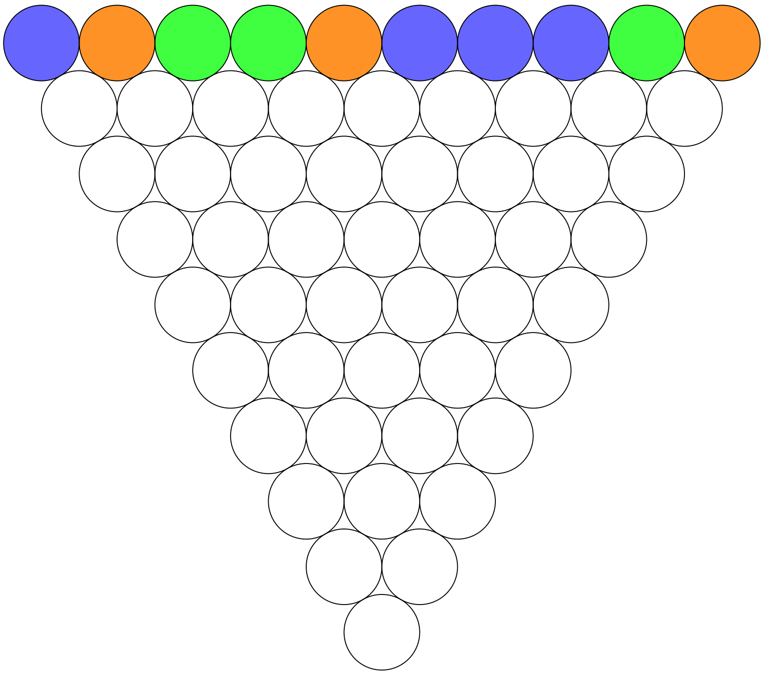
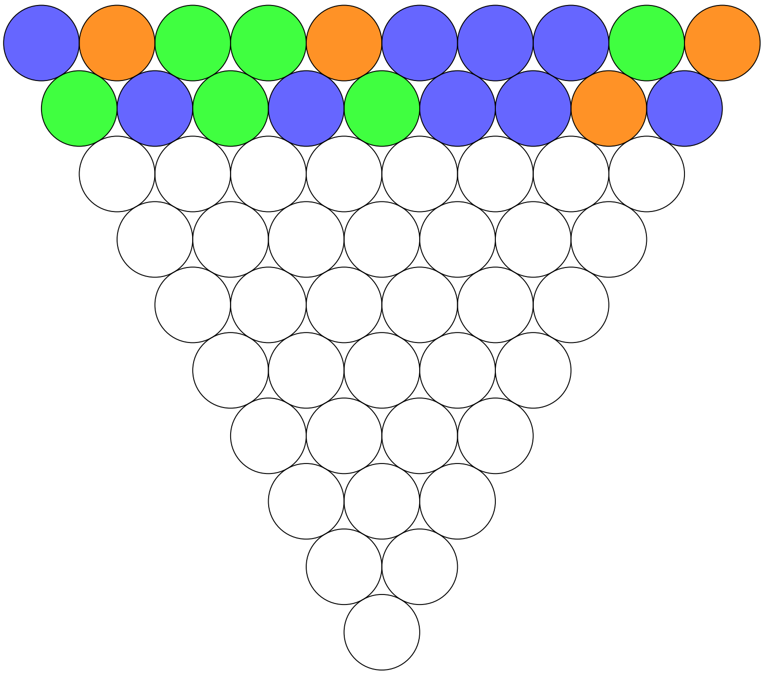
Überraschendes mit Farben



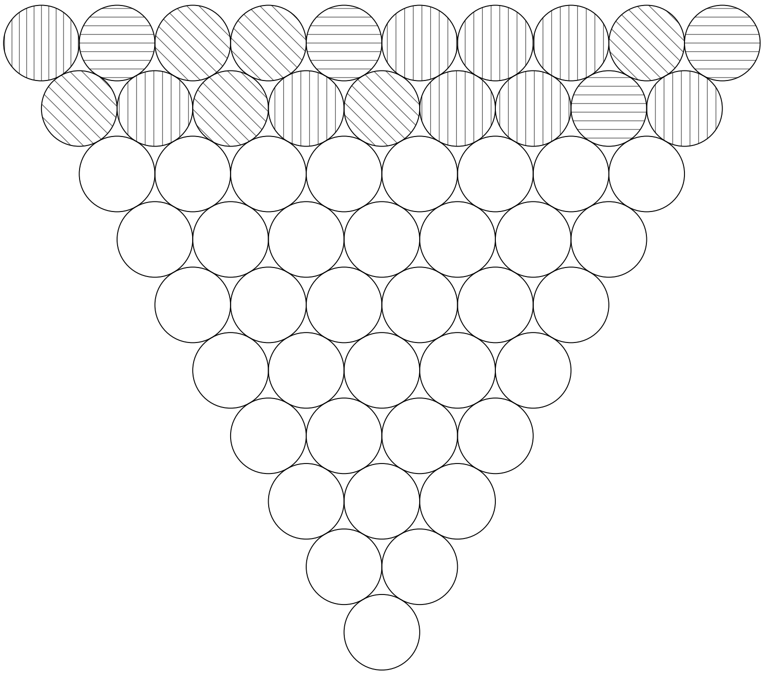
Du hast drei Farben zur Verfügung.
Färbe die 1. Reihe zufallsbedingt.

Überraschendes mit Farben



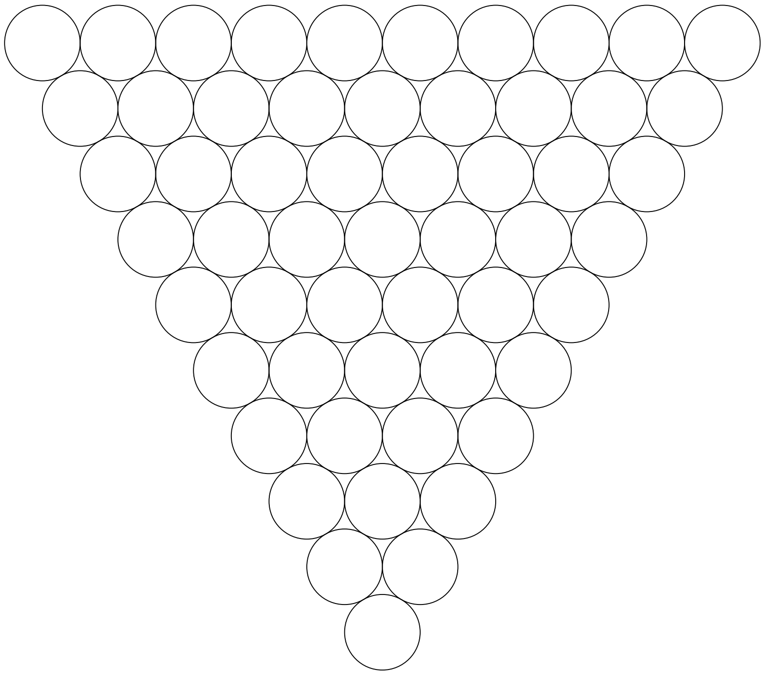
Nach welcher Gesetzmäßigkeit wird die 2. Reihe gefärbt?
Färbe die übrigen Kreise in dieser Weise.
Welche Farbe hat der unterste Kreis?

Überraschendes mit Mustern



Nach welcher Gesetzmäßigkeit wird die 2. Reihe gebildet?
Schraffiere die übrigen Kreise in dieser Weise.
Welches Muster hat der unterste Kreis?

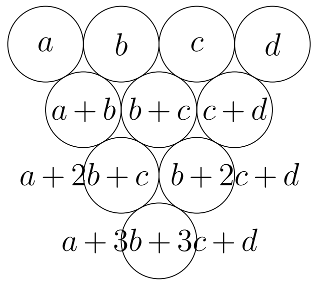
Überraschendes mit Farben



Du hast drei Farben zur Verfügung.
Färbe die 1. Reihe zufallsbedingt.
Färbe die übrigen Kreise in der besprochenen Weise.
Verdecke die unteren Reihen. Ich sage dir, welche Farbe das unterste Feld hat.

Achte auf die äußeren Felder der 1. Reihe.

Beweis



Den drei Farben (Mustern) ordnen wir die Zahlen 0, 1, 2 zu.
Die Variablen a, b, c und d können also Werte aus $\{0, 1, 2\}$ annehmen.
Wir können versuchen, die Verknüpfung (Addition) so festlegen, dass die Gesetzmäßigkeit der Farbwahl durch die Addition erfasst wird.
Wenn dann $3b + 3c = 0$ gilt, ist der Nachweis für $n = 4$ erbracht.

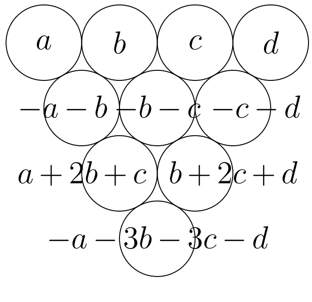
Die Verknüpfung zweier Zahlen darf nicht aus der Menge $\{0, 1, 2\}$ herausführen.
Eine Addition modulo 3 würde dies garantieren (falls die Summe größergleich 3 ist, subtrahieren wir 3).

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Es wäre zwar $3b + 3c = 0$ und die Belegung des untersten Feldes wäre durch die äußeren Felder der 1. Reihe festgelegt, jedoch wäre die Gesetzmäßigkeit der Farbwahl eine andere.
(1,1) wird 2 und nicht dieselbe Farbe zugeordnet.
Bei der Addition modulo 3 gibt es zu jedem Element a ein Element $-a$, so dass $a + (-a) = 0$ gilt.

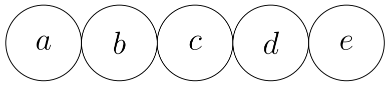
Wird (a, b) die Zahl $-a - b$ zugeordnet, erhalten wir das Gewünschte.

$\to$	0	1	2
0	0	2	1
1	2	1	0
2	1	0	2



Mit $3b + 3c = 0$ ist auch $-3b - 3c = 0$.

Beweis



$$-a-b,\ -b-c,\ -c-d,\ -d-e$$
$$a+2b+c,\ b+2c+d,\ c+2d+e$$
$$-a-3b-3c-d,\ b-3c-3d-e$$
$$a+\underbrace{4b+6c+4d}+e$$

Der unterklammerte Term ist z. B. für $b=1,\ c=0,\ d=0$ von null verschieden.
Die äußeren Felder der 1. Reihe legen daher nicht in jedem Fall die Farbe des untersten Feldes fest.

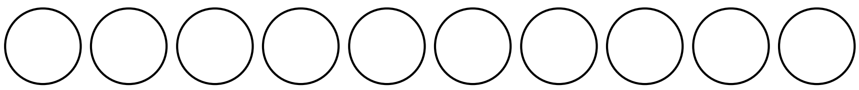
Nebenbei:
Die Koeffizienten des untersten Terms sind die Binomialkoeffizienten $\binom{4}{k},\ k=0,\ldots,4.$

Das kann leicht mit der Formel

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

von oben beginnend eingesehen werden.

Erst bei 10 Feldern sind wieder alle mittleren Koeffizienten $\binom{9}{k},\ k=1,\ldots,8,$ durch 3 teilbar.



Die Koeffizienten lauten: $\quad 1,\ \underbrace{9,\ 36,\ 84,\ 126,\ 84,\ 36,\ 9}_{\text{durch 3 teilbar}},\ 1$

Man kann zeigen, dass die Anzahl der Felder $n=3^k+1$ sein muss $(n=4,\ 28,\ 82,\ \ldots)$,
damit die mittleren Koeffizienten $\binom{n-1}{k},\ k=1,\ldots,n-2,$ durch 3 teilbar sind.

Ergänzung

$\binom{p}{k}$ ist für $k = 1, \ldots, p-1$ durch p (Primzahl) teilbar.

Die Binomialkoeffizienten sind natürliche Zahlen (Anzahl der k-elementige Teilmengen aus einer k-elementigen Menge).

$$\binom{p}{k} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot \ldots \cdot (p-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Der Nenner enthält kein p. Mit der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung folgt, dass der blau gefärbte Term den Nenner enthalten muss.

Sei $n \geq 2$.

$\binom{p^n}{k}$ ist für $k = 1, \ldots, p^n - 1$ durch p teilbar.

Das Beispiel enthält die Beweisidee.

$$\binom{3^4}{9} = \frac{3^4 \cdot 80 \cdot 79 \cdot (3^4-3) \cdot 77 \cdot 76 \cdot (3^4-2 \cdot 3) \cdot 74 \cdot 73}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 3^2}$$

Die dreien treten in Dreierschritten im Zähler und Nenner auf.
Die im Nenner sind alle kürzbar.
3^2 unten wird mit dem Faktor 3^4 oben gekürzt, übrig bleibt 3^2.
Hier ist zu sehen, in welcher Weise die Potenz 3^4 benötigt wird. $\binom{p^n}{k}$ ist für $k = 1, \ldots, p^n - 1$ durch p teilbar.

3 teilt nicht

$$\binom{3^2 \cdot 2}{9} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}.$$

9 unten wird mit 18 oben gekürzt, übrig bleibt 2.

Naheliegend:
Genau dann, wenn $\binom{m}{k}$ für $k = 1, \ldots, m-1$ durch p teilbar ist, ist $m = p^n$.