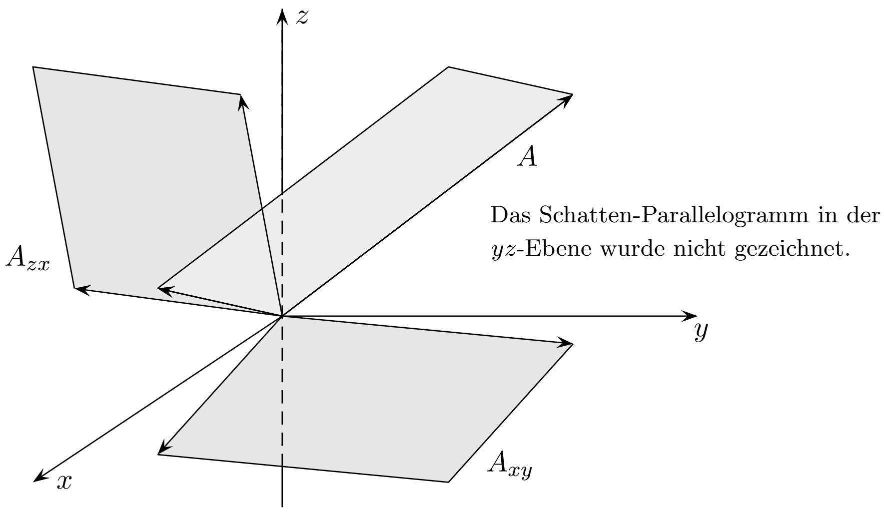
# Vektorprodukt und Parallelogrammfläche  G. Roolfs 2007

Für den Flächeninhalt des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms gilt: $A = |\,\vec{a} \times \vec{b}\,|$.
Dieses soll auf eine Weise bewiesen werden, die einen tiefen Einblick in die Zusammenhänge gewährt.
Die Koordinaten des Vektorprodukts haben eine anschauliche Bedeutung:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{yz} \\ A_{zx} \\ A_{xy} \end{pmatrix}$$

Hierbei bedeutet z. B. $A_{xy}$ der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch Projektion in die $xy$-Ebene entsteht. Genauer müsste es $\pm A_{xy}$ heißen, jedoch ist das Vorzeichen wegen späteren Quadrierens unerheblich. Dieser Sachverhalt kann elementar - natürlich ohne das Vektorprodukt - begründet werden (siehe Arbeitsblatt Determinanten, Cramersche Regel, ...).




Die Idee ist nun, von den Schatten in den Koordinatenebenen auf das Original zurückzuschließen.

Sei $\quad \vec{n}^{\circ} = \dfrac{1}{|\,\vec{a} \times \vec{b}\,|} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

Dann gilt wie für jeden Einheitsvektor (folgt aus $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\,\vec{a}\,| \cdot |\,\vec{b}\,| \cos\alpha$)

$$\vec{n}^{\circ} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{pmatrix},$$

wobei der Normaleneinheitsvektor mit der $x$-, $y$- und $z$-Koordinatenachse jeweils die Winkel $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ einschließt. Daraus folgt

$$A\,\vec{n}^{\circ} = \begin{pmatrix} A\cos\alpha \\ A\cos\beta \\ A\cos\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{yz} \\ A_{zx} \\ A_{xy} \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Beträge liefern schließlich das Gewünschte.

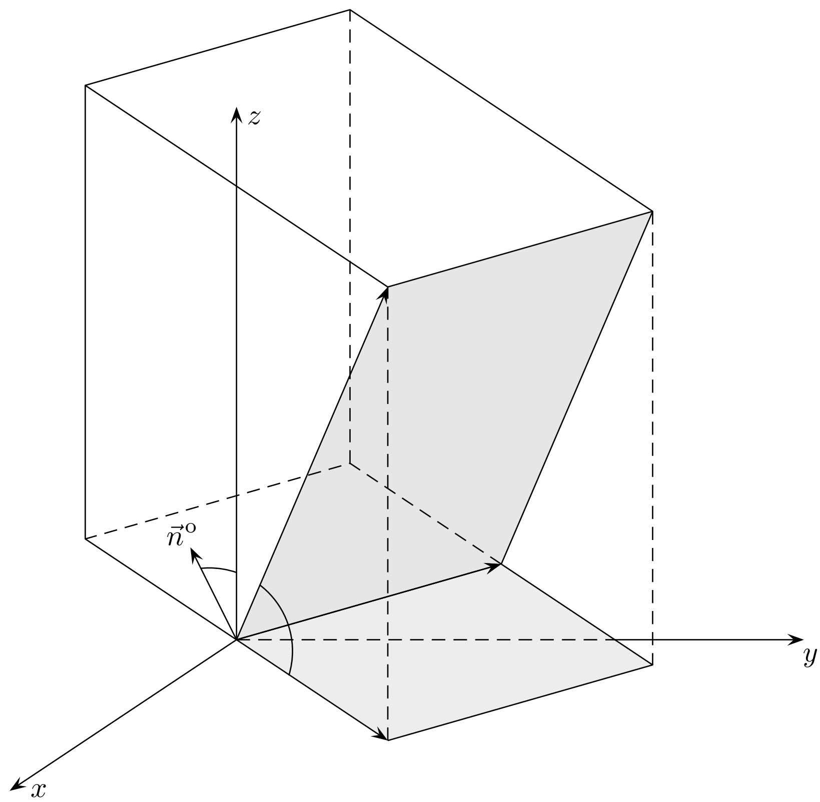
Auf $A\cos\gamma = A_{xy}$ sollten wir abschließend noch einen Blick werfen.

# Vektorprodukt und Parallelogrammfläche

$A \cos\gamma = A_{xy}$

gilt zunächst für Rechtecke mit einem Kanten-Vektor in der Ursprungsebene,
in der auch $\vec{n}^{\text{o}}$ und die $z$-Achse liegen und dem anderen Vektor senkrecht zu dieser Ebene.

Die beiden gezeichneten Winkel sind gleich groß ($= \gamma$).
Nur eine Kantenlänge des Originals wird mit $\cos\gamma$ multipliziert, um die Kantenlänge des Schattens zu erhalten.




Nun können Parallelogramme durch Scherung stets in diese Lage gebracht werden, auch der Flächeninhalt des Schattens bleibt hierbei unverändert (siehe ebenfalls Arbeitsblatt Determinanten, Cramersche Regel, ...).
Die Scherungen erfolgen in der durch den Normalenvektor $\vec{n}^{\text{o}}$ festgelegten Ebene.