

1. Vandermonde-Determinante
2. Weitere Idee zur Berechnung
3. Polynom-Interpolation
4. Multiplikation von Polynomen
5. Diskrete Fourier-Transformation (DFT)
6. Fast Fourier-Transformation (FFT)
7. Inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT)
8. Diskrete Fourier Transformation, anschaulich

↑ Vandermonde-Determinante

- 1.) von der 4. Spalte das x_1 -Fache der 3. Spalte subtrahieren, $x_1^3 - x_1x_1^2 = 0$, desgleichen
- 2.) von der 3. Spalte das x_1 -Fache der 2. Spalte, $x_1^2 - x_1x_1 = 0$
- 3.) von der 2. Spalte das x_1 -Fache der 1. Spalte, $x_1 - x_1 = 0$
- 4.) Determinante nach der 1. Zeile entwickeln (Unterdeterminante)
- 5.) aus der 1. Zeile den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der 2. Zeile den Faktor $(x_3 - x_1)$ usw.,
- 6.) Schritte mit dem jeweils x_2 -fachen wiederholen, ...

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_1x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_1x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_1x_4 & x_4^3 - x_1x_4^2 \end{vmatrix} \\
 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_1x_2^2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_1x_3^2 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1x_4 & x_4^3 - x_1x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1x_2 & x_2^3 - x_1x_2^2 \\ x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1x_3 & x_3^3 - x_1x_3^2 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1x_4 & x_4^3 - x_1x_4^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} \\
 = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_2x_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_2x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2x_3 \\ 1 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2x_3 \\ x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2x_4 \end{vmatrix} \\
 = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

insgesamt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_j - x_i)$$

↑

↑ Weitere Idee zur Berechnung

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} \qquad p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

Wir ersetzen x_4 durch die Variable x und erhalten das Polynom $p(x)$.
 $p(x)$ kann durch Entwicklung nach der letzten Zeile erhalten werden.

Das Polynom hat den Grad 3, der Koeffizient von x^3 lautet: $a_3 =$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind x_1, x_2, x_3 , da eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen null ist.
 Somit kann $p(x)$ in Linearfaktoren zerlegt werden: $p(x) = C(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
 C ist der Koeffizient von x^3 und stimmt mit a_3 überein. x_4 eingesetzt ergibt:

$$p(x_4) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}_C (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Mit C verfahren wir in der gleichen Weise und erhalten:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

insgesamt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = \prod_{1 \leq i < j \leq 4} (x_j - x_i)$$

↑

Aus dem Term $(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ ist zu ersehen, dass die Vandermonde-Determinante genau dann null ist, wenn in $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ zwei Zahlen gleich sind.

↑ Polynom-Interpolation

Gesucht ist ein Polynom höchstens n -ten Grades $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, das $n + 1$ gegebene Punkte:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n) \quad \text{mit } x_0 < x_1 < \dots < x_n \text{ interpoliert.}$$

Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Aa} = \mathbf{y}$$

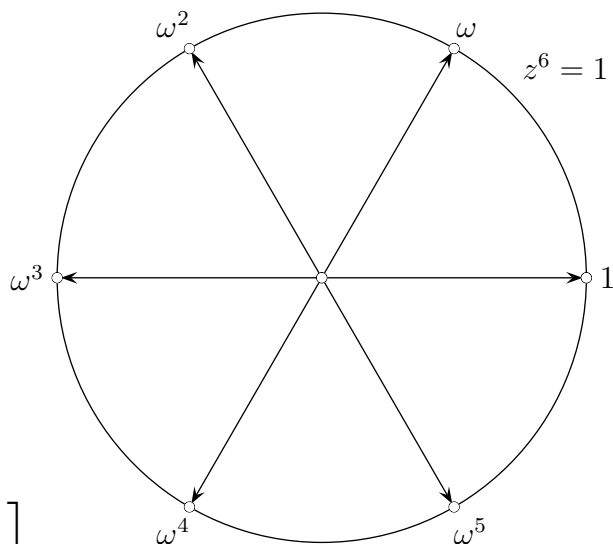
Die Vandermonde-Determinante ist ungleich null, \mathbf{A}^{-1} existiert, somit gibt es mit $\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{y}$ genau ein interpolierendes Polynom höchstens n -ten Grades.

Im Komplexen ist die Berechnung der inversen Matrix erfreulich einfach, wenn für die Stützstellen die $(n+1)$ -ten **Einheitswurzeln** (Lösungen der Gleichung $z^m = 1$, $m = n+1$) genommen werden. Mit $\omega = e^{2\pi i/m} = \cos(2\pi/m) + i \sin(2\pi/m)$ lauten die m Einheitswurzeln: $\omega, \omega^2, \dots, \omega^{m-1}$.

In \mathbb{C} entspricht der Multiplikation einer Drehstreckung.

ω^2 ergibt sich aus ω durch Drehung um $\alpha = 2\pi/m$.

Für den **Schwerpunkt** gilt: $\frac{1}{m}(1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{m-1}) = 0$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \omega^{m-1} & (\omega^{m-1})^2 & \dots & (\omega^{m-1})^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{Aa} = \mathbf{y}, \quad n = m - 1$$

↑ Polynom-Interpolation

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \dots & \bar{\omega}^{m-1} \\ 1 & \bar{\omega}^2 & (\bar{\omega}^2)^2 & \dots & (\bar{\omega}^2)^{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \bar{\omega}^{m-1} & (\bar{\omega}^{m-1})^2 & \dots & (\bar{\omega}^{m-1})^{m-1} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \bar{\omega} = \omega^{m-1} \\ \text{Dann gilt } \omega \cdot \bar{\omega} = 1, \text{ also ist } \bar{\omega} = \omega^{-1}. \end{array}$$

Die Idee für den Nachweis $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$ steckt in den folgenden Rechnungen:

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})_{(2,2)} = \frac{1}{m} (1 + \omega\bar{\omega} + \omega^2\bar{\omega}^2 + \dots + \omega^{m-1}\bar{\omega}^{m-1}) = \frac{1}{m} m = 1$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})_{(3,2)} = \frac{1}{m} (1 + \omega^2\bar{\omega} + (\omega^2)^2\bar{\omega}^2 + \dots + (\omega^2)^{m-1}\bar{\omega}^{m-1}) = \frac{1}{m} (1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{m-1}) = 0$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})_{(4,2)} = \frac{1}{m} (1 + \omega^3\bar{\omega} + (\omega^3)^2\bar{\omega}^2 + \dots + (\omega^3)^{m-1}\bar{\omega}^{m-1}) = \frac{1}{m} (1 + \omega^2 + \omega^4 + \dots + \omega^{2(m-1)})$$

Für $m = 6$ ergibt das $\frac{1}{6} (1 + \omega^2 + \omega^4 + \underbrace{\omega^6 + \omega^8 + \omega^{10}}_{(1 + \omega^2 + \omega^4)}) = 0$ Schwerpunkt

↑ Multiplikation von Polynomen

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

Berechnung des Produkts $p(x)q(x)$ vom Grad $2n$:

1. Die Polynome werden jeweils an $m = 2n + 1$ Stützstellen, genauer den m -ten Einheitswurzeln, ausgewertet.
2. Die Ergebnisse zu gleichen Stützstellen werden multipliziert, $p(\omega^k) \cdot q(\omega^k)$, $k = 0, \dots, 2n$.
3. Mit \mathbf{A}^{-1} werden die Koeffizienten des Produkts $p(x)q(x)$ berechnet.

Schritt 1. kann wesentlich beschleunigt werden.

Für diese Art der Polynomauswertung existiert ein effizienter Algorithmus (FFT, fast Fourier Transform, 1965), der zur schnellen Multiplikation zweier Polynome und zur diskreten Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung (a_i sind Messwerte) verwendet wird.

↑ Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \omega^{m-1} & (\omega^{m-1})^2 & \dots & (\omega^{m-1})^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \quad n = m - 1$$

Jedem Vektor \mathbf{a} der Länge m wird durch $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{y}$ mit den m -ten Einheitswurzeln ein Vektor \mathbf{y} zugeordnet, kurz $\text{DFT}(\mathbf{a}) = \mathbf{y}$. \mathbf{A} ist die Fourier-Matrix.

Idee für eine vereinfachte Berechnung von $\text{DFT}([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7])$, Länge(\mathbf{a}) = $n = 2^3$, (Vektor-Schreibweise horizontal) Aufteilung in Teilpolynome, für die

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 \\ &= \underbrace{(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6)}_{g(x), \text{ Grad } n-2} + x \underbrace{(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6)}_{h(x), \text{ Grad } n-2} \end{aligned}$$

Betrachten wir $p(a)$ und $p(-a)$.

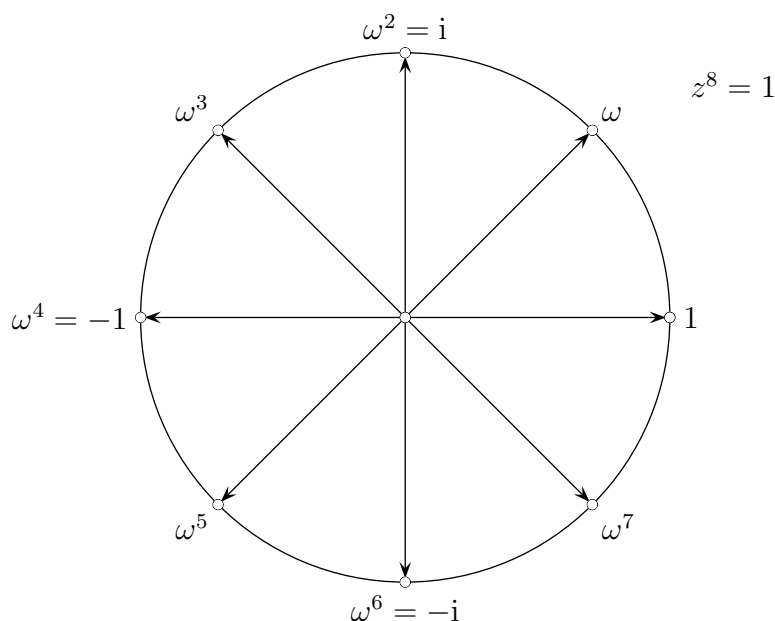
Für $-a$ ändert sich lediglich das Vorzeichen des zweiten Summanden!

$$p(a) = g(a) + ah(a)$$

$$p(-a) = g(a) - ah(a)$$

Somit wird der Rechenaufwand durch \pm -Stützstellen-Paare halbiert.

Die Auswertung an den 8-ten Einheitswurzeln $1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3$ (höchster Exponent $n/2 - 1$) vereinfacht die Auswertung an den restlichen Stellen $-1 = \omega_8^4, -\omega_8 = \omega_8^5, -\omega_8^2 = \omega_8^6, -\omega_8^3 = \omega_8^7$.



↑ Fast Fourier-Transformation (FFT)

Rekursionsschritt

Statt $g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6$

an den 8-ten Einheitswurzeln $1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3$ auszuwerten,

kann das Polynom $g^*(x) = a_0 + a_2x + a_4x + a_6x$

an den 4-ten Einheitswurzeln $1, \omega_4 = \omega_8^2, \omega_4^2 = \omega_8^4, \omega_4^3 = \omega_8^6$ ausgewertet werden, d. h.

es ist $\text{DFT}([a_0, a_2, a_4, a_6])$ zu ermitteln, desgleichen $\text{DFT}([a_1, a_3, a_5, a_7])$.

Die rekursive Längen-Halbierung ($n = 2^k$) endet mit der Länge $(\mathbf{a}) = 1$, $\text{DFT}(\mathbf{a}) = [a]$, $a \in \mathbb{R}$.

```
f = FFT(a)
  n = length(a)
  if n = 1
    f = a return
  else
    g = FFT([a0, a2, ..., an-2]), h = FFT([a1, a3, ..., an-1])
    p = [1,  $\omega_n$ ,  $\omega_n^2$ , ...,  $\omega_n^{n/2-1}$ ]
    f = [g + p*h, g - p*h] return      # * komponentenweise Multiplikation
  end
```

$\mathbf{f} = [\mathbf{g} + \mathbf{p} * \mathbf{h}, \mathbf{g} - \mathbf{p} * \mathbf{h}]$ bedeutet für die 1. Rekursionsstufe unseres Beispiels,

dass der Vektor

$$\text{DFT}([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7]) = [p(1), p(\omega_8), p(\omega_8^2), p(\omega_8^3), p(\omega_8^4), p(\omega_8^5), p(\omega_8^6), p(\omega_8^7)]$$

, mit dem ersten 4-elementigen Block $p(a) = g(a) + ah(a)$, $a = 1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3$

und dem 2. 4-elementigen Block $p(-a) = g(a) - ah(a)$, $a = -1, -\omega_8, -\omega_8^2, -\omega_8^3$

gebildet wird. gleichwertig wäre $a = \omega_8^4, \omega_8^5, \omega_8^6, \omega_8^7$

↑ Fast Fourier-Transformation (FFT)

Das folgende Beispiel soll den rekursiven Algorithmus weiter erhellen.

Die Eingabelänge sei 4. Mit der Fourier-Matrix der 4-ten Einheitswurzeln gilt dann:

$$\text{DFT}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{FFT}([d_0, d_1, d_2, d_3]) = ?$$

$$\mathbf{g} = \text{FFT}([d_0, d_2]) = \begin{bmatrix} d_0 + d_2 \\ d_0 - d_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{h} = \text{FFT}([d_1, d_3]) = \begin{bmatrix} d_1 + d_3 \\ d_1 - d_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{f} = [\mathbf{g} + \mathbf{p} * \mathbf{h}, \mathbf{g} - \mathbf{p} * \mathbf{h}]$ ergibt ausführlich notiert:

$$\text{FFT}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} d_0 + d_2 \\ d_0 - d_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_1 + d_3 \\ d_1 - d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 + d_2 + d_1 + d_3 \\ d_0 - d_2 + id_1 - id_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_0 + d_2 \\ d_0 - d_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} d_1 + d_3 \\ d_1 - d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 + d_2 - d_1 - d_3 \\ d_0 - d_2 - id_1 + id_3 \end{bmatrix}$$

Dies stimmt erwartungsgemäß mit $\text{DFT}(\mathbf{d})$ überein.

$$\text{FFT}([1, 1, 1, 0]) = [3, i, 1, -i]$$

↑ Inverse diskrete Fourier-Transformation (IDFT)

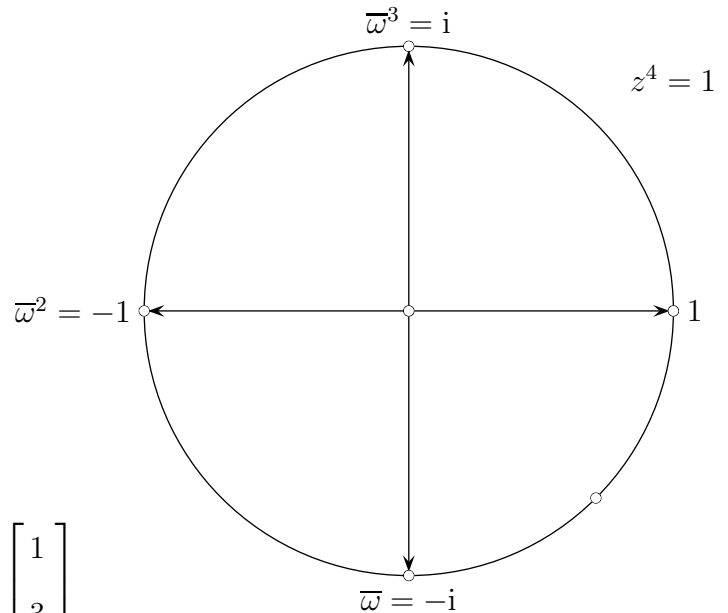
Die Eingabelänge sei 4.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \bar{\omega} & \bar{\omega}^2 & \bar{\omega}^3 \\ 1 & \bar{\omega}^2 & (\bar{\omega}^2)^2 & (\bar{\omega}^2)^3 \\ 1 & \bar{\omega}^3 & (\bar{\omega}^3)^2 & (\bar{\omega}^3)^3 \end{bmatrix} \quad \bar{\omega} = \omega^3$$

$$\text{IDFT}(\mathbf{y}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{DFT}([1, 2, 0, 3]) = [6, 1 - i, -4, 1 + i]$$

$$\text{IDFT}([6, 1 - i, -4, 1 + i]) = [1, 2, 0, 3]$$



$$\mathbf{y} = [6, 1 - i, -4, 1 + i]$$

$$\text{DFT}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Das Beispiel lässt vermuten, dass die Inverse DFT mit der DFT bzw. FFT berechnet werden kann. Das Ergebnis \mathbf{a} muss hier lediglich durch die Länge n von \mathbf{a} dividiert und umgruppiert werden: Vertausche \mathbf{a}_j mit \mathbf{a}_{n-j} für $j = 1$ bis $n/2 - 1$. Beachte hierzu:

$$\begin{aligned} & y_0 + y_1 \bar{\omega} + y_2 \bar{\omega}^2 + y_3 \bar{\omega}^3 && \text{siehe } \mathbf{A}^{-1} \\ = & y_0 + y_1 \omega^3 + y_2 \omega^2 + y_3 \omega && \bar{\omega} = \omega^{n-1}, \bar{\omega}^2 = \omega^{n-2}, \dots \\ = & y_0 + y_3 \omega + y_2 \omega^2 + y_1 \omega^3 \end{aligned}$$

↑

Es ist auch möglich, die Eingabe durch die Länge n von \mathbf{y} zu dividieren und umzugruppieren:

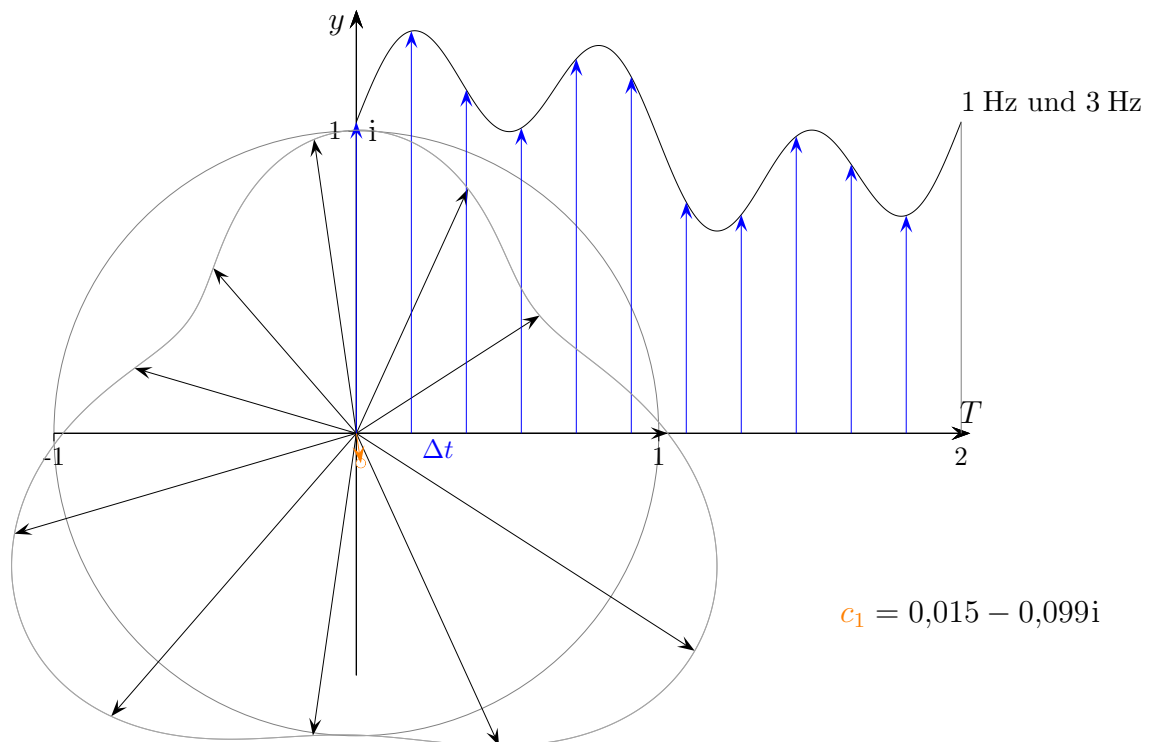
$$\mathbf{y} = \frac{1}{4}[6, 1 + i, -4, 1 - i]$$

$$\text{DFT}(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

↑ Diskrete Fourier Transformation, anschaulich

$$c_n = \frac{1}{N} \underbrace{\sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot \zeta_N^{k \cdot n}}_{\text{DFT}}, \quad N\text{-te Einheitswurzel, } \zeta_N = e^{-2\pi i \cdot \frac{1}{N}}, \quad a_k = x[k], \quad k\text{-ter Abtastwert}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a_k \cdot e^{-2\pi i n \cdot \frac{k}{N}}, \quad n = 0, \dots, N-1$$



Der Summenterm für c_n kann so gelesen werden, dass z. B. für $n = 1$ die blau gezeichneten Vektoren gleichmäßig um den Ursprung der komplexen Ebene gruppiert werden und hiervon der mittlere Vektor (**Schwerpunkt**) ermittelt wird. Man vergleiche den Verlauf der beiden Kurven. Dem 1. blauen Vektor auf der i -Achse ist der Vektor auf der Zeitachse zugeordnet. Für $n = 2$ wird der Kreis zweimal durchlaufen, usw., siehe nächste Seite.

Die DFT berechnet aus N Abtastwerten $x[n]$ in einem Zeitfenster der Länge $T = N\Delta t$ N komplexe Spektralwerte im Frequenzbereich $[0, f_a]$, $f_1 = 1/T$, $f_2 = 2/T$, $f_a = N/T$.

Die Frequenzauflösung ist also umgekehrt proportional zur Länge des Zeitfensters T .

Interessant ist nur die erste Hälfte des DFT-Spektrums, denn es ist $x[N-m]$ konjugiert komplex zu $x[m]$, $m = 1, \dots, N-1$.

$$N = 100, f_a = 100 \text{ Hz } (= N/T)$$

$$\implies T = 1 \text{ s}$$

$$\implies \Delta f = 1 \text{ Hz } (\text{Abstand der Spektallinien } 1/T = f_a/N = f_1, \text{ Spektrum bis } 50 \text{ Hz})$$

