Wallissches Produkt

John Wallis (1616-1703)

Aus der simplen Ungleichung $0 \le \sin x \le 1$ für $x \in \left[\,0,\, \frac{\pi}{2}\,\right]$ kann unter Einsatz der partiellen Integrationsregel ein überraschendes, für einige Näherungsformeln wichtiges Ergebnis erzielt werden.

$$\begin{aligned}
\int \sin^n x\,dx &= \int \sin x \cdot \sin^{n-1} x\,dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + \int \cos x \cdot \left(\sin^{n-1} x\right)'\,dx \\
&\ldots \qquad\qquad \text{beachte:} \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\
&\ldots \qquad\qquad (n-1)\int \sin^n x\,dx \quad \text{auf die linke Seite bringen} \\
&= -\frac{1}{n}\cos x \cdot \sin^{n-1} x \;+\; \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx
\end{aligned}$$

Mit den Integrationsgrenzen folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,dx$$

und durch sukzessive Anwendung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,dx = \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\ldots\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \qquad \text{beachte:} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3} \qquad \text{beachte:} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = 1$$

Überprüfe die Folgerungskette:

$$x \in \left[\,0,\, \frac{\pi}{2}\,\right] \implies 0 \le \sin x \le 1 \implies \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x \implies$$

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1} \le \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} \le \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-2}{2n-1} \implies$$

$$\frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} \le \frac{\pi}{2} \le \frac{2^2\cdot 4^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n} \qquad \Big(\text{beachte:} \quad 2n = \frac{(2n)^2}{2n}\Big) \implies$$

$$\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))^2}\cdot\frac{2n}{2n+1} \le \frac{\pi}{2}\cdot 2n \le \frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))^2} \qquad \Big(\text{beachte:} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1} = 1\Big) \implies$$

$$\pi = \lim_{n\to\infty}\frac{(2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n)^2}{(1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1))^2}\cdot\frac{1}{n} \implies$$

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}\cdot\frac{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n} \implies \sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^2}{\sqrt{n}\cdot(2n)!}$$

beachte: $2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n = 2^n\cdot n!$

Die Formel von Stirling

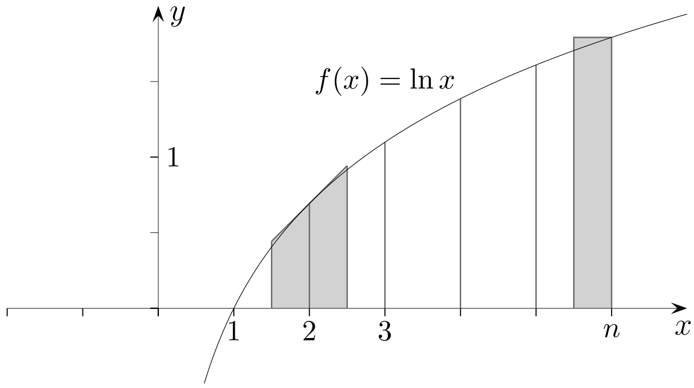
Stirling konnte 1730 eine Näherungsformel für $n!$ angeben, indem er ein Ergebnis von de Moivre präzisierte. Dazu betrachten wir zunächst $\ln n! = \ln 2 + \ldots + \ln n$ (beachte: $\ln 1 = 0$). Nun gilt:

$$\int_2^n \ln x \, dx = \Big[x \ln x - x\Big]_2^n = n \ln n - n - 2\ln 2 + 2$$

$$< \ln n! - \frac{1}{2} \ln n$$

$$\Longrightarrow \quad 0 < \ln n! - \big(n + \tfrac{1}{2}\big) \ln n + n$$

$$\Longrightarrow \quad 1 < \underbrace{\frac{n! \cdot e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}_{= a_n}$$



Der Flächeninhalt wird durch Trapezflächen (eine Seite tangiert den Graphen, $A = m \cdot h$, $h = 1$) nach oben abgeschätzt. Im Gegensatz zur linken Grenze 2 muss die Abschätzung an der rechten sorgfältiger erfolgen, da sonst der Fehler mit größer werdendem n zunähme. In $\ln n!$ ist der Flächeninhalt des Recht- ecks $A = \ln n \cdot 1$ enthalten, daher wird die Hälfte subtrahiert.
Die Folge a_n wird sich als monoton fallend erweisen. Da sie nach unten beschränkt ist, hat sie einen Grenzwert a. Um ihn zu berechnen, ersetzen wir in der Formel von Wallis $n!$ und $(2n)!$ durch Terme mit a_n und a_{2n}.

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (n!)^2}{\sqrt{n} \cdot (2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n} \cdot (a_n \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n})^2}{\sqrt{n} \cdot a_{2n} \cdot (2n)^{2n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-2n}} = \ldots = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2}{\sqrt{2} \cdot a_{2n}} = \frac{a^2}{\sqrt{2} \cdot a}$$

$$\Longrightarrow \quad a = \sqrt{2\pi}$$

$$\Longrightarrow \quad n! \sim \sqrt{2\pi n}\,\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$$

Zum Nachweis der Monotonie untersuchen wir den Quotienten

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n! \cdot e^n \cdot (n{+}1)^{n+1+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}} \cdot (n{+}1)! \cdot e^{n+1}} = \Big(\frac{n{+}1}{n}\Big)^{n+1} \cdot e^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = (n+1) \ln \frac{n{+}1}{n} - 1$$

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x} \, dx = \ln \frac{n{+}1}{n}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n + \frac{1}{2}} < \ln \frac{n{+}1}{n} \qquad \text{(Überlegung wie oben)}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < \big(n + \tfrac{1}{2}\big) \ln \frac{n{+}1}{n} - 1$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_{n+1} < a_n$$