Einfache Ungleichungen

Ungleichungen mit Beträgen

Bruchungleichungen

Quadratische Ungleichungen

Ungleichungen

1. $$\begin{aligned} 2x &> 5x - 6 \quad && | \; -5x \\ -3x &> -6 && | \; : (-3) \\ x &< 2 \end{aligned}$$

$$L = \{ x \mid x < 2 \}$$

Die Lösungsmenge besteht aus allen Zahlen (allen x), die die Bedingung $x < 2$ erfüllen.

Übliche Schreibweise:
Vor der Bedingung steht ein senkrechter Strich.

2. $3x - 10 < 4x - 6$

3. $2 - 3(x - 2) < 2$

4. $3x - (4x - 5)2 < 5$

Lösungsidee:
Gehe wie beim Lösen von Gleichungen vor, beachte jedoch:

Beim Multiplizieren und Dividieren mit einer negativen Zahl kehrt sich das Kleiner- ($<$), bzw. Größerzeichen ($>$), um, wie an den folgenden Beispielen zu sehen ist:

$$\begin{aligned} 2 &< 5 \quad | \cdot (-1) \qquad & 3 &> -2 \quad | \cdot (-1) \\ -2 &> -5 & -3 &< 2 \end{aligned}$$

(Die Multiplikation mit -1 ist hier natürlich nicht begründet, es soll an diesen Beispielen lediglich gezeigt werden, was passieren kann, wenn mit negativen Zahlen multipliziert wird.)

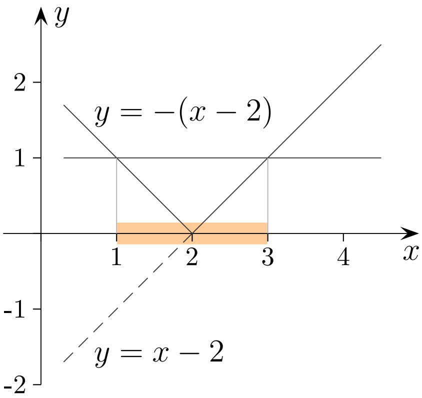
Lösungen:

2. $L = \{ x \mid -4 < x \}$
3. $L = \{ x \mid 2 < x \}$
4. $L = \{ x \mid 1 < x \}$

Ungleichungen mit Beträgen

1. $|\,x-2\,| < 1$

Der Graph von $f(x) = |\,x-2\,|$ ergibt sich aus der Geraden $y = x-2$, wobei der unterhalb der x-Achse liegende Teil nach oben geklappt wird. Der Lösungsbereich ist unmittelbar ersichtlich. Hier ist es ein offenes Intervall.



Für die rechnerische Bearbeitung können die beiden Ungleichungen

$$\begin{aligned} x-2 &< 1 \\ -(x-2) &< 1 \end{aligned}$$

gelöst werden.

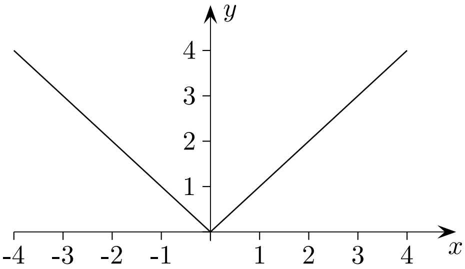
Präziser (und umständlicher) wäre:
Sei $x-2 \geq 0$, d.h. $x \geq 2$,
$x-2 < 1$ bedeutet $x < 3$,
beides zusammen ergibt: $2 \leq x < 3$.

Sei $x-2 < 0$, d.h. $x < 2$,
$-(x-2) < 1$ bedeutet $x > 1$,
beides zusammen ergibt: $1 < x < 2$.

Insgesamt $1 < x < 3$

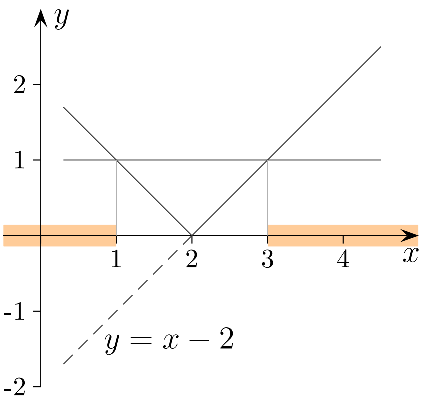
Das Vorgehen beruht auf der Definition des Betrags.

$$\sqrt{x^2} = |\,x\,| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$



2. $|\,x-2\,| > 1$

Wieder ist der Lösungsbereich unmittelbar ersichtlich. In diesem Fall ist er zweiteilig.



Die Lösungen der Ungleichungen $x > 3$ und $x < 1$

$$\begin{aligned} x-2 &> 1 \\ -(x-2) &> 1 \end{aligned}$$

erinnern an die zweiteilige Variante.

1. $|\,4x-6\,| > 2$

2. $|\,2x+1\,| \leq 5$

3. $|\,3x+2\,| \geq 6$

4. $|\,7x-5\,| < 1$

5. $\dfrac{2x}{|\,x+1\,|} \geq 1$

6. $\dfrac{x+3}{|\,2x-1\,|} \leq 2$

1. $|\,4x-6\,| > 2$ $\qquad (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

2. $|\,2x+1\,| \leq 5$ $\qquad [-3, 2]$

3. $|\,3x+2\,| \geq 6$ $\qquad (-\infty, -\frac{8}{3}\,] \cup [\,\frac{4}{3}, \infty)$

4. $|\,7x-5\,| < 1$ $\qquad (\frac{4}{7}, \frac{6}{7})$

5. $\dfrac{2x}{|\,x+1\,|} \geq 1$ $\qquad [1, \infty)$

Mit dem positiven Nenner darf gefahrlos multipliziert werden.

6. $\dfrac{x+3}{|\,2x-1\,|} \leq 2$ $\qquad (-\infty, -\frac{1}{5}\,] \cup [\,\frac{5}{3}, \infty)$

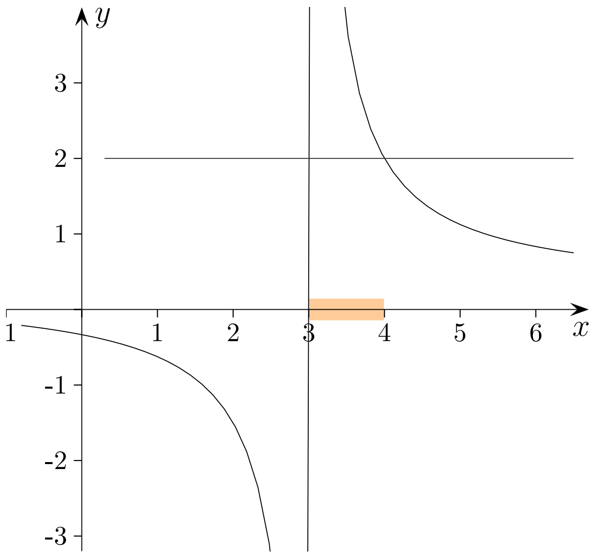
Bruchungleichungen

1. $\dfrac{x+4}{4x-12} > 2$

Mit dem Graph von $f(x) = \dfrac{x+4}{4x-12}$ wird der Lösungsbereich (offenes Intervall) sichtbar.

Der Lösungsbereich für $\dfrac{x+4}{4x-12} + 3 > 2$ wäre jedoch zweiteilig.

Aus der Ungleichung ist ein-/zweiteilig nicht unmittelbar zu erkennen.



Für die rechnerische Bearbeitung müssen 2 Fälle (Nenner positiv bzw. negativ) unterschieden werden.

Nenner positiv $4x - 12 > 0$ liegt im Bereich (ausrechnen!) $x > 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} > 2 \qquad\qquad | \cdot (4x-12) \quad (> 0)$$

$$x + 4 > 2 \cdot (4x-12).$$
$$\vdots$$
$$x < 4$$

$x < 4$ schränkt den Bereich $x > 3$ auf $(3, 4)$ ein.

Nenner negativ $4x - 12 < 0$ liegt im Bereich $x < 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} > 2 \qquad\qquad | \cdot (4x-12) \quad (< 0)$$

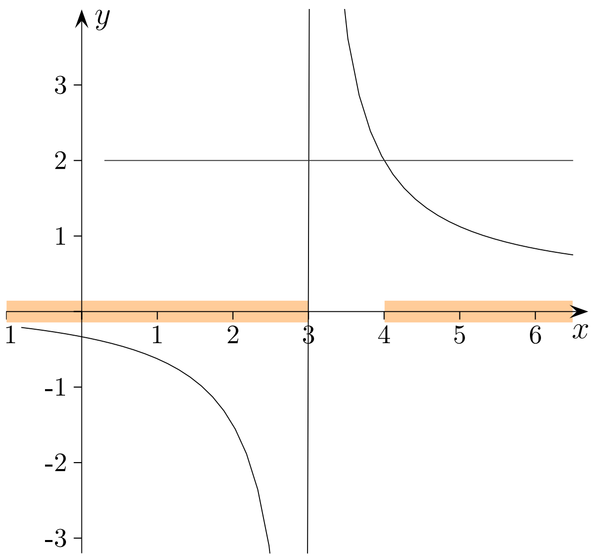
$$x + 4 < 2 \cdot (4x-12).$$
$$\vdots$$
$$x > 4$$

Kein x erfüllt beide Bedingungen, so dass der Lösungsbereich $(3, 4)$ lautet.

Bruchungleichungen

1. $\dfrac{x+4}{4x-12} < 2$

Mit dem Graph von $f(x) = \dfrac{x+4}{4x-12}$ wird der Lösungsbereich (zweiteilig) sichtbar.



Für die rechnerische Bearbeitung müssen 2 Fälle (Nenner positiv bzw. negativ) unterschieden werden.
Nenner positiv $4x - 12 > 0$ liegt im Bereich (ausrechnen!) $x > 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} < 2 \qquad\qquad | \cdot (4x-12) \quad (>0)$$

$$x + 4 < 2 \cdot (4x - 12).$$

$$\vdots$$

$$x > 4$$

Auf dem Bereich $x > 4$ sind beide Bedingungen erfüllt.

Nenner negativ $4x - 12 < 0$ liegt im Bereich $x < 3$ vor.

$$\frac{x+4}{4x-12} < 2 \qquad\qquad | \cdot (4x-12) \quad (<0)$$

$$x + 4 > 2 \cdot (4x - 12).$$

$$\vdots$$

$$x < 4$$

Der Bereich $(-\infty, 3)$ erfüllt beide Bedingungen, gesamter Lösungsbereich: $(-\infty, 3) \cup (4, \infty)$.

1. $\dfrac{x}{2x+1} < 1$

2. $\dfrac{x}{2x-1} \geq 3$

3. $\dfrac{x-2}{1-3x} \leq 4$

4. $\dfrac{5x-2}{x} > 4$

1. $\dfrac{x}{2x+1} < 1$ $\qquad (-\infty, 1) \cup (-\dfrac{1}{2}, \infty)$

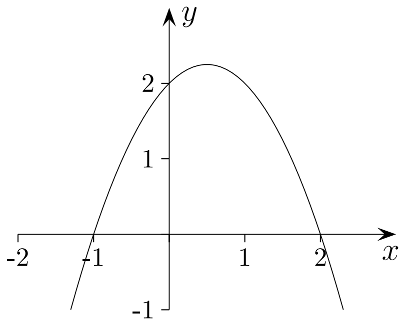
2. $\dfrac{x}{2x-1} \geq 3$ $\qquad (\ \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{5}\ ]$

3. $\dfrac{x-2}{1-3x} \leq 4$ $\qquad (-\infty, \dfrac{1}{3}) \cup [\dfrac{6}{13}, \infty)$

4. $\dfrac{5x-2}{x} > 4$ $\qquad (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$

Quadratische Ungleichungen

1. $-x^2 + x + 2 < 0$



$f(x) = -x^2 + x + 2$

Nullstellen: $x_1 = -1, \;\; x_2 = 2$

$L = \{\, x \mid x < -1 \text{ oder } 2 < x \}$

2. $x^2 - 4 \leq 0$

3. $x^2 - 3x - 4 < 0$

4. $-x^2 + 3x + 4 < 0$

5. $x^2 - 5x \leq 0$

Lösungsidee:
Betrachte den Term mit x als Funktionsterm einer Parabel und bestimme die Nullstellen. Aus einer Skizze kann die Lösungsmenge dann abgelesen werden.

Überlege, für welche Bereiche die Funktionswerte oberhalb, bzw. unterhalb der x-Achse liegen.

Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = x^2 ...$ sind nach oben geöffnet,
Parabeln mit den Funktionsgleichungen $f(x) = -x^2 ...$ sind nach unten geöffnet.

Lösungen:

2. $f(x) = x^2 - 4$ Nullstellen: $x_1 = 2, \; x_2 = -2$
   $L = \{\, x \mid -2 \leq x \leq 2 \}$

3. $f(x) = x^2 - 3x - 4$ Nullstellen: $x_1 = -1, \; x_2 = 4$
   $L = \{\, x \mid -1 < x < 4 \}$

4. $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ Nullstellen: $x_1 = -1, \; x_2 = 4$
   $L = \{\, x \mid x < -1 \text{ oder } 4 < x \}$

5. $f(x) = x^2 - 5x$ Nullstellen: $x_1 = 0, \; x_2 = 5$
   $L = \{\, x \mid 0 \leq x \leq 5 \}$