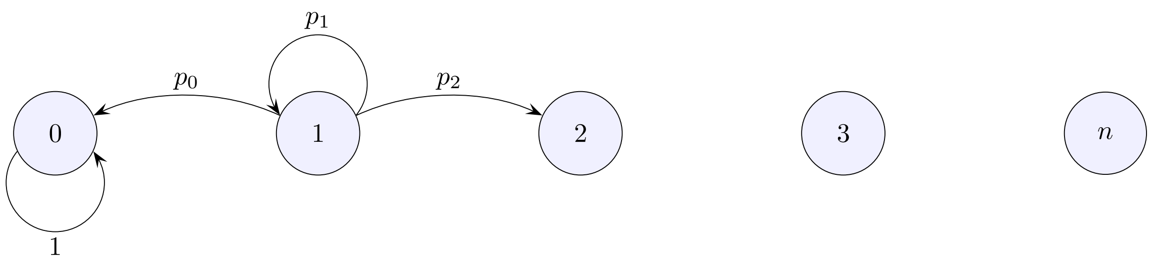
Verzweigungsprozesse

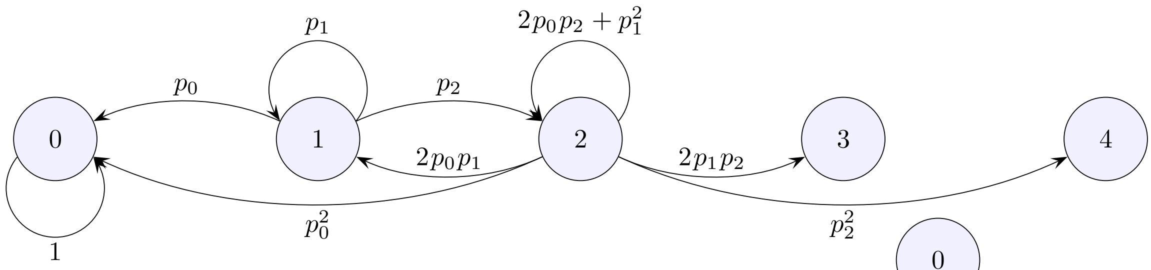
Wir betrachten eine Population von Teilchen. Der Zustand n gibt die Anzahl der Teilchen an.
Pro Takt (Generation) kann jedes Teilchen unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit p_0 verschwinden, mit p_1 erhalten bleiben oder sich mit p_2 aufspalten. Der Prozess startet mit einem Teilchen (0-te Generation), also im Zustand 1. Der Zustand 0 ist absorbierend.

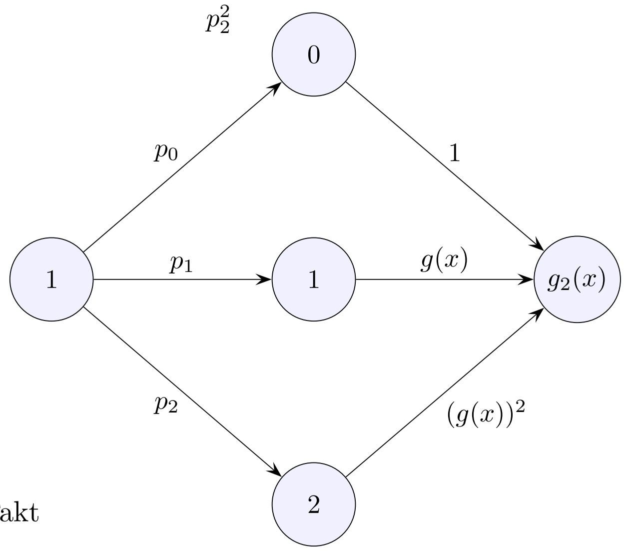


Die Übergangswahrscheinlichkeiten für den n-ten Zustand, z. B. $n = 2$ sind im Term

$$(p_0 + p_1 x + p_2 x^2)^2 = p_0^2 + 2p_0 p_1 x + (2p_0 p_2 + p_1^2)x^2 + 2p_1 p_2 x^3 + p_2^2 x^4$$

enthalten.
In der nach Potenzen von x geordneten Form werden die Wahrscheinlichkeiten der Pfade mit jeweils gleicher Nachkommenszahl k durch den Koeffizienten von x^k zusammengefasst.



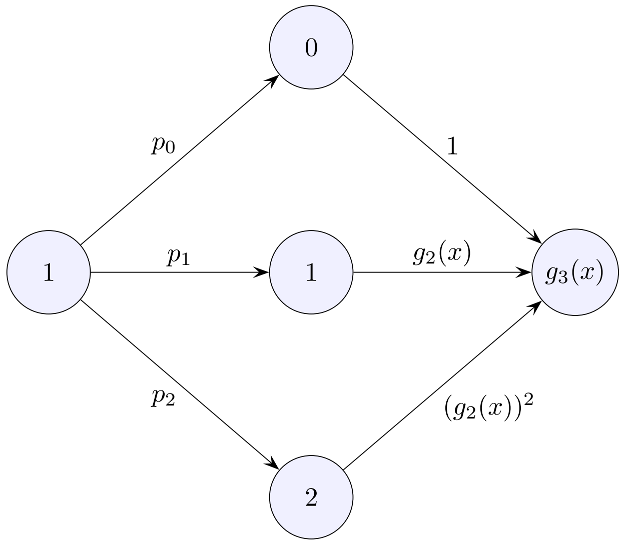


Wie sieht nun die Verteilung für die n-te Generation aus?
Die erzeugende Funktion für die 1. Generation lautet:

$g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$

Der Startzustand geht mit der Wahrscheinlichkeit p_1 in den Zustand 1 über. Die Verteilung für dén nächsten Takt ist im Term $p_1 \cdot g(x) = p_1 p_0 + p_1^2 x + p_1 p_2 x^2$ enthalten.
Der Startzustand geht mit der Wahrscheinlichkeit p_2 in den Zustand 2 über.
Die Verteilung für dén nächsten Takt ist im Term $p_2 \cdot (g(x))^2$ enthalten.
Zusammengefasst erhalten wir: $g_2(x) = p_0 + p_1 \cdot g(x) + p_2 \cdot (g(x))^2 = g(g(x))$

Verzweigungsprozesse



Wie sieht nun die Verteilung für die 3-te Generation aus?
Die erzeugende Funktion für die 1. Generation lautet:

$g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$

Die vorigen Überlegungen führen auch hier zum Ziel:

$$g_3(x) = p_0 + p_1 \cdot g_2(x) + p_2 \cdot (g_2(x))^2 = g(g(g(x)))$$

Und allgemein:
Die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeiten der Anzahlen X_n der n-ten Generation entsteht durch n-fache Verkettung von g mit sich selbst:

$$g_n(x) = g(g(\ldots g(x)\ldots))$$

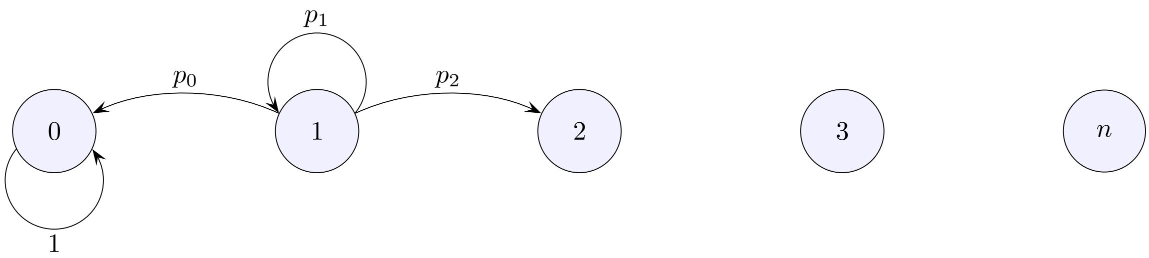
Nach der Kettenregel folgt:

$$E(X_n) = \mu^n \ \text{ mit } \ \mu = g'(1)$$

Für z. B. $\mu = 1{,}2$ wächst die Population je Generation um 20 %.

Aussterbewahrscheinlichkeit

Sei a_n die Wahrscheinlichkeit, dass alle Nachkommen eines Teilchens (spätestens) in der n-ten Generation verschwunden sind.

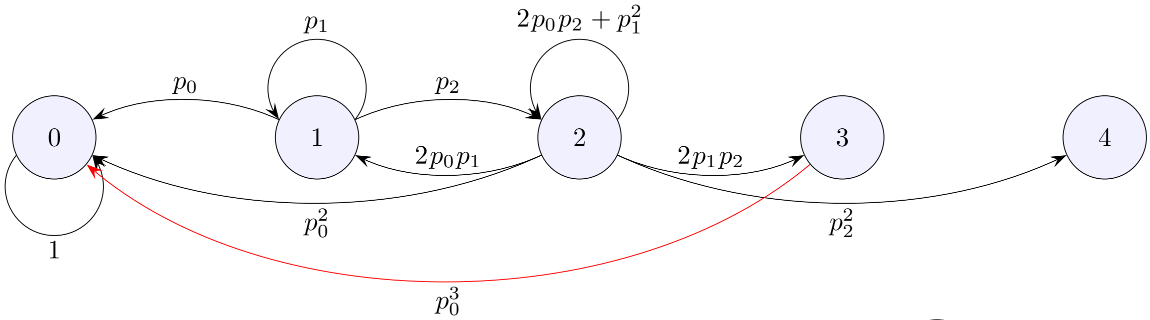


Dann gilt:

$a_1 = p_0$ — Das Startteilchen bildet die 0-te Generation.

$a_2 = p_0 + p_1 p_0 + p_2 p_0^2 = g(p_0)$ — Die 1. Generation muss in der nächsten aussterben.

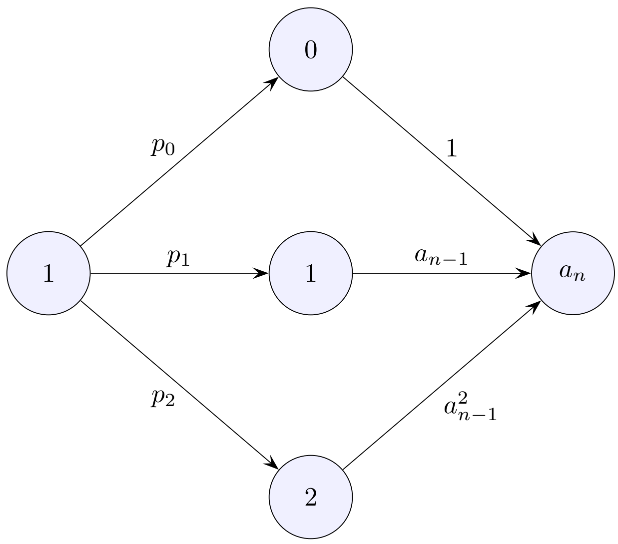
$a_3 = g(g(p_0))$ — $g(g(x))$ ist die erzeugende Funktion für die 2. Generation. Ihre Teilchen müssen in der nächsten Generation verschwinden. Die erzeugende Funktion für die 2. Generation enthält z. B. den Term $2p_1p_2^2x^3$. Die zugehörigen 3 Teilchen verschwinden in der nächsten Generation mit der Wahrscheinlichkeit $2p_1p_2^2p_0^3$.



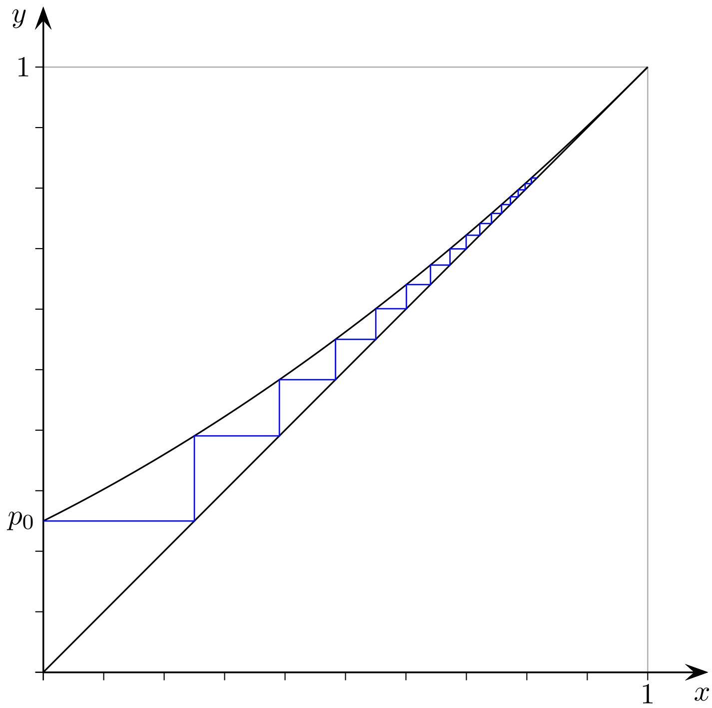
Die Berechnung von a_n $(n \geq 2)$ kann auch der nebenstehenden Grafik entnommen werden, $a_1 = p_0$.

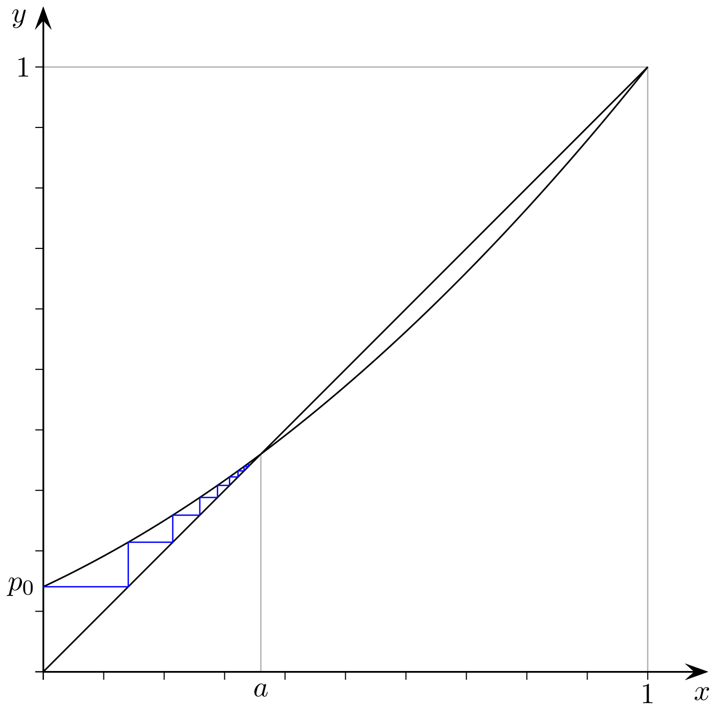
$$g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

$$a_n = p_0 + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-1}^2 = g(a_{n-1})$$



Aussterbewahrscheinlichkeit





Aussterbewahrscheinlichkeit

Die Spinnwebdiagramme veranschaulichen die iterative Berechnung
der Aussterbewahrscheinlichkeiten a_n, $a_1 = p_0$.

$a_n = g(a_{n-1})$

$g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$

Wegen der nicht negativen Koeffizienten gilt $g'(x) > 0$ und $g''(x) > 0$ auf $[0, 1]$,
d. h. der Graph ist monoton wachsend und linksgekrümmt.

Für $\mu = g'(1) \leq 1$ stirbt der Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 aus.
Für $\mu = g'(1) > 1$ strebt die Folge der Aussterbewahrscheinlichkeiten a_n
gegen den Grenzwert $a < 1$. Für a gilt $g(a) = a$.

Zeit bis zum Aussterben

Sei $\lim\limits_{x\to\infty} a_n = 1$, d. h. die Population stirbt mit Wahrscheinlichkeit 1 aus.
X sei die Schrittzahl bis zur Absorption.
Uns interessiert der Erwartungswert $E(X) = w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 + \ldots$.

k	1	2	3	4	5	...
$P(X=k)$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	...

a_1
a_2
a_3
$\ldots$

Mit den Wahrscheinlichkeiten $1 - a_k$
- ein Teilchen überlebt n Generationen - kann der Erwartungswert ermittelt werden.

k	1	2	3	4	5	...
$P(X=k)$	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	...

$1 - a_1$
$1 - a_2$
$1 - a_3$
$\ldots$

Nun ist zu erkennen:

$$E(X) = 1 + (1 - a_1) + (1 - a_2) + (1 - a_3) + \ldots$$

Beachte hierbei: $w_1 + w_2 + w_3 + \ldots = 1$