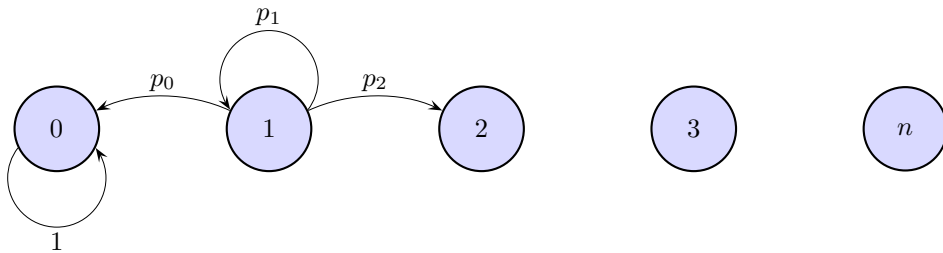


# Verzweigungsprozesse

Wir betrachten eine Population von Teilchen. Der Zustand  $n$  gibt die Anzahl der Teilchen an. Pro Takt (Generation) kann jedes Teilchen unabhängig von den anderen mit einer Wahrscheinlichkeit  $p_0$  verschwinden, mit  $p_1$  erhalten bleiben oder sich mit  $p_2$  aufspalten. Der Prozess startet mit einem Teilchen (0-te Generation), also im Zustand 1. Der Zustand 0 ist absorbierend.

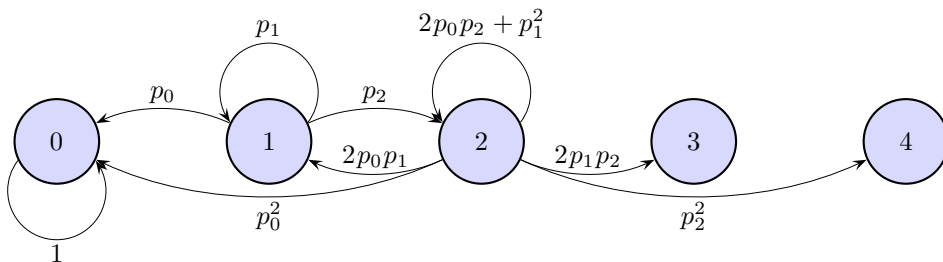


Die Übergangswahrscheinlichkeiten für den  $n$ -ten Zustand, z.B.  $n = 2$  sind im Term

$$(p_0 + p_1x + p_2x^2)^2 = p_0^2 + 2p_0p_1x + (2p_0p_2 + p_1^2)x^2 + 2p_1p_2x^3 + p_2^2x^4$$

enthalten.

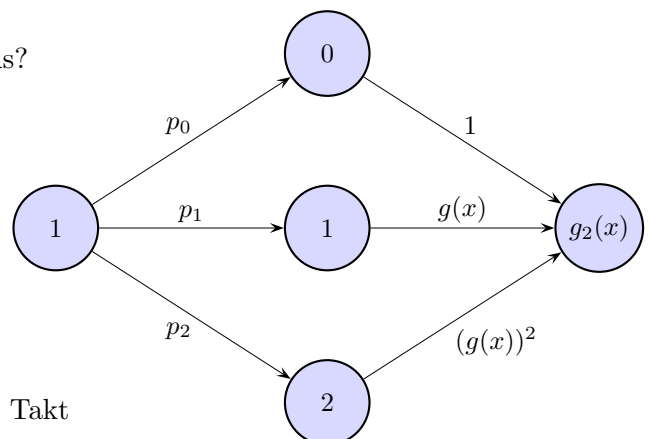
In der nach Potenzen von  $x$  geordneten Form werden die Wahrscheinlichkeiten der Pfade mit jeweils gleicher Nachkommenszahl  $k$  durch den Koeffizienten von  $x^k$  zusammengefasst.



Wie sieht nun die Verteilung für die  $n$ -te Generation aus?

Die erzeugende Funktion für die 1. Generation lautet:

$$g(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$$



Der Startzustand geht mit der Wahrscheinlichkeit  $p_1$  in den Zustand 1 über. Die Verteilung für den nächsten Takt ist im Term  $p_1 \cdot g(x) = p_1p_0 + p_1^2x + p_1p_2x^2$  enthalten.

Der Startzustand geht mit der Wahrscheinlichkeit  $p_2$  in den Zustand 2 über.

Die Verteilung für den nächsten Takt ist im Term  $p_2 \cdot (g(x))^2$  enthalten.

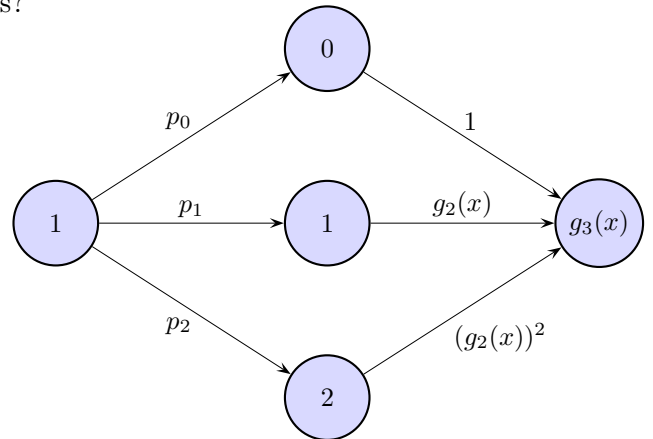
Zusammengefasst erhalten wir:  $g_2(x) = p_0 + p_1 \cdot g(x) + p_2 \cdot (g(x))^2 = g(g(x))$

# Verzweigungsprozesse

Wie sieht nun die Verteilung für die 3-te Generation aus?

Die erzeugende Funktion für die 1. Generation lautet:

$$g(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$$



Die vorigen Überlegungen führen auch hier zum Ziel:

$$g_3(x) = p_0 + p_1 \cdot g_2(x) + p_2 \cdot (g_2(x))^2 = g(g(g(x)))$$

Und allgemein:

Die erzeugende Funktion für die Wahrscheinlichkeiten der Anzahlen  $X_n$  der  $n$ -ten Generation entsteht durch  $n$ -fache Verkettung von  $g$  mit sich selbst:

$$g_n(x) = g(g(\dots g(x) \dots))$$

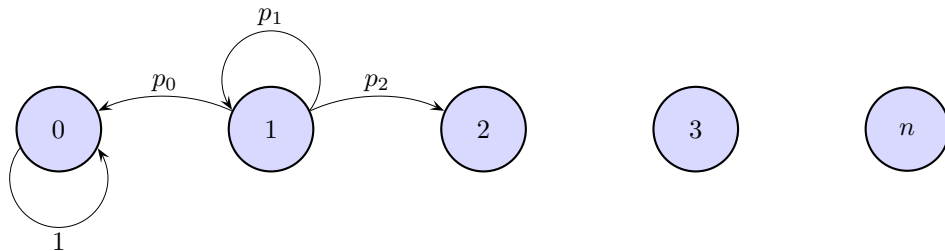
Nach der Kettenregel folgt:

$$E(X_n) = \mu^n \text{ mit } \mu = g'(1)$$

Für z.B.  $\mu = 1,2$  wächst die Population je Generation um 20%.

# Aussterbewahrscheinlichkeit

Sei  $a_n$  die Wahrscheinlichkeit, dass alle Nachkommen eines Teilchens (spätestens) in der  $n$ -ten Generation verschwunden sind.



Dann gilt:

$$a_1 = p_0$$

$$a_2 = p_0 + p_1 p_0 + p_2 p_0^2 = g(p_0)$$

$$a_3 = g(g(p_0))$$

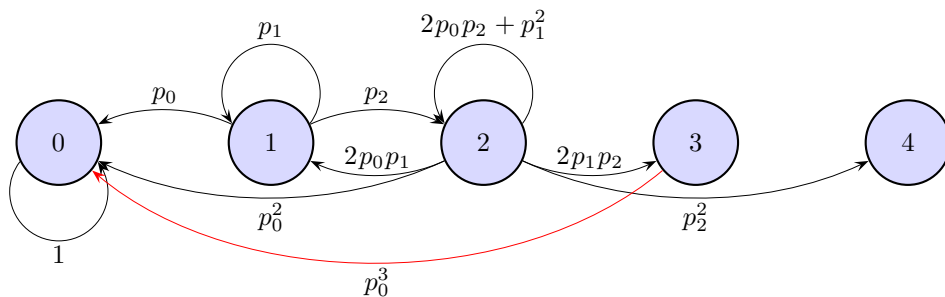
Das Startteilchen bildet die 0-te Generation.

Die 1. Generation muss in der nächsten aussterben.

$g(g(x))$  ist die erzeugende Funktion für die 2. Generation.

Ihre Teilchen müssen in der nächsten Generation verschwinden.

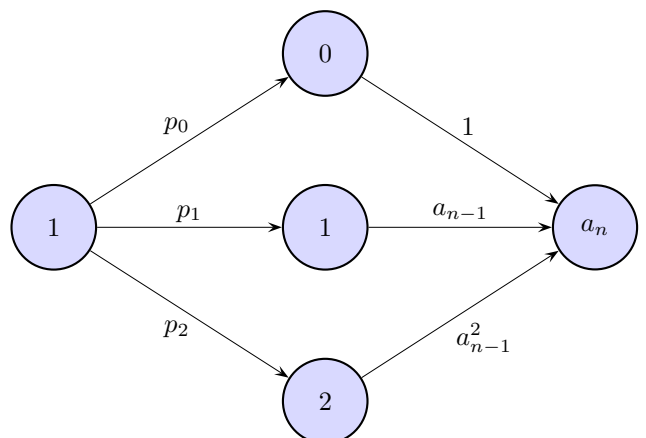
Die erzeugende Funktion für die 2. Generation enthält z. B. den Term  $2p_1 p_2^2 x^3$ . Die zugehörigen 3 Teilchen verschwinden in der nächsten Generation mit der Wahrscheinlichkeit  $2p_1 p_2^2 p_0^3$ .



Die Berechnung von  $a_n$  ( $n \geq 2$ ) kann auch der nebenstehenden Grafik entnommen werden,  $a_1 = p_0$ .

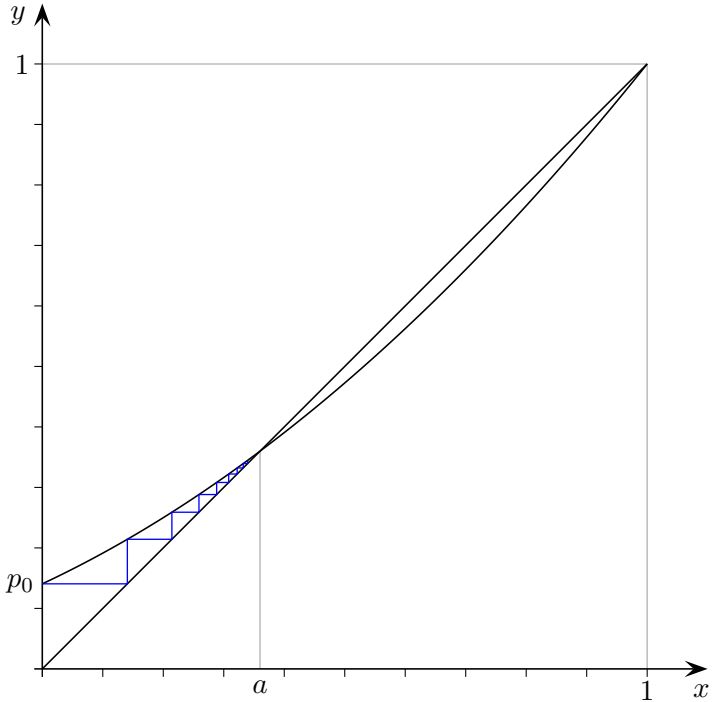
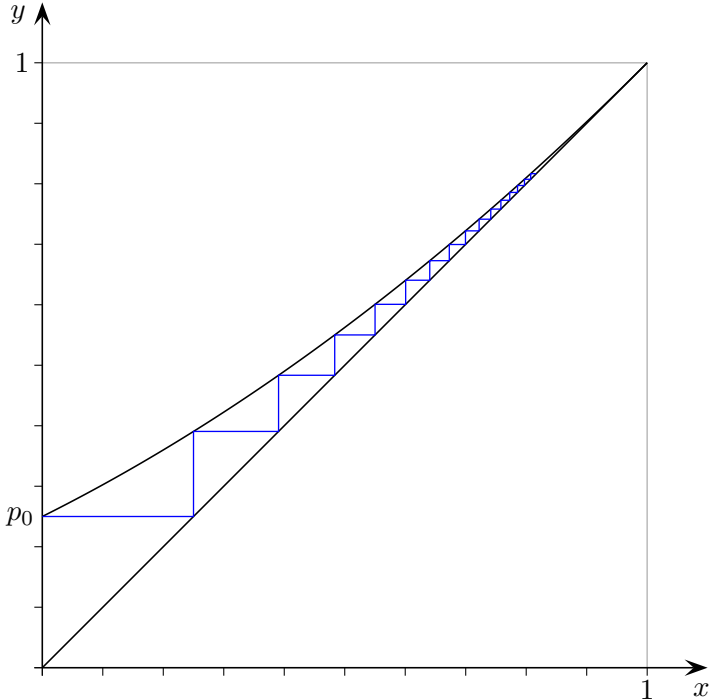
$$g(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

$$a_n = p_0 + p_1 a_{n-1} + p_2 a_{n-1}^2 = g(a_{n-1})$$



Roofls

# Aussterbewahrscheinlichkeit



# Aussterbewahrscheinlichkeit

Die Spinnwebdiagramme veranschaulichen die iterative Berechnung der Aussterbewahrscheinlichkeiten  $a_n$ ,  $a_1 = p_0$ .

$$a_n = g(a_{n-1})$$

$$g(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2$$

Wegen der nicht negativen Koeffizienten gilt  $g'(x) > 0$  und  $g''(x) > 0$  auf  $[0, 1]$ , d.h. der Graph ist monoton wachsend und linksgekrümmt.

Für  $\mu = g'(1) \leq 1$  stirbt der Prozess mit Wahrscheinlichkeit 1 aus.

Für  $\mu = g'(1) > 1$  strebt die Folge der Aussterbewahrscheinlichkeiten  $a_n$  gegen den Grenzwert  $a < 1$ . Für  $a$  gilt  $g(a) = a$ .

## Zeit bis zum Aussterben

Sei  $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = 1$ , d. h. die Population stirbt mit Wahrscheinlichkeit 1 aus.

$X$  sei die Schrittzahl bis zur Absorption.

Uns interessiert der Erwartungswert  $E(X) = w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 + \dots$

$k$	1	2	3	4	5	...
$P(X = k)$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	...
	⏟ $a_1$					
	⏟ $a_2$					
	⏟ $a_3$					
	⏟ ...					

Mit den Wahrscheinlichkeiten  $1 - a_k$

- ein Teilchen überlebt  $n$  Generationen - kann der Erwartungswert ermittelt werden.

$k$	1	2	3	4	5	...
$P(X = k)$	$w_1$	$w_2$	$w_3$	$w_4$	$w_5$	...
		⏟ $1 - a_1$				
		⏟ $1 - a_2$				
		⏟ $1 - a_3$				
		⏟ ...				

Nun ist zu erkennen:

$$E(X) = 1 + (1 - a_1) + (1 - a_2) + (1 - a_3) + \dots$$

Beachte hierbei:  $w_1 + w_2 + w_3 + \dots = 1$