Vandermonde-Determinante

1.) von der 4. Spalte das x_1-Fache der 3. Spalte subtrahieren, $x_1^3 - x_1 x_1^2 = 0$, desgleichen
2.) von der 3. Spalte das x_1-Fache der 2. Spalte, $x_1^2 - x_1 x_1 = 0$
3.) von der 2. Spalte das x_1-Fache der 1. Spalte, $x_1 - x_1 = 0$
4.) Determinante nach der 1. Zeile entwickeln (Unterdeterminante)
5.) aus der 1. Zeile den Faktor $(x_2 - x_1)$ herausziehen, aus der 2. Zeile den Faktor $(x_3 - x_1)$ usw.,
6.) Schritte mit dem jeweils x_2-fachen wiederholen, ...

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & x_2^3 - x_1 x_2^2 \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & x_3^3 - x_1 x_3^2 \\ 1 & x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & {x_2}^2 - x_1 x_2 & {x_2}^3 - x_1 x_2^2 \\ x_3 - x_1 & {x_3}^2 - x_1 x_3 & {x_3}^3 - x_1 x_3^2 \\ x_4 - x_1 & x_4^2 - x_1 x_4 & x_4^3 - x_1 x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_2 & 0 \\ 1 & x_3 & x_3^2 - x_2 x_3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 - x_2 x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x_3 - x_2 & x_3^2 - x_2 x_3 \\ 1 & x_4 - x_2 & x_4^2 - x_2 x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_3 - x_2 & {x_3}^2 - x_2 x_3 \\ x_4 - x_2 & {x_4}^2 - x_2 x_4 \end{vmatrix}$$

$$= (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \begin{vmatrix} 1 & x_3 \\ 1 & x_4 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

insgesamt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3) = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i)$$

Weitere Idee zur Berechnung

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} \qquad p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}$$

Wir ersetzen x_4 durch die Variable x und erhalten das Polynom $p(x)$.
$p(x)$ kann durch Entwicklung nach der letzten Zeile erhalten werden.
Das Polynom hat den Grad 3, der Koeffizient von x^3 lautet: $a_3 = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind x_1, x_2, x_3, da eine Determinante mit zwei gleichen Zeilen null ist.
Somit kann $p(x)$ in Linearfaktoren zerlegt werden: $p(x) = C(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$.
C ist der Koeffizient von x^3 und stimmt mit a_3 überein. x_4 eingesetzt ergibt:

$$p(x_4) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}}_{C} (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Mit C verfahren wir in der gleichen Weise und erhalten:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

insgesamt

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{vmatrix} = (x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1) = \prod_{1 \le i < j \le 4} (x_j - x_i)$$

Aus dem Term $(x_4 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_2 - x_1)$ ist zu ersehen, dass die Vandermonde-Determinante genau dann null ist, wenn in $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ zwei Zahlen gleich sind.

Polynom-Interpolation

Gesucht ist ein Polynom höchstens n-ten Grades $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$,
das $n+1$ gegebene Punkte:

$(x_0, y_0),\ (x_1, y_1),\ \ldots,\ (x_n, y_n) \quad$ mit $\ x_0 < x_1 < \ldots < x_n\ $ interpoliert.

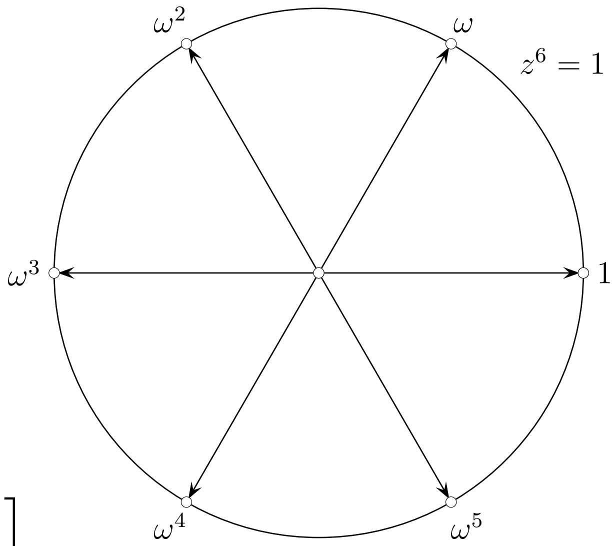
Koeffizientenmatrix des linearen Systems

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}$$

Die Vandermonde-Determinante ist ungleich null, $\boldsymbol{A}^{-1}$ existiert, somit gibt es
mit $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{y}$ genau ein interpolierendes Polynom höchstens n-ten Grades.

Im Komplexen ist die Berechnung der inversen Matrix erfreulich einfach, wenn für die
Stützstellen die $(n+1)$-ten Einheitswurzeln (Lösungen der Gleichung $z^m = 1$, $m = n+1$) genommen
werden. Mit $\omega = e^{2\pi/m\mathrm{i}} = \cos(2\pi/m) + \mathrm{i}\sin(2\pi/m)$ lauten die m Einheitswurzeln: $\omega, \omega^2 \ldots, \omega^{m-1}$.

In $\mathbb{C}$ entspricht der Multiplikation einer Drehstreckung.
ω^2 ergibt sich aus ω durch Drehung um $\alpha = 2\pi/m$.
Für den Schwerpunkt gilt: $\frac{1}{m}(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{m-1}) = 0$



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \ldots & \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \ldots & (\omega^2)^{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \omega^{m-1} & (\omega^{m-1})^2 & \ldots & (\omega^{m-1})^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{y}, \quad n = m-1$$

Polynom-Interpolation

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \overline{\omega} & \overline{\omega}^2 & \dots & \overline{\omega}^{m-1} \\ 1 & \overline{\omega}^2 & (\overline{\omega}^2)^2 & \dots & (\overline{\omega}^2)^{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \overline{\omega}^{m-1} & (\overline{\omega}^{m-1})^2 & \dots & (\overline{\omega}^{m-1})^{m-1} \end{bmatrix}$$

$\overline{\omega} = \omega^{m-1}$

Dann gilt $\omega \cdot \overline{\omega} = 1$, also ist $\overline{\omega} = \omega^{-1}$.

Die Idee für den Nachweis $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$ steckt in den folgenden Rechnungen:

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)_{(2,2)} = \frac{1}{m}\left(1 + \omega\overline{\omega} + \omega^2\overline{\omega}^2 + \ldots + \omega^{m-1}\overline{\omega}^{m-1}\right) = \frac{1}{m}m = 1$$

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)_{(3,2)} = \frac{1}{m}\left(1 + \omega^2\overline{\omega} + (\omega^2)^2\overline{\omega}^2 + \ldots + (\omega^2)^{m-1}\overline{\omega}^{m-1}\right) = \frac{1}{m}\left(1 + \omega + \omega^2 + \ldots + \omega^{m-1}\right) = 0$$

$$\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\right)_{(4,2)} = \frac{1}{m}\left(1 + \omega^3\overline{\omega} + (\omega^3)^2\overline{\omega}^2 + \ldots + (\omega^3)^{m-1}\overline{\omega}^{m-1}\right) = \frac{1}{m}\left(1 + \omega^2 + \omega^4 + \ldots + \omega^{2(m-1)}\right)$$

Für $m = 6$ ergibt das $\quad \frac{1}{6}\left(1 + \omega^2 + \omega^4 + \underbrace{\omega^6 + \omega^8 + \omega^{10}}_{(1 + \omega^2 + \omega^4)}\right) = 0 \qquad$ Schwerpunkt

Multiplikation von Polynomen

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

Berechnung des Produkts $p(x)q(x)$ vom Grad $2n$:

1. Die Polynome werden jeweils an $m = 2n + 1$ Stützstellen,
   genauer den m-ten Einheitswurzeln, ausgewertet.
2. Die Ergebnisse zu gleichen Stützstellen werden multipliziert, $p(\omega^k) \cdot q(\omega^k)$, $k = 0, \ldots, 2n$.
3. Mit $\boldsymbol{A}^{-1}$ werden die Koeffizienten des Produkts $p(x)q(x)$ berechnet.

Schritt 1. kann wesentlich beschleunigt werden.

Für diese Art der Polynomauswertung existiert ein effizienter Algorithmus (FFT, fast Fourier Transform, 1965), der zur schnellen Multiplikation zweier Polynome und zur diskreten Fourier-Transformation in der Signalverarbeitung (a_i sind Messwerte) verwendet wird.

Diskrete Fourier-Transformation (DFT)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \dots & \omega^{m-1} \\ 1 & \omega^2 & (\omega^2)^2 & \dots & (\omega^2)^{m-1} \\ \vdots & \ddots & & & \\ 1 & \omega^{m-1} & (\omega^{m-1})^2 & \dots & (\omega^{m-1})^{m-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \qquad n = m-1$$

Jedem Vektor $\boldsymbol{a}$ der Länge m wird durch $\boldsymbol{Aa} = \boldsymbol{y}$ mit den m-ten Einheitswurzeln ein Vektor $\boldsymbol{y}$ zugeordnet, kurz $\text{DFT}(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{y}$.

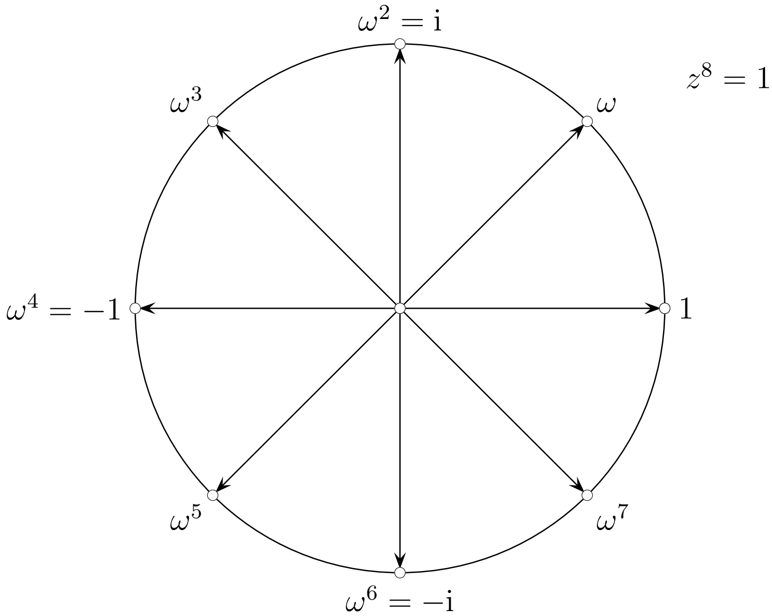
Idee für eine vereinfachte Berechnung von $\text{DFT}([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7])$, $\text{Länge}(\boldsymbol{a}) = n = 2^3$, (Vektor-Schreibweise nun horizontal) Aufteilung in Teilpolynome, für die

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 \\ &= \underbrace{(a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6)}_{g(x),\ \text{Grad } n-2} + x\,\underbrace{(a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6)}_{h(x),\ \text{Grad } n-2} \end{aligned}$$

Betrachten wir $p(a)$ und $p(-a)$.
Für $-a$ ändert sich lediglich das Vorzeichen des zweiten Summanden!

$$\begin{aligned} p(a) &= g(a) + ah(a) \\ p(-a) &= g(a) - ah(a) \end{aligned}$$

Somit wird der Rechenaufwand durch $\pm$-Stützstellen-Paare halbiert.
Die Auswertung an den 8-ten Einheitswurzeln $1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3$ (höchster Exponent $n/2 - 1$) vereinfacht die Auswertung an den restlichen Stellen $-1 = \omega_8^4$, $-\omega_8 = \omega_8^5$, $-\omega_8^2 = \omega_8^6$, $-\omega_8^3 = \omega_8^7$.



Fast Fourier-Transformation (FFT)

<u>Rekursionsschritt</u>

Statt $g(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6$
an den 8-ten Einheitswurzeln $1,\ \omega_8,\ \omega_8^2,\ \omega_8^3$ auszuwerten,
kann das Polynom $g^\star(x) = a_0 + a_2x + a_4x + a_6x$
an den 4-ten Einheitswurzeln $1,\ \omega_4 = \omega_8^2,\ \omega_4^2 = \omega_8^4,\ \omega_4^3 = \omega_8^6$ ausgewertet werden, d. h.
es ist $\text{DFT}([a_0, a_2, a_4, a_6])$ zu ermitteln, desgleichen $\text{DFT}([a_1, a_3, a_5, a_7])$.
Die rekursive Längen-Halbierung $(n = 2^k)$ endet mit der Länge$(\boldsymbol{a}) = 1$, $\text{DFT}(\boldsymbol{a}) = [a],\ a \in \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{f} =$ FFT($\boldsymbol{a}$)
    $n = \text{length}(\boldsymbol{a})$
    if $n = 1$
        $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{a}$ *return*
    else
        $\boldsymbol{g} = \text{FFT}([a_0, a_2, \cdots, a_{n-2}]),\quad \boldsymbol{h} = \text{FFT}([a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}])$
        $\boldsymbol{p} = \left[1, \omega_n, \omega_n^2, \ldots, \omega_n^{n/2-1}\right]$
        $\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{g} + \boldsymbol{p} * \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{g} - \boldsymbol{p} * \boldsymbol{h}]$ *return*   # $*$ komponentenweise Multiplikation
    end

$\boldsymbol{f} = [\boldsymbol{g} + \boldsymbol{p} * \boldsymbol{h},\ \boldsymbol{g} - \boldsymbol{p} * \boldsymbol{h}]$ bedeutet für die 1. Rekursionsstufe unseres Beispiels,
dass der Vektor

$$\text{DFT}([a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7]) = [p(1),\ p(\omega_8),\ p(\omega_8^2),\ p(\omega_8^3),\ p(\omega_8^4),\ p(\omega_8^5),\ p(\omega_8^6),\ p(\omega_8^7)]$$

, mit dem ersten 4-elementigen Block $p(a) = g(a) + ah(a), \quad a = 1, \omega_8, \omega_8^2, \omega_8^3$
und dem 2. 4-elementigen Block $p(-a) = g(a) - ah(a), \quad a = -1, -\omega_8, -\omega_8^2, -\omega_8^3$
gebildet wird. gleichwertig wäre $a = \omega_8^4,\ \omega_8^5,\ \omega_8^6,\ \omega_8^7$