

Ungleichungen

1. Einfache Ungleichungen
2. Ungleichungen mit Beträgen
3. Aufgaben
4. Bruchungleichungen 2 Seiten
5. Aufgaben
6. Quadratische Ungleichungen

↑ Ungleichungen

$$\begin{aligned} 1. \quad 2x &> 5x - 6 && | \quad -5x \\ -3x &> -6 && | \quad : (-3) \\ x &< 2 \\ L &= \{ x \mid x < 2 \} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen Zahlen (allen x), die die Bedingung $x < 2$ erfüllen.

Übliche Schreibweise:

Vor der Bedingung steht ein senkrechter Strich.

$$\begin{aligned} 2. \quad 3x - 10 &< 4x - 6 \\ 3. \quad 2 - 3(x - 2) &< 2 \\ 4. \quad 3x - (4x - 5)2 &< 5 \end{aligned}$$

Lösungsidee:

Gehe wie beim Lösen von Gleichungen vor, beachte jedoch:

Beim Multiplizieren und Dividieren mit einer negativen Zahl kehrt sich das Kleiner- ($<$), bzw. Größerzeichen ($>$), um, wie an den folgenden Beispielen zu sehen ist:

$$\begin{array}{cc} 2 < 5 & | \cdot (-1) & 3 > -2 & | \cdot (-1) \\ -2 > -5 & & -3 < 2 & \end{array}$$

(Die Multiplikation mit -1 ist hier natürlich nicht begründet, es soll an diesen Beispielen lediglich gezeigt werden, was passieren kann, wenn mit negativen Zahlen multipliziert wird.)

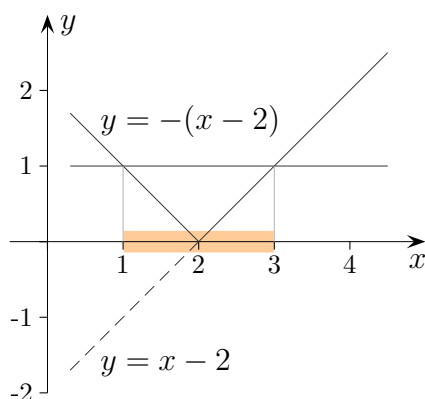
Lösungen:

$$\begin{aligned} 2. \quad L &= \{ x \mid -4 < x \} \\ 3. \quad L &= \{ x \mid 2 < x \} \\ 4. \quad L &= \{ x \mid 1 < x \} \end{aligned}$$

↑ Ungleichungen mit Beträgen

1. $|x - 2| < 1$

Der Graph von $f(x) = |x - 2|$ ergibt sich aus der Geraden $y = x - 2$, wobei der unterhalb der x -Achse liegende Teil nach oben geklappt wird. Der Lösungsbereich ist unmittelbar ersichtlich. Hier ist es ein offenes Intervall.



Für die rechnerische Bearbeitung können die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} x - 2 &< 1 \\ -(x - 2) &< 1 \end{aligned} \quad \text{gelöst werden.}$$

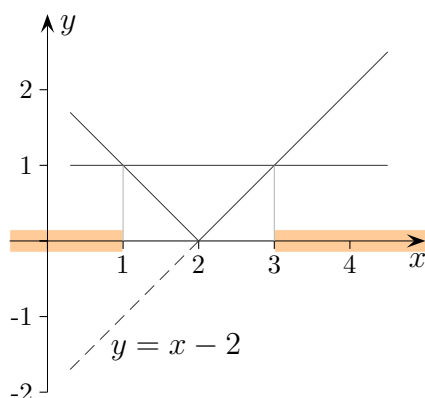
Präziser (und umständlicher) wäre:
Sei $x - 2 \geq 0$, d. h. $x \geq 2$,
 $x - 2 < 1$ bedeutet $x < 3$,
beides zusammen ergibt: $2 \leq x < 3$.

2. $|x - 2| > 1$

Wieder ist der Lösungsbereich unmittelbar ersichtlich. In diesem Fall ist er zweiteilig.

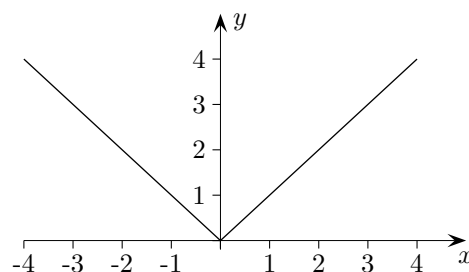
Sei $x - 2 < 0$, d. h. $x < 2$,
 $-(x - 2) < 1$ bedeutet $x > 1$,
beides zusammen ergibt: $1 < x < 2$.

Insgesamt $1 < x < 3$



Das Vorgehen beruht auf der Definition des Betrags.

$$\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



Die Lösungen der Ungleichungen $x > 3$ und $x < 1$

$$\begin{aligned} x - 2 &> 1 \\ -(x - 2) &> 1 \end{aligned} \quad \text{erinnern an die zweiteilige Variante.}$$

↑

1. $|4x - 6| > 2$

2. $|2x + 1| \leq 5$

3. $|3x + 2| \geq 6$

4. $|7x - 5| < 1$

5. $\frac{2x}{|x+1|} \geq 1$

6. $\frac{x+3}{|2x-1|} \leq 2$

1. $|4x - 6| > 2$ $(-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

2. $|2x + 1| \leq 5$ $[-3, 2]$

3. $|3x + 2| \geq 6$ $(-\infty, -\frac{8}{3}] \cup [\frac{4}{3}, \infty)$

4. $|7x - 5| < 1$ $(\frac{4}{7}, \frac{6}{7})$

5. $\frac{2x}{|x + 1|} \geq 1$ $[1, \infty)$

Mit dem positiven Nenner darf gefahrlos multipliziert werden.

6. $\frac{x + 3}{|2x - 1|} \leq 2$ $(-\infty, -\frac{1}{5}] \cup [\frac{5}{3}, \infty)$

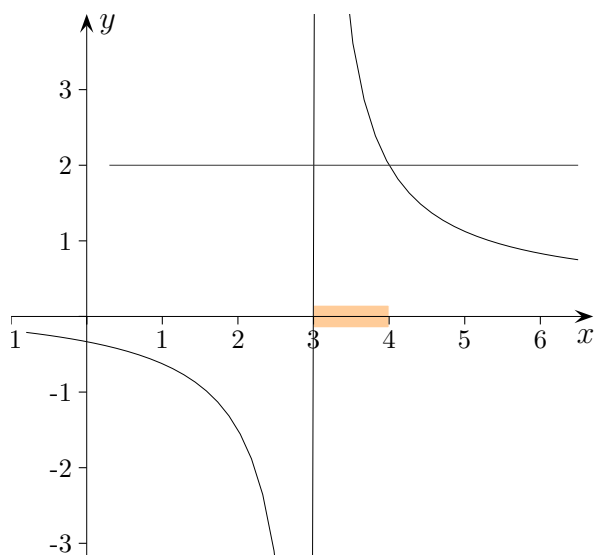
↑ Bruchungleichungen

1. $\frac{x+4}{4x-12} > 2$

Mit dem Graph von $f(x) = \frac{x+4}{4x-12}$ wird der Lösungsbereich (offenes Intervall) sichtbar.

Der Lösungsbereich für $\frac{x+4}{4x-12} + 3 > 2$ wäre jedoch zweiteilig.

Aus der Ungleichung ist ein-/zweiteilig nicht unmittelbar zu erkennen.



Für die rechnerische Bearbeitung müssen 2 Fälle (Nenner positiv bzw. negativ) unterschieden werden.

Nenner positiv $4x - 12 > 0$ liegt im Bereich (ausrechnen!) $x > 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} > 2 \quad | \cdot (4x-12) \quad (> 0)$$

$$x+4 > 2 \cdot (4x-12).$$

⋮

$$x < 4$$

$x < 4$ schränkt den Bereich $x > 3$ auf $(3, 4)$ ein.

Nenner negativ $4x - 12 < 0$ liegt im Bereich $x < 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} > 2 \quad | \cdot (4x-12) \quad (< 0)$$

$$x+4 < 2 \cdot (4x-12).$$

⋮

$$x > 4$$

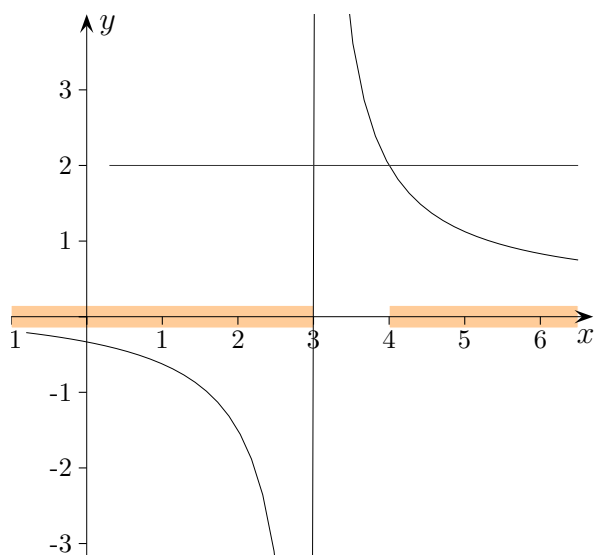
Kein x erfüllt beide Bedingungen, so dass der Lösungsbereich $(3, 4)$ lautet.

↑

↑ Bruchungleichungen

1. $\frac{x+4}{4x-12} < 2$

Mit dem Graph von $f(x) = \frac{x+4}{4x-12}$ wird der Lösungsbereich (zweiteilig) sichtbar.



Für die rechnerische Bearbeitung müssen 2 Fälle (Nenner positiv bzw. negativ) unterschieden werden.

Nenner positiv $4x - 12 > 0$ liegt im Bereich (ausrechnen!) $x > 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} < 2 \quad | \cdot (4x-12) \quad (> 0)$$

$$x+4 < 2 \cdot (4x-12).$$

⋮

$$x > 4$$

Auf dem Bereich $x > 4$ sind beide Bedingungen erfüllt.

Nenner negativ $4x - 12 < 0$ liegt im Bereich $x < 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} < 2 \quad | \cdot (4x-12) \quad (< 0)$$

$$x+4 > 2 \cdot (4x-12).$$

⋮

$$x < 4$$

Der Bereich $(-\infty, 3)$ erfüllt beide Bedingungen, gesamter Lösungsbereich: $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

↑

1. $\frac{x}{2x+1} < 1$

2. $\frac{x}{2x-1} \geq 3$

3. $\frac{x-2}{1-3x} \leq 4$

4. $\frac{5x-2}{x} > 4$

1. $\frac{x}{2x+1} < 1$ $(-\infty, 1) \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$

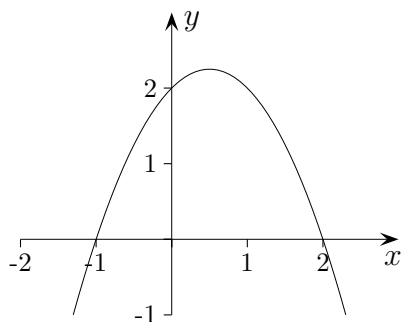
2. $\frac{x}{2x-1} \geq 3$ $(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}]$

3. $\frac{x-2}{1-3x} \leq 4$ $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup [\frac{6}{13}, \infty)$

4. $\frac{5x-2}{x} > 4$ $(-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

↑ Quadratische Ungleichungen

1. $-x^2 + x + 2 < 0$



$$f(x) = -x^2 + x + 2$$

$$\text{Nullstellen: } x_1 = -1, x_2 = 2$$

$$L = \{x \mid x < -1 \text{ oder } 2 < x\}$$

2. $x^2 - 4 \leq 0$

3. $x^2 - 3x - 4 < 0$

4. $-x^2 + 3x + 4 < 0$

5. $x^2 - 5x \leq 0$

Lösungsidee:

Betrachte den Term mit x als Funktionsterm einer Parabel und bestimme die Nullstellen. Aus einer Skizze kann die Lösungsmenge dann abgelesen werden.

Überlege, für welche Bereiche die Funktionswerte oberhalb, bzw. unterhalb der x -Achse liegen.

Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x^2 \dots$ sind nach oben geöffnet,

Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = -x^2 \dots$ sind nach unten geöffnet.

Lösungen:

2. $f(x) = x^2 - 4$ Nullstellen: $x_1 = 2, x_2 = -2$
 $L = \{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$

3. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ Nullstellen: $x_1 = -1, x_2 = 4$
 $L = \{x \mid -1 < x < 4\}$

4. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ Nullstellen: $x_1 = -1, x_2 = 4$
 $L = \{x \mid x < -1 \text{ oder } 4 < x\}$

5. $f(x) = x^2 - 5x$ Nullstellen: $x_1 = 0, x_2 = 5$
 $L = \{x \mid 0 \leq x \leq 5\}$