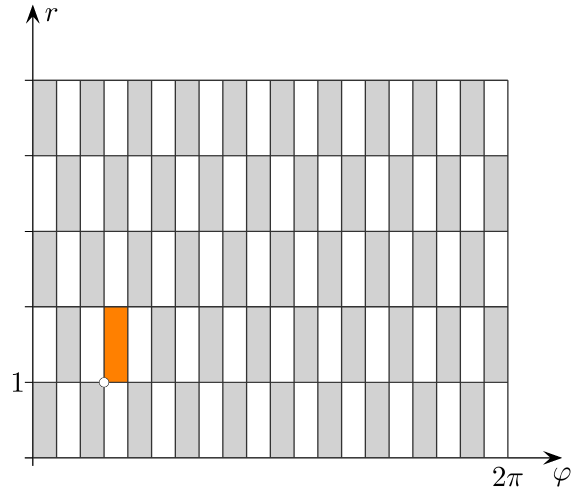
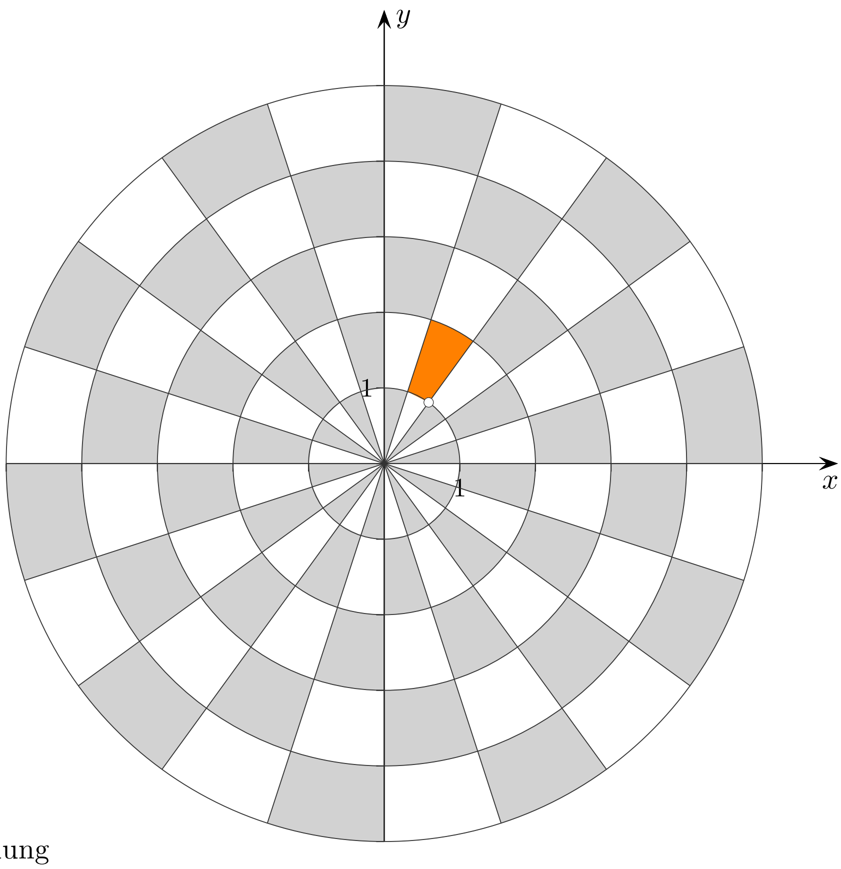
1. Polarkoordinaten
2. Vektorfeld mit Polarkoordinaten
3. Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten
4. Gradient des Skalarfeldes $\Phi(r, \varphi)$
5. Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}(r, \varphi)$
6. Divergenz
7. Umrechnung des Laplace-Operators Δ auf Polarkoordinaten
8. Gradient in Polarkoordinaten, alternativ
9. Gradienten
10. Zylinderkoordinaten
11. Kugelkoordinaten
12. Linienelemente
13. Christoffel-Symbole für Polarkoordinaten
14. Links

↑ Polarkoordinaten





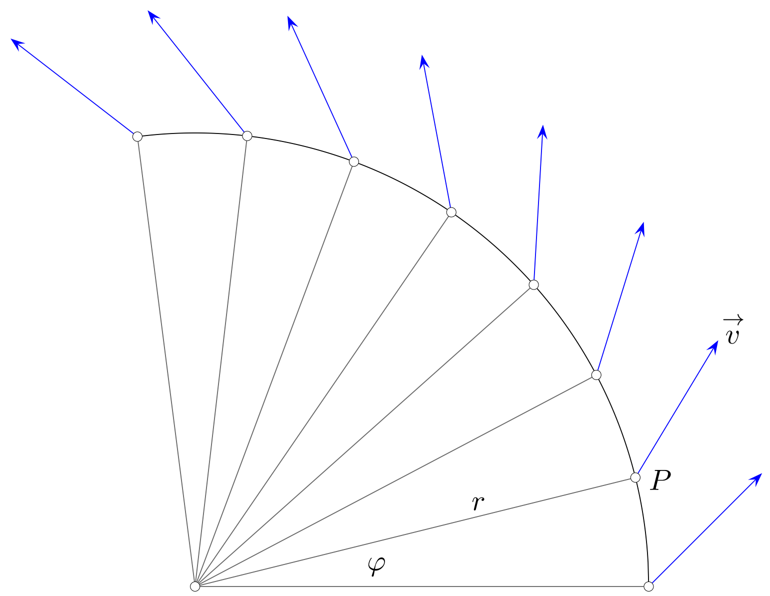
Die Grafik veranschaulicht die Abbildung

$(\varphi, r) \quad \longrightarrow \quad (x, y)$

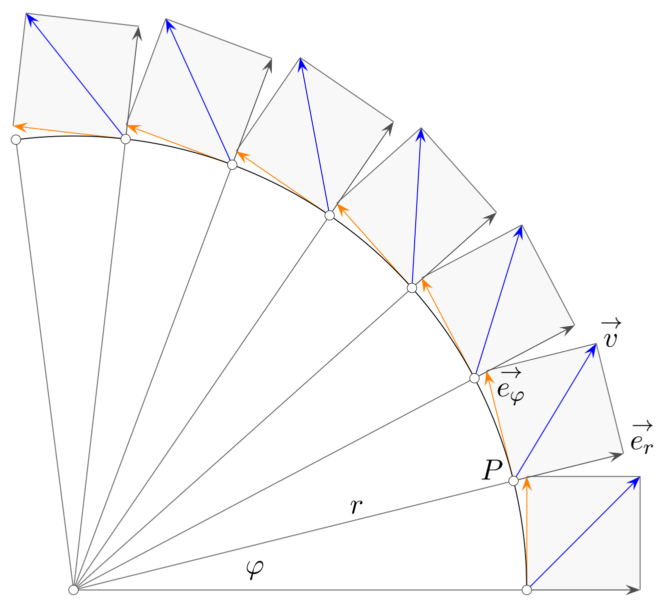
$x = r \cdot \cos\varphi$

$y = r \cdot \sin\varphi$

↑ Vektorfeld mit Polarkoordinaten

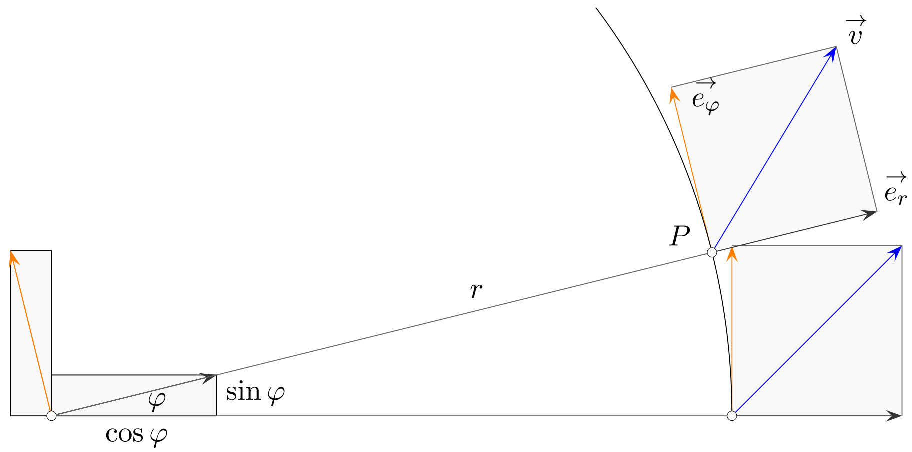


Ein rotationssymmetrisches Vektorfeld kann vermutlich einfach mit Polarkoordinaten beschrieben werden. Ein Punkt P auf dem Kreis wird mit (φ, r) erfasst. Der angehängte Vektor $\vec{v}$ dreht sich mit. Sein Winkel in einer Polarkoordinatendarstellung wäre jedoch vom Punkt P abhängig.
Die 2. Grafik beinhaltet die Idee einer zweckmäßigeren Vorgehensweise.



Der Punkt P wird begleitet von 2 orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{e_r}$ und $\vec{e_\varphi}$. Sie sind nur von φ abhängig und lassen sich leicht ermitteln. $\vec{v}$ wird als Linearkombination dieser Vektoren dargestellt.

↑ Vektorfeld mit Polarkoordinaten



$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}, \qquad \text{nebenbei:} \quad \vec{e_r} = \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e_\varphi} = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}}_{\text{auf Länge 1 gebracht}}$$

Ein Vektor $\vec{v}$ lässt sich mit diesen Basisvektoren (tangential für r bzw. $\varphi = const$)

in der Form $\quad \vec{v} = v_r\,\vec{e_r} + v_\varphi\,\vec{e_\varphi}$

darstellen. Die Umrechnung von kartesischen Koordinaten $\vec{v} = (v_x, v_y)^{\mathrm{T}}$ in dieses System erfolgt mit (Skalarprodukt, $\vec{v}\cdot\vec{e_r} = |\vec{v}|\cdot|\vec{e_r}|\cdot\cos\alpha = v_r$, entsprechend v_φ):

$$\begin{aligned} v_r &= v_x\cos\varphi + v_y\sin\varphi \\ v_\varphi &= -v_x\sin\varphi + v_y\cos\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

Gegeben ist ein Geschwindigkeitsfeld.

$$\begin{aligned} \vec{v}\,(x,y) &= \frac{1}{x^2+y^2}(-y,x)^{\mathrm{T}} \\ v_r &= \frac{1}{x^2+y^2}(-y\cos\varphi + x\sin\varphi) \\ &= \frac{1}{r^2}(-r\sin\varphi\cos\varphi + r\cos\varphi\sin\varphi) = 0 \\ v_\varphi &= \frac{1}{x^2+y^2}(y\sin\varphi + x\cos\varphi) \\ &= \frac{1}{r^2}(r\sin^2\varphi + r\cos^2\varphi) = \frac{1}{r} \end{aligned}$$

P hat die Koordinaten $(x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$

Das Geschwindigkeitsfeld besitzt somit nur eine tangentiale Komponente:

$\vec{v}\,(r,\varphi) = 0\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\vec{e_\varphi}$

↑ Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace-Operator in Polarkoordinaten

Skalarfeld	$\Phi(r,\varphi)$
Vektorfeld	$\vec{v}\,(r,\varphi) \;=\; v_r(r,\varphi)\;\vec{e_r} + v_\varphi(r,\varphi)\;\vec{e_\varphi}$

Gradient des Skalarfeldes	$\operatorname{grad}\Phi(r,\varphi) \;=\; \dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\;\vec{e_r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\;\vec{e_\varphi}$
Divergenz des Vektorfeldes	$\operatorname{div}\vec{v}(r,\varphi) \;=\; \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}$
Rotation des Vektorfeldes	$\big[\operatorname{rot}\vec{v}(r,\varphi)\big]_z \;=\; \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\,v_\varphi) - \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v_r}{\partial\varphi}$
	Es existiert nur eine Komponente in z-Richtung.
Laplace-Operator	$\Delta\Phi(r,\varphi) \;=\; \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2}$

Beispiele

$$\operatorname{div}(r\,\vec{e_r}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2) = 2$$

Geschwindigkeitsfeld

$$\vec{v}\,(x,y) \;=\; \frac{1}{x^2+y^2}\,(-y,x)^{\mathrm{T}}$$

in Polardarstellung (siehe oben):

$$\vec{v}\,(r,\varphi) = \frac{1}{r}\vec{e_\varphi} \qquad\qquad (r>0)$$

$$\operatorname{div}\big(\tfrac{1}{r}\vec{e_\varphi}\big) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\big(\tfrac{1}{r}\big) = 0$$

$$\big[\operatorname{rot}\big(\tfrac{1}{r}\vec{e_\varphi}\big)\big]_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\big(r\,\tfrac{1}{r}\big) = 0$$

Das Feld ist also quellen- und wirbelfrei.

↑ Gradient des Skalarfeldes $\Phi(r,\varphi)$

$$\operatorname{grad}\Phi(r,\varphi) \;=\; \frac{\partial\Phi}{\partial r}\,\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\,\vec{e_\varphi}$$

Zu

$$(\varphi, r) \quad\longrightarrow\quad (x,y)$$
$$x = r\cdot\cos\varphi$$
$$y = r\cdot\sin\varphi$$

existiert ($r>0$) eine Umkehrabbildung:

$$\psi\colon (x,y) \quad\longrightarrow\quad (\varphi, r)$$

Dies ermöglicht die Darstellung:

$$\begin{aligned}\Phi(r,\varphi) &= \Phi\big(\psi(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\big)\\ &= f(r\cdot\cos\varphi, r\cdot\sin\varphi)\end{aligned}$$

Beide Seiten können nun nach r und φ partiell abgeleitet werden.
Das Ergebnis lautet (allgemeine Kettenregel):

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -r\sin\varphi & r\cos\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

nebenbei: transponierte Jacobi-Matrix

Mit der inversen Matrix stellen wir um:

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\dfrac{\sin\varphi}{r}\\ \sin\varphi & \dfrac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r}\\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\end{pmatrix}$$

Mit den Basisvektoren

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \qquad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

erhalten wir den Gradienten.

↑ Divergenz des Vektorfeldes $\vec{v}(r,\varphi)$

$$\vec{v}\,(r,\varphi) \;=\; v_r(r,\varphi)\;\vec{e_r}\;+v_\varphi(r,\varphi)\;\vec{e_\varphi}$$

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \quad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}\vec{v}(r,\varphi) \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

Der Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f}{\partial x}\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\dfrac{\sin\varphi}{r}\\ \sin\varphi & \dfrac{\cos\varphi}{r}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\end{pmatrix}$$

entnehmen wir die Differentialoperatoren

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \frac{\partial}{\partial y} &= \sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\end{aligned}$$

und ermitteln mit ihnen die Divergenz:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{v}(r,\varphi) = \big(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\big)\,(v_r\cos\varphi - v_\varphi\sin\varphi)\\ +\big(\sin\varphi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\big)\,(v_r\sin\varphi + v_\varphi\cos\varphi) = \ldots\ldots \text{ siehe oben}\end{aligned}$$

Übersichtlichere Schreibweise siehe nächste Seite.

↑ Divergenz

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}$, $\vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ sind die normierten Ableitungen $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$.

$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}$ sind die Tangentenvektoren an die Koordinatenlinien in einem bestimmten Punkt.
Eine Koordinate wird fest gewählt, die zweite ist variabel.

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{v}(r,\varphi) &= \underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi}\Big)}_{\nabla\ \text{Nabla-Operator}}\cdot\big(v_r\vec{e_r} + v_\varphi\vec{e_\varphi}\ \big) && \text{Skalarprodukt}\\
&= \vec{e_r}\cdot\Big[\frac{\partial}{\partial r}(v_r\vec{e_r}) + \frac{\partial}{\partial r}(v_\varphi\vec{e_\varphi})\Big] + \frac{1}{r}\vec{e_\varphi}\cdot\Big[\frac{\partial}{\partial\varphi}(v_r\vec{e_r}) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\varphi\vec{e_\varphi})\Big] && \text{Produktregel}\\
&= \vec{e_r}\cdot\Big[\frac{\partial v_r}{\partial r}\vec{e_r} + v_r\underbrace{\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial r}}_{0} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r}\vec{e_\varphi} + v_\varphi\underbrace{\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial r}}_{0}\Big] + \frac{1}{r}\vec{e_\varphi}\cdot\Big[\frac{\partial v_r}{\partial\varphi}\vec{e_r} + v_r\underbrace{\frac{\partial\vec{e_r}}{\partial\varphi}}_{\vec{e_\varphi}} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\vec{e_\varphi} + v_\varphi\underbrace{\frac{\partial\vec{e_\varphi}}{\partial\varphi}}_{-\vec{e_r}}\Big]\\
&= \frac{\partial\vec{v_r}}{\partial r} + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{v_\varphi}}{\partial\varphi}, && \vec{e_r}\cdot\vec{e_\varphi} = \vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_r} = 0,\quad \vec{e_\varphi}\cdot\vec{e_\varphi} = \vec{e_r}\cdot\vec{e_r} = 1\\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\vec{v_r}) + \frac{1}{r}\frac{\partial\vec{v_\varphi}}{\partial\varphi} && \text{zusammengefasst}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{v}(r,\varphi) = \nabla\cdot\vec{v}\ =\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}}$$

↑ Umrechnung des Laplace-Operators Δ auf Polarkoordinaten

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \ldots\ldots = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Den Laplaceoperator erhalten wir, in dem wir in den Ausdruck für die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v}(r,\varphi) = \nabla\cdot\vec{v} \;=\; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

den speziellen Vektor

$$\vec{v} = \nabla f = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial r}}_{v_r}\vec{e}_r + \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}}_{v_\varphi}\vec{e}_\varphi \qquad \text{einsetzen.}$$

$$\begin{aligned}
\Delta f &= \nabla\cdot\nabla f \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} \qquad\qquad \text{Produktregel}
\end{aligned}$$

↑ Gradient in Polarkoordinaten, alternativ

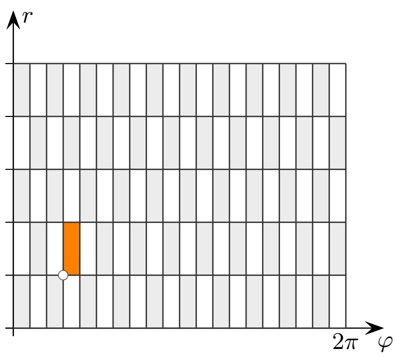
Für die infinitesimale Änderung einer skalaren Funktion f gilt:

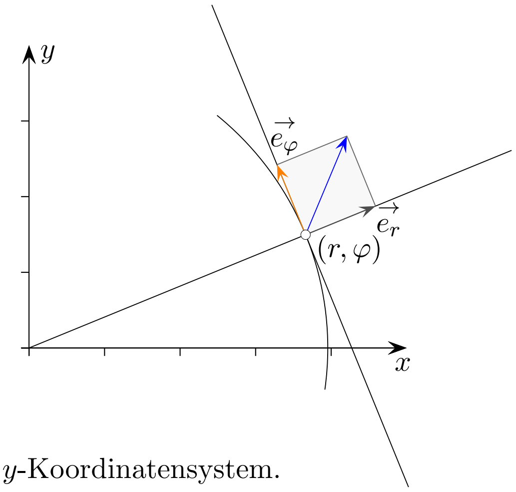
$$\begin{aligned} df(x,y) &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \\ &= \nabla f \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$

Diese Beziehung ist für den Vektor (Gradient) ∇f von f charakteristisch.
Wegen des Skalarprodukts ist df nicht davon abhängig, welche Basis ∇f und $\vec{x}$ zugrunde liegt.
Der Gradient zeigt an jeder Stelle in die Richtung des steilsten Anstieges von f.

Die Änderung des Skalarfeldes in Polarkoordinaten zwischen den Punkten
$\vec{r} = (\varphi, r)$ und $\vec{r} + d\vec{r} = (\varphi + d\varphi, r + dr)$ lautet (siehe φ, r-Koordinatensystem):

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \varphi}d\varphi \quad * \\ &= \nabla f \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

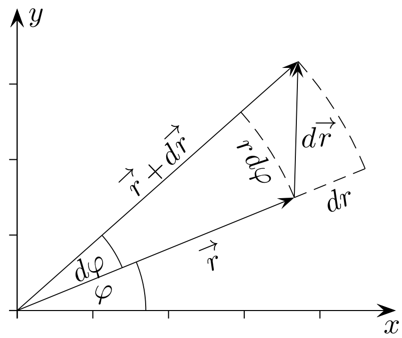




Wir ermitteln den Term für df (Wert bleibt gleich) im x, y-Koordinatensystem.
Für $d\vec{r}$ gilt hier der Zusammenhang: $d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

$\dfrac{\partial f}{\partial r}$ ist nun die Ableitung in Richtung $\vec{e}_r$, $\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$ die in Richtung $\vec{e}_\varphi$.

Der Gradient von f ist mit $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ darstellbar:



$$\begin{aligned} \nabla f &= a\,\vec{e}_r + b\,\vec{e}_\varphi, \qquad \text{es folgt} \\ \nabla f \cdot d\vec{r} &= (a\,\vec{e}_r + b\,\vec{e}_\varphi) \cdot (dr\,\vec{e}_r + r\,d\varphi\,\vec{e}_\varphi) \\ &= a\,dr + b\,r\,d\varphi \end{aligned}$$

Der Vergleich mit $*$ ergibt $a = \dfrac{\partial f}{\partial r}$, $b = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f}{\partial \varphi}$, d.h.

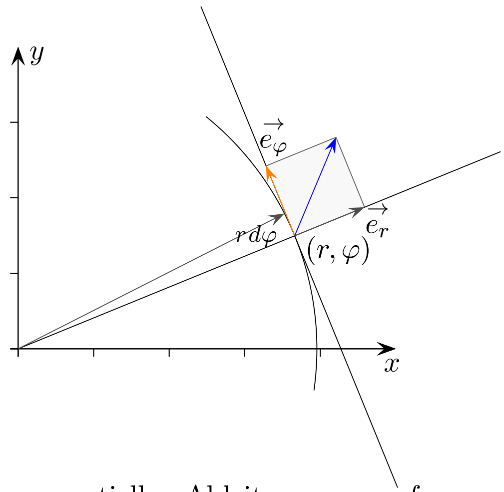
$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}$$

Nabla-Operator

$$\boxed{\nabla = \frac{\partial}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi}$$

↑ Gradienten

<u>Polarkoordinaten</u>



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}}$$

$\vec{e_r}$, $\vec{e_\varphi}$ sind die normierten Ableitungen $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$.
Der Gradient enthält die mit einem Normierungsfaktor versehenen partiellen Ableitungen von f.
Beachte hierzu:

$$r = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}\right|, \quad \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{df}{d\varphi}, \qquad \text{Änderungsrate } \frac{df}{r\,d\varphi}$$

<u>Zylinderkoordinaten</u>

$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e_z}}$$

<u>Kugelkoordinaten</u>

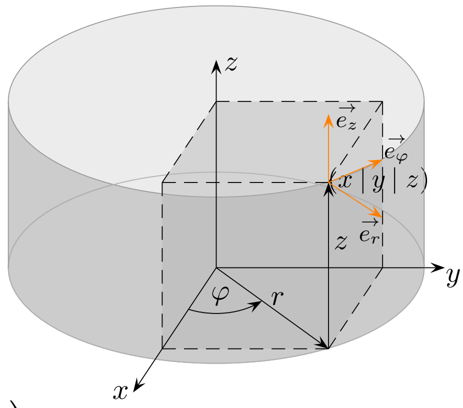
$$\boxed{\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \vartheta}\vec{e_\vartheta} + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e_\varphi}}$$

<u>allgemein</u>

$\vec{e_u}$, $\vec{e_v}$, $\vec{e_w}$ sind die normierten Ableitungen $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}$.

$$\boxed{\nabla f = \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right|}\frac{\partial f}{\partial u}\vec{e_u} + \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|}\frac{\partial f}{\partial v}\vec{e_v} + \frac{1}{\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right|}\frac{\partial f}{\partial w}\vec{e_w}}$$

↑ Zylinderkoordinaten



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} *, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(y/x) \\ z \end{pmatrix}$$

<u>Basisvektoren</u> (Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien,
jeweils zwei Koordinaten werden fest gewählt, die dritte ist variabel,
$*$ nach r, φ und z ableiten und normieren,
Basisvektoren krummliniger Koordinaten sind von Punkt zu Punkt verschieden.
Man spricht in diesem Zusammenhang vom begleitenden Dreibein.
$\vec{e_r} \times \vec{e_\varphi} = \vec{e_z}$, $\vec{e_\varphi} \times \vec{e_z} = \vec{e_r}$, $\vec{e_z} \times \vec{e_r} = \vec{e_\varphi}$, rechtshändig, $r\,\vec{e_\varphi}$ unnormiert, $r\,\vec{e_\varphi} \cdot r\,\vec{e_\varphi} = r^2$)

$$\vec{e_r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e_z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{metrischer Tensor} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiele

$$\vec{F}\,(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-yz \\ y+xz \\ z \end{pmatrix} \quad \text{in Polarkoordinaten:} \quad \vec{F}\,(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi - r\sin\varphi\cdot z \\ r\sin\varphi + r\cos\varphi\cdot z \\ 0 \end{pmatrix}$$

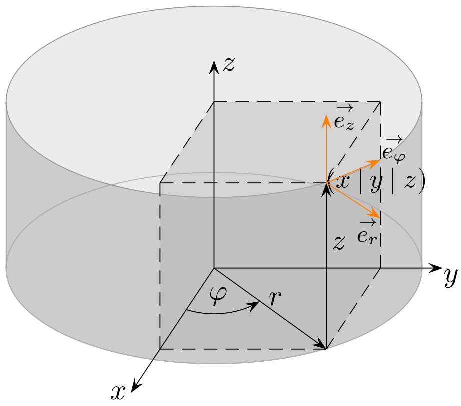
$$= r\,\vec{e_r} + rz\,\vec{e_\varphi} + z\,\vec{e_z}$$

$$\vec{F}\,(r,\varphi,z) = r\,\vec{e_r} + \vec{e_\varphi} + \vec{e_z} \quad \text{in kartesischen Koordinaten:} \quad \vec{F} = r\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\varphi - \sin\varphi \\ r\sin\varphi + \cos\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x - \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ y + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

↑ Zylinderkoordinaten



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} = \vec{r}, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ \arctan(y/x) \\ z \end{pmatrix}$$

<u>kovariante Basis</u> (unnormierte Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien)

$$\vec{b}_1 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_3 = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

kovarianter metrischer Tensor $g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

kontravarianter metrischer Tensor (siehe Tensoren) $g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

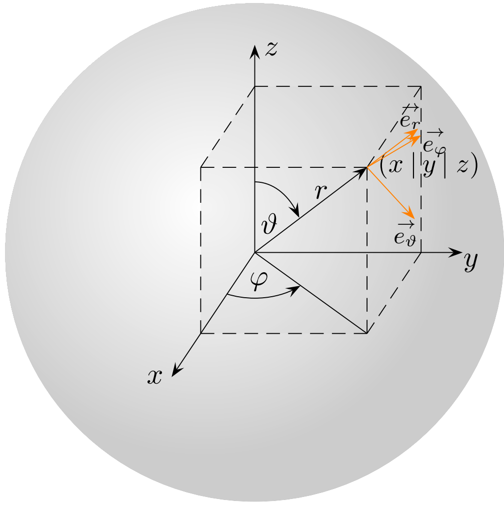
<u>kontravariante (duale, reziproke) Basis</u> $(\vec{b}_i \cdot \vec{b}^j = \delta_{i,j})$

$$\vec{b}^1 = \frac{\vec{b}_2 \times \vec{b}_3}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot\vec{b}_3} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}^2 = \frac{\vec{b}_3 \times \vec{b}_1}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot\vec{b}_3} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}^3 = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2)\cdot\vec{b}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^1 = \vec{b}_1, \qquad \vec{b}^2 = \frac{1}{r^2}\vec{b}_2, \qquad \vec{b}^3 = \vec{b}_3$$

Für eine orthonormierte Basis verschwindet der Unterschied zwischen ko- und kontravariant.

↑ Kugelkoordinaten



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin\vartheta \cos\varphi \\ r \sin\vartheta \sin\varphi \\ r \cos\vartheta \end{pmatrix} = \vec{r}, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \vartheta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \arccos(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \\ \arctan(y/x) \end{pmatrix}$$

<u>Basisvektoren</u> (Tangentialvektoren an die Koordinatenlinien)

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \qquad |\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}| = \sqrt{\sin^2\vartheta(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + \cos^2\vartheta} = 1, \qquad \vec{e_r} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = \begin{pmatrix} r\cos\vartheta\cos\varphi \\ r\cos\vartheta\sin\varphi \\ -r\sin\vartheta \end{pmatrix}, \qquad |\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}| = \sqrt{r^2\cos^2\vartheta + r^2\sin^2\vartheta} = r, \qquad \vec{e_\vartheta} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ r\sin\vartheta\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}| = \sqrt{r^2\sin^2\vartheta(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = r\sin\vartheta, \qquad \vec{e_\varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = 1, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\vartheta} = r^2, \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = r^2\sin^2\vartheta, \qquad \text{metrischer Tensor} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

↑ Linienelemente

Zylinderkoordinaten

$$ds^2 = (dr\ \ d\varphi\ \ dz)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\varphi \\ dz \end{pmatrix} = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Kugelkoordinaten

$$ds^2 = (dr\ \ d\vartheta\ \ d\varphi)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dr \\ d\vartheta \\ d\varphi \end{pmatrix} = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\, d\varphi^2$$

↑ Christoffel-Symbole für Polarkoordinaten

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Basis (nicht normiert)

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Die Ableitung eines Vektorfeldes (bezogen auf diese Basis) erfordert auch die Ableitung der Basiselemente, z. B. $\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ oder $\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$.

Es ist zweckmäßig, die Ableitungen der Basiselemente jeweils als Linearkombinationen dieser Basiselemente darzustellen. Dabei entstehen 2^3 Koeffizienten, die Christoffel-Symbole. Für Zylinderkoordinaten sind es 3^3 Koeffizienten.

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Für die Christoffel-Symbole ist hier keine Rechnung erforderlich, $a = 0,\ b = \frac{1}{r}$.

$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$ führt zum selben Ergebnis.

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Christoffel-Symbole $c = -r,\ d = 0$.

Die Bezeichnung $\Gamma^r_{r\varphi}$ (z. B.) für die Koeffizienten erlaubt eine eindeutige Zuordnung.
Der hochgestellte Index $\Gamma^r_{...},\ \Gamma^\varphi_{...}$ kennzeichnet das (rechts stehende) Basiselement.
Die tiefgestellten Indizes legen die partielle Ableitung eines bestimmten Basiselements fest.
Wegen der Vertauschbarkeit der Ableitungen ist die Reihenfolge unerheblich. Wir haben daher:

$$a = \Gamma^r_{r\varphi},\quad b = \Gamma^\varphi_{r\varphi},$$

$$c = \Gamma^r_{\varphi\varphi},\quad d = \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi},$$

Christoffel-Symbole ungleich null

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r$$

Siehe auch: Tangentialebene und Gradient
Tensoren und Koordinatentransformation
Startseite

↑