Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Die Ergebnisse eines Zufallsexperiments und deren Wahrscheinlichkeiten sind in der Tabelle enthalten.

k	1	2	3	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

Zudem sind zwei Zufallsvariablen definiert,
die jeweils zwei verschiedene Werte annehmen.

$$X(k) = \begin{cases} x_1 & k \in \{1,3\} \\ x_2 & k \in \{2,4,5\} \end{cases} \qquad Y(k) = \begin{cases} y_1 & k \in \{1,4,5\} \\ y_2 & k \in \{2,3\} \end{cases}$$

Mit z. B. $X = x_1$ wird das Ereignis $\{1,3\}$ erfasst, es ist $P(X = x_1) = \frac{1}{2}$.
$X = x_2 \wedge Y = y_1$ ist der Schnitt von $X = x_2$ und $Y = y_1$, $P(X = x_2 \wedge Y = y_1) = P(\{4,5\}) = \frac{1}{4}$

Für jeweils ein durch X und Y definiertes Ereignis kann die Unabhängigkeit mit
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ geprüft werden.
Gilt nun $P(X = x_i \wedge Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$ für alle Funktionswertepaare (x_i, y_j), d. h. für alle durch X und Y definierten Ereignisse, so heißen die Zufallsvariablen X und Y stochastisch unabhängig.

Zur Überprüfung der stochastischen Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X und Y kann die Vier-Felder-Tafel aufgestellt werden (im allgemeinen Fall die n-Felder-Tafel), die die gemeinsame Verteilung $(x_i, y_j) \longrightarrow P(X = x_i \wedge Y = y_j)$ enthält.

	$Y = y_1$	$Y = y_2$	*Summe*
$X = x_1$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$X = x_2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
Summe	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Die stochastische Unabhängigkeit ist nun mit einem Blick zu erkennen.