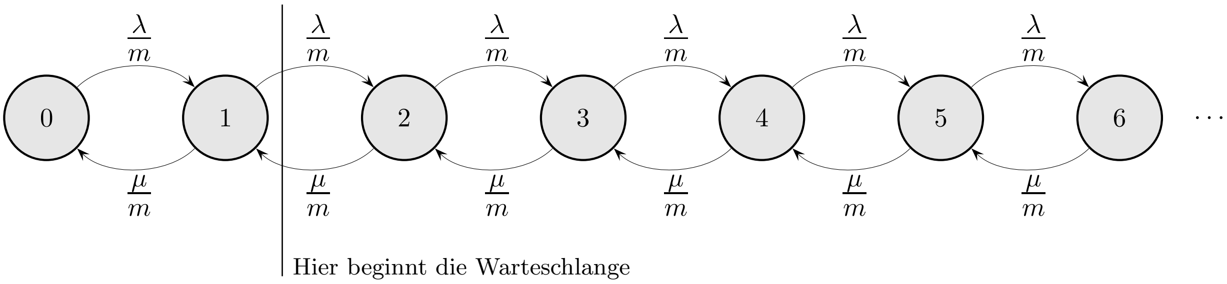
Warteschlangentheorie

Ankunftsrate λ, z. B. 15 Personen pro Stunde
Bedienrate μ, z. B. 20 Personen pro Stunde

m sei so groß gewählt, dass pro Takt höchstens eine Person ankommt, bzw. abgefertigt wird.
Mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{\lambda}{m}$ erhöht sich die Anzahl der Personen um Eins, mit $1 - \frac{\lambda}{m} - \frac{\mu}{m}$ bleibt die Anzahl gleich.



Wir haben es hier mit einer Irrfahrt eines Teilchens auf einem Graphen zu tun (Markow-Kette).
Es startet in einem beliebigen Zustand. Uns interessiert die durchschnittliche Länge der Warteschlange, die Verweil- und die Wartezeit.

Ermitteln wir zunächst die stationäre Verteilung $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots$
mit den Gleichgewichtsbeziehungen:

1. $\quad \frac{\lambda}{m} \cdot p_0 = \frac{\mu}{m} \cdot p_1$

oder

1. $\quad \lambda \cdot p_0 = \mu \cdot p_1$ $\qquad$ m fällt stets heraus, wir lassen es zukünftig gleich weg.
2. $\quad \lambda \cdot p_1 + \mu \cdot p_1 = \lambda \cdot p_0 + \mu \cdot p_2$

und mit 1.

2. $\quad \lambda \cdot p_1 = \mu \cdot p_2$ $\qquad$ entsprechend
3. $\quad \lambda \cdot p_2 = \mu \cdot p_3$

$\ldots$

Damit erhalten wir:

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_0$$

$$p_2 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot p_0$$

$$p_3 = \frac{\lambda}{\mu} \cdot p_1 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot p_0$$

$$\ldots$$

Die Summe der geometrischen Reihe beträgt 1, daraus folgt mit der Summenformel $p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$.
Das Ergebnis kann einfacher direkt $\mu(1 - p_0) = \lambda$ entnommen werden, siehe 1., 2., ...

Warteschlangentheorie Formeln

$$L_{\text{Anzahl der Personen im System}} = \sum_{n\geq 0} np_n = (1-\rho)\sum_{n\geq 0} n\rho^n = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}, \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$L_{\text{Anzahl der Personen in der Warteschlange}} = \sum_{n\geq 2}(n-1)p_n = \ldots = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Die mittlere Bedienungsdauer eines Kunden ist $\frac{1}{\mu}$, wenn er das System im Zustand n vorfindet, beträgt seine Zeit im System $\frac{n+1}{\mu}$.

$$W_{\text{Zeit, die ein Kunde im System verbringt}} = \sum_{n\geq 0}\frac{n+1}{\mu}p_n = \ldots = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu}\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{\mu-\lambda}$$

Das Ergebnis liegt nahe. Ein Kunde findet ein System vor, dessen Abarbeitung

$L_{\text{Anzahl der Personen im System}} \cdot \frac{1}{\mu}$ dauert. Seine eigene Bedienungsdauer ist zu addieren.

Offensichtlich gilt:

$$W_{\text{Wartezeit, die ein Kunde in der Schlange verbringt}} = \frac{1}{\mu-\lambda} - \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$$

Für die Herleitungen wird die Formel

$$\sum_{n\geq 0} nq^n = \frac{q}{(1-q)^2}\,, \qquad |\, q \,| < 1$$

herangezogen.

Little bewies 1961:

$$L_{\text{Anzahl der Personen in der Warteschlange}} = \lambda \cdot W_{\text{Wartezeit, die ein Kunde in der Schlange verbringt}}$$

Die Aussage

$$\frac{1}{\lambda} \cdot L_{\text{Anzahl der Personen in der Warteschlange}} = W_{\text{Wartezeit, die ein Kunde in der Schlange verbringt}}$$

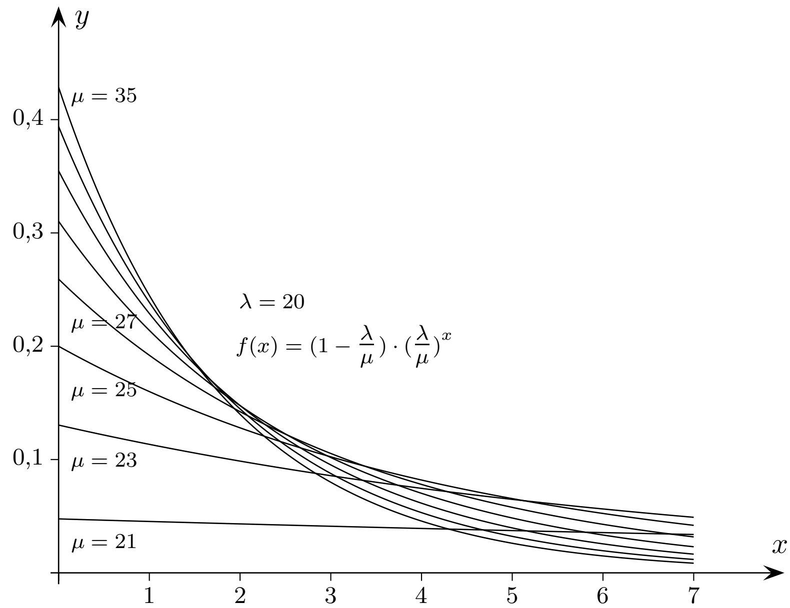
erscheint plausibel. $\frac{1}{\lambda}$ ist die Zeit, die zwischen zwei Ankünften verstreicht.

Dies muss auch die Wartezeit einer Person für das Aufrücken um einen Platz sein, wenn die Schlangenlänge als gleichbleibend angesehen wird.

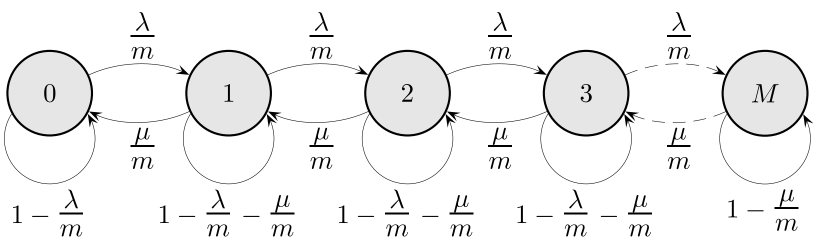
Der Fall $\lambda = \mu$

Die Formeln setzen $\lambda < \mu$ voraus.
Wird die Differenz kleiner, so vergrößert sich die Warteschlangenlänge und die Wartezeit, obwohl $\lambda = \mu$ eine ausgeglichene Situation nahezulegen scheint.

Die Graphen für die stationären Verteilungen sind aufschlussreich.
Für kleiner werdende Differenz gleichen sich die Wahrscheinlichkeiten immer mehr an.



Für $\lambda = \mu$ kann keine stationäre Verteilung existieren, jedoch für ein System mit begrenzter Länge M, hier gezeichnet für $M = 4$.



Die Übergangsmatrix lautet ($a = \frac{\lambda}{m}$):

$$\mathcal{A} \ = \begin{pmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 1-2a & a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1-2a & a & 0 \\ 0 & 0 & a & 1-2a & a \\ 0 & 0 & 0 & a & 1-a \end{pmatrix}$$

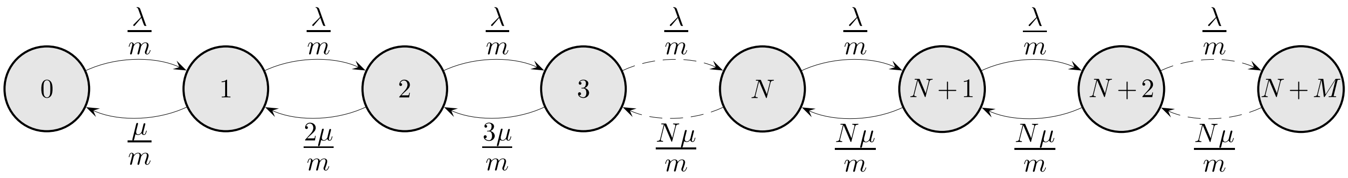
Aus $\mathcal{A} \cdot \vec{p} = \vec{p}$ ist nach kurzer Rechnung zu erkennen, dass alle Zustände auf lange Sicht gleich oft angenommen werden. Dies kann unmittelbar bestätigt werden, da auch die Zeilensummen von $\mathcal{A}$ 1 sind (A ist doppeltstochastisch).

Dann gilt:

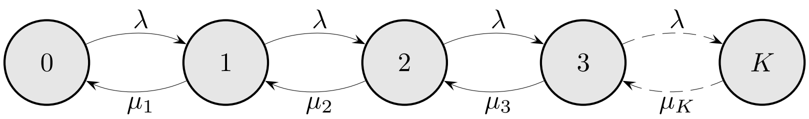
$$L_{\text{Anzahl der Personen im System}} = \frac{1}{M+1}(1+2+\ldots+M) = \frac{1}{M+1} \cdot \frac{M(M+1)}{2} = \frac{M}{2}$$

N Schalter

Nehmen wir jetzt an, dass N Schalter vorhanden sind und die (einzige) Warteschlange maximal M Kunden fasst. Im Zustand n mit $n \leq N$ werden n Kunden gleichzeitig bedient, der Erwartungswert ist dann $n\mu$.



Etwas vereinfacht und verallgemeinert:



Für die stationäre Verteilung $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_K$
erhalten wir mit den Gleichgewichtsbeziehungen:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\lambda}{\mu_1} \cdot p_0 \\ p_2 &= \frac{\lambda^2}{\mu_1\,\mu_2} \cdot p_0 \\ p_3 &= \frac{\lambda^3}{\mu_1\,\mu_2\,\mu_3} \cdot p_0 \qquad \text{d. h.} \qquad p_n = p_{n-1} \cdot \frac{\lambda}{\mu_n}, \quad n \geq 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

p_0 folgt aus der Normierungsbedingung $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_K = 1$.

Nun sind wir in der Lage, die stationäre Verteilung für das N-Schalter-Problem anzugeben, sowie die mittlere Schlangenlänge $S = 1 \cdot p_{N+1} + 2 \cdot p_{N+2} + \ldots + M \cdot p_{N+M}$ zu ermitteln.
Für begrenzte Systeme ist $\lambda \geq \mu$ möglich.

Im Zustand $N + M$ kann das System keine weiteren Kunden aufnehmen.
Die Wahrscheinlichkeit beträgt:

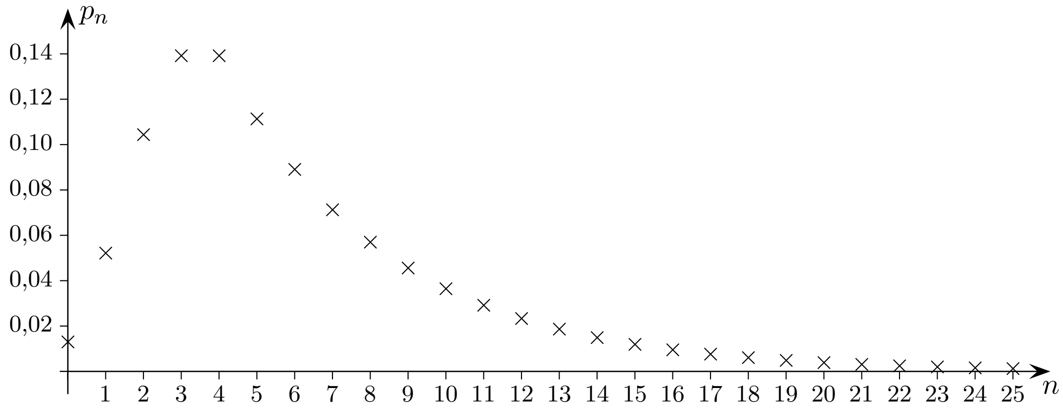
$$p_{N+M} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+M} \cdot \frac{p_0}{N!\,N^M}$$

Pro Zeiteinheit gehen also durchschnittlich $p_{N+M} \cdot \lambda$ Kunden verloren.

Warteschlangen N-Schalter-Beispiel

$N = 5$
$M = 20$
$\lambda = 80$ (pro Zeiteinheit)
$\mu = 20$

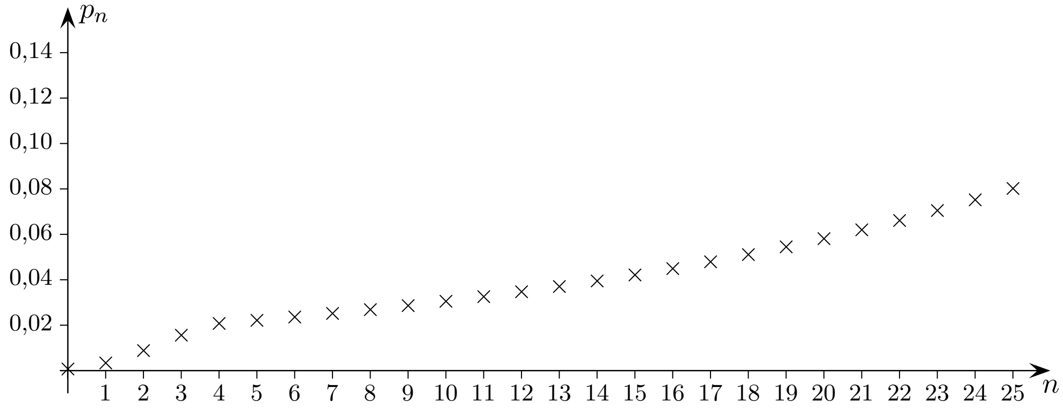
stationäre Verteilung



mittlere Warteschlangenlänge 2,1
mittlere Wartezeit in der Warteschlange 0,021

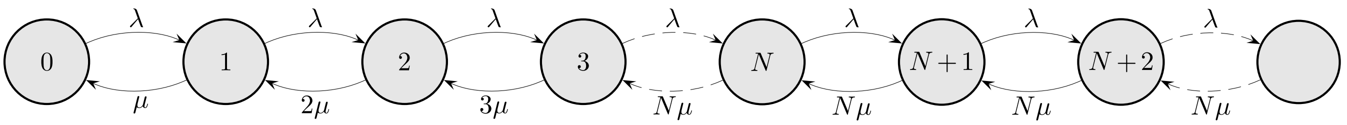
Variation $\mu = 15$

stationäre Verteilung



mittlere Warteschlangenlänge 11,7
mittlere Wartezeit in der Warteschlange 0,156
6,4 Kunden gehen pro Zeiteinheit verloren.

N Schalter, Warteschlange nicht begrenzt



Die stationäre Verteilung $p_0, p_1, p_2, \ldots$ lautet:

$$\begin{array}{rcl}
p_0 & & \\
p_1 & = & p_0 \cdot \frac{\lambda}{\mu} \\
p_2 & = & p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \\
p_3 & = & p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \cdot \frac{1}{3!} \\
 & \ldots & \\
p_N & = & p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \cdot \frac{1}{N!} \\
\hline
p_{N+1} & = & p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1} \cdot \frac{1}{N!\,N} \\
p_{N+2} & = & p_0 \cdot \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+2} \cdot \frac{1}{N!\,N^2} \\
 & \ldots &
\end{array}$$

p_0 folgt aus der Normierungsbedingung $p_0 + p_1 + p_2 + \ldots = 1$.

$$p_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N \cdot \frac{1}{N!} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{N^n}}_{\left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^n} \right] = 1$$

Die unendliche geometrische Reihe konvergiert für $\lambda < \mu N$ gegen $\dfrac{\frac{\lambda}{\mu}}{N - \frac{\lambda}{\mu}}$.

Die mittlere Schlangenlänge beträgt dann:

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot p_{N+n} = p_N \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \underbrace{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \cdot \frac{1}{N^n}}_{\left(\frac{\lambda}{\mu N}\right)^n} = p_N \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu N}}{\left(1 - \frac{\lambda}{\mu N}\right)^2}$$

(siehe Formel Seite 2)

Die mittlere Verweilzeit in der Schlange soll noch ermittelt werden. Ein Kunde findet ein System im Zustand k vor .... Beachte, dass die Schlange auch leer sein kann und alle Schalter besetzt.

$$W = \frac{1}{\mu N} \cdot p_N + \frac{2}{\mu N} \cdot p_{N+1} + \frac{3}{\mu N} \cdot p_{N+2} + \ldots$$

N Schalter, Verweilzeit in der Warteschlange

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{\mu N}\cdot p_N + \frac{2}{\mu N}\cdot p_{N+1} + \frac{3}{\mu N}\cdot p_{N+2} + \ldots \\
&= \frac{p_N}{\mu N}\,[\,\underbrace{1 + 2\cdot(\tfrac{\lambda}{\mu N}) + 3\cdot(\tfrac{\lambda}{\mu N})^2 + 4\cdot(\tfrac{\lambda}{\mu N})^3 + \ldots}_{\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{\mu N}\right)^2}}\,]
\end{aligned}
$$

Es wird die Formel

$$\sum_{n\geq 0} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2}\,, \qquad 0 < |\, q \,| < 1$$

verwendet.

Offensichtlich gilt auch hier $L = \lambda W$ (Satz von Little).