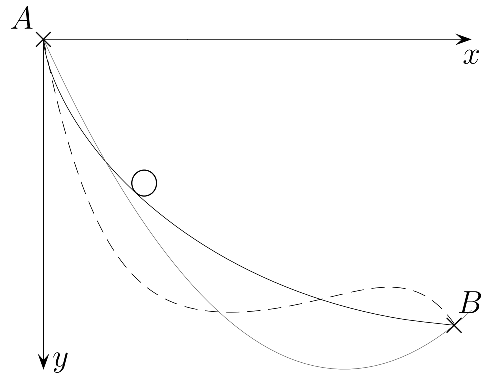
Variationsrechnung

Mit dem von Johann Bernoulli 1696 gestellten Brachistochronen-Problem (Auf welcher Kurve gleitet in kürzester Zeit ein Körper reibungsfrei von A nach B?) beschäftigten sich viele Mathematiker (Newton, Leibniz, Jakob Bernoulli, Hudde). Die grundlegenden Beziehungen lauten:

$$
\begin{aligned}
v &= \frac{ds}{dt} && s \text{ Bogenlänge, } t \text{ Zeit} \\
ds &= \sqrt{1+y'^2}\ dx \\
v &= \sqrt{2gy} && g \text{ Erdbeschleunigung} \\
\Longrightarrow\quad dt &= \frac{ds}{\sqrt{2gy}} \\
\Longrightarrow\quad T &= \int_0^a \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\ dx
\end{aligned}
$$



Gesucht ist also eine Funktion $y(x)$, die die Zeit minimiert.
Allgemeiner ist das Problem zu untersuchen:
Für welche Funktion $y(x)$ wird das Integral $J = \int_a^b L(y,\, y')\ dx$ extremal?

Euler gelang es, für die Lösungsfunktion $y_0(x)$ eine Differentialgleichung aufzustellen. Er betrachtete zu beliebig vorgegebenem $u(x)$ $(u(a) = u(b) = 0)$ die Funktionenschar $y_0(x) + \epsilon\, u(x)$ und das Integral

$$J(\epsilon) = \int_a^b L(y_0 + \epsilon\, u,\, y_0' + \epsilon\, u')\ dx$$

$J(\epsilon)$ muss an der Stelle $\epsilon = 0$ ein Extremum haben, d.h. es gilt $J'(0) = 0$.
Euler konnte hieraus $u(x)$ eliminieren. Ohne Beweis nehmen wir an, dass unter dem Integralzeichen differenziert werden darf. Mit der verallgemeinerten Kettenregel erhalten wir:

$$J'(\epsilon) = \int_a^b \big(L_y(...)\, u + L_{y'}(...)\, u'\big)\ dx$$

Um u ausklammern zu können, wird der zweite Summand partiell integriert:

$$\int_a^b L_{y'}(...)\, u'\ dx = \underbrace{\big[L_{y'}(...)\, u\big]_a^b}_{=0 \text{ siehe Randbedingungen}} - \int_a^b \frac{d}{dx} L_{y'}(...)\, u\ dx$$

$$J'(0) = \int_a^b \left(L_y(y_0,\, y_0') - \frac{d}{dx} L_{y'}(y_0,\, y_0')\right) u(x)\ dx$$

Da dieses Integral für jedes $u(x)$ null ist, muss auch für $y = y_0$ $\quad L_y(y,\, y') - \frac{d}{dx} L_{y'}(y,\, y') = 0$ sein.

Diese naheliegende Schlussweise kann leicht begründet werden. Wäre diese als stetig angenommene Funktion an einer Stelle größer (bzw. kleiner) als null, so würde dies auch für eine Umgebung gelten. Dann wäre eine stetige Funktion $u(x)$ denkbar, die außerhalb dieser Umgebung null und innerhalb größer als null wäre, so dass das Integral im Gegensatz zur Voraussetzung ungleich null wäre.

Diese Eulersche DGL lässt sich (nach einigem Probieren) vereinfachen. Wir bestätigen:

$$\frac{d}{dx}\,\big(L(y,\,y') - y'\,L_{y'}(y,\,y')\big) \;=\; L_y(...)\,y' + L_{y'}(...)\,y'' - y''\,L_{y'}(...) - y'\,\frac{d}{dx}\,L_{y'}(...)$$

$$= \underbrace{\left[L_y(y,\,y') - \frac{d}{dx}\,L_{y'}(y,\,y')\right]}_{=\,0}\,y'$$

$$\overset{\text{integrieren}}{\Longrightarrow} \qquad L(y,\,y') - y'\,L_{y'}(y,\,y') \;=\; C$$

Für das Brachistochronen-Problem erhalten wir mit $L(y,\,y') \;=\; \sqrt{\dfrac{1+y'^2}{2gy}}$ die DGL $y' = \sqrt{\dfrac{k-y}{y}}$.

Der Ansatz $y = k{\cdot}\sin^2\dfrac{t}{2}$ $\quad \left(\overset{1.}{=} \dfrac{k}{2}\,(1-\cos t)\,\right)$ für eine Lösung in Parameterdarstellung $x(t),\ y(t)$ führt

zu einer wurzelfreien Gleichung

$$y' \;\overset{2.}{=}\; \frac{\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}$$

t ist hierbei zunächst eine Funktion von x, nämlich die Umkehrfunktion von $x(t)$.
Nun gilt mit zwei Termen für y':

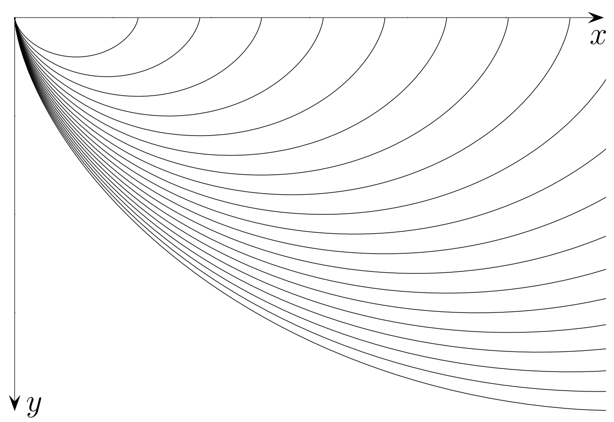
$$\frac{\cos\dfrac{t}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}} \;=\; \frac{k}{2}\cdot\underbrace{\sin t}_{\overset{3.}{=}\;2\,\sin\frac{t}{2}\,\cdot\,\cos\frac{t}{2}}\cdot\frac{dt}{dx}$$

Die rechte Seite ist die Ableitung des umgeformten Ansatzes.

$$\Longrightarrow \qquad \frac{dx}{dt} \;=\; k\cdot\sin^2\frac{t}{2} \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; \frac{k}{2}\,(1-\cos t) \qquad \overset{\text{integrieren}}{\Longrightarrow} \qquad x(t) \;=\; \frac{k}{2}\,(t-\sin t)$$

Die Parameterdarstellung einer Zykloide ist zu erkennen.

1. $\cos 2\alpha = 1 - 2\,\sin^2\alpha$
2. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
3. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$



Variation des Brachistochronen-Problems

Sei nun die höhenabhängige Geschwindigkeit allgemeiner durch eine Funktion $v(y)$ gegeben (statt $v = \sqrt{2gy}\,$). Als Modell wäre eine zu durchquerende Landschaft denkbar, die in einem Koordinatensystem auf den Parallelen zur x-Achse gleiche Bodenbeschaffenheit aufweist. Die möglichen Höchstgeschwindigkeiten werden durch $v(y)$ erfasst. Gesucht ist wieder der Weg zwischen zwei gegebenen Punkten, der in kürzester Zeit zurückgelegt werden kann. Es gilt also:

$$dt \;=\; \frac{ds}{v(y)}$$

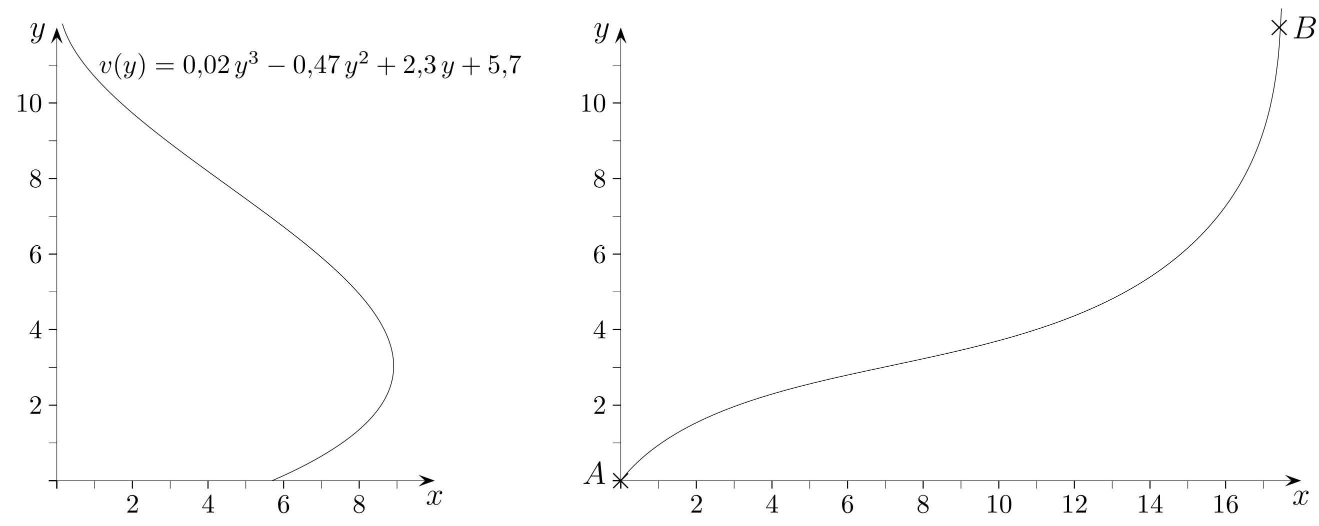
$$dt \;=\; \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}\;dx$$

$$\Longrightarrow\quad T \;=\; \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(y)}\;dx$$

Aus der Eulerschen DGL $L(y,\,y') - y'\,L_{y'}(y,\,y') \;=\; C$ erhalten wir ohne Schwierigkeiten die DGL:

$$y' = \sqrt{\frac{k}{[v(y)]^2}\; - 1}\;, \qquad k = \frac{1}{C^2}$$

Im folgenden Beispiel wurde die Lösungskurve iterativ erzeugt.



Wären die Geschwindigkeiten auch von x abhängig, wäre

$$T \;=\; \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,\,y)}\;dx$$

zu minimieren. Die zugehörige Eulersche DGL $L_y(x,\,y,\,y') - \dfrac{d}{dx}\,L_{y'}(x,\,y,\,y') \;=\; 0$ führt nach Differentiation nach x auf eine DGL 2. Ordnung.