentdeckt werden.

↑ Black-Scholes Gleichung

Kehren wir zum diskreten Fall zurück.



Der Übergang zur Aktienrendite bedeutet:



Mit dem Erwartungswert μ gilt: $\quad \mu = pu + qd \quad \Longrightarrow \quad p = \dfrac{\mu - d}{u - d}$

Der Optionspreisberechnung liegt $p^* = \dfrac{r - d}{u - d}$ zugrunde.

μ ist daher durch r, der risikolosen Verzinsungsrate, zu ersetzen.

Girsanov (1960) zeigte allgemein, wie das Wahrscheinlichkeitsmaß abgeändert werden kann, um einen Prozess mit bestimmtem Drift zu erhalten. Bei der Optionspreisberechnung ist der Drift null, die Volatilität gleichgeblieben. Der Prozess der diskontierten Aktienwerte $e^{-rt}S_t$ ist mit dem neuen Wahrscheinlichkeitsmaß ein Martingal, es ist dann $E(S_t) = S_0 e^{rt}$ (siehe Seite 12).
Für die Ermittlung des fairen Optionspreises, bei dem weder der Käufer noch der Verkäufer eine Arbitrage-Möglichkeit hat, ist die Martingal-Eigenschaft des Prozesses charakteristisch.

Siehe auch: Brownsche Bewegung
Poisson-Prozess
Startseite