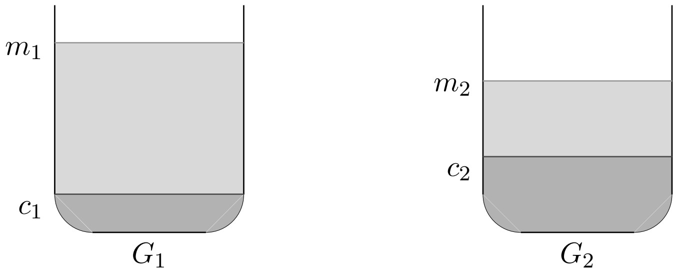
Umfüll-Probleme

In den beiden Gefäßen befinden sich die Flüssigkeitsmengen m_1 und m_2, in denen die Substanzmengen c_1 bzw. c_2 gelöst sind. Eine Einheit wird unter Umrühren dem ersten Gefäß entnommen und in das zweite Gefäß gegossen. Anschließend wird dem zweiten Gefäß unter Umrühren eine Einheit entnommen und in das erste Gefäß gegossen, usw.



Seien die Substanzmengen im 1. und 2. Gefäß d_1 bzw. d_2.
Nach dem Umfüllen von 1 nach 2 betragen sie dann $d_1 - \frac{d_1}{m_1}$ bzw. $d_2 + \frac{d_1}{m_1}$.
Der Hin-Umfüllvorgang wird durch die Matrix

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{m_1} & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 1 \end{pmatrix}$$

übersichtlich beschrieben.

Gehen wir wieder von Substanzmengen d_1 bzw. d_2 im 1. und 2. Gefäß aus.
Nach dem Umfüllen von 2 nach 1 betragen sie dann $d_1 + \frac{d_2}{m_2+1}$ bzw. $d_2 - \frac{d_2}{m_2+1}$.
Der Rück-Umfüllvorgang wird durch die Matrix

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{m_2+1} \\ 0 & 1 - \frac{1}{m_2+1} \end{pmatrix}$$

erfasst,
der gesamte Vorgang durch $\mathcal{V} = \mathcal{R}\mathcal{H}$.

Die Grenzmatrix muss sein: $\mathcal{V}^\infty = \frac{1}{m_1+m_2} \begin{pmatrix} m_1 & m_1 \\ m_2 & m_2 \end{pmatrix}$,

da $c_1 + c_2$ gemäß den Mengenanteilen verteilt wird.

$\mathcal{V}$ besitzt zu den Eigenwerten 1 und $\frac{m_2(m_1-1)}{m_1(m_2+1)}$ die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} \frac{m_1}{m_2} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Beispiel:

$m_1 = c_1 = 6$, $m_2 = 2$, $c_2 = 0$

$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} c_1^\infty \\ c_2^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c_n} = \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{27}{10} \cdot (\frac{5}{9})^n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{c_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$