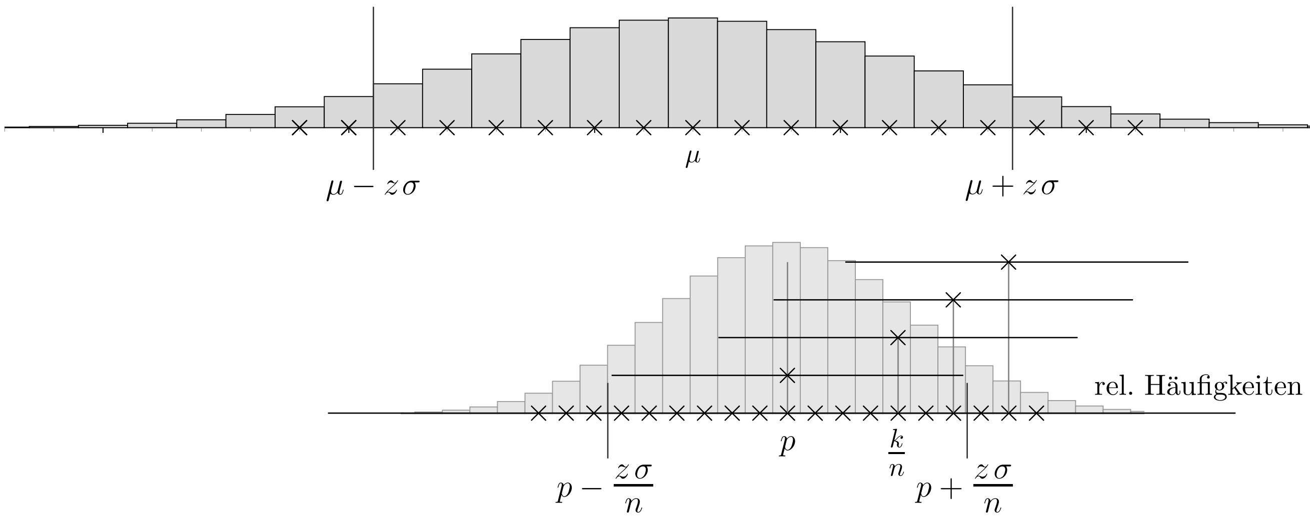
Überdeckungswahrscheinlichkeit

Überdeckt das Konfidenzintervall mit 95 %iger Wahrscheinlichkeit p?

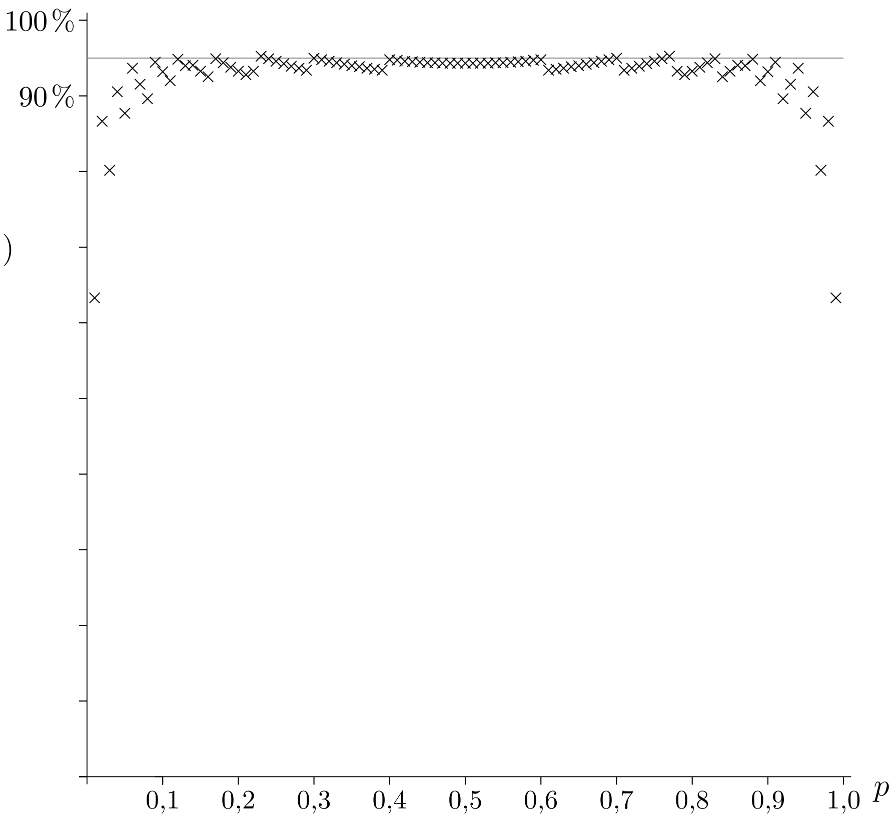


Wir betrachten eine binomialverteilte Zufallsvariable X, $n = 100$,
und zu jedem Stichprobenergebnis $X = k_i$, $i = 0 \ldots n$, das genäherte Wald-Konfidenzintervall

$$C(k_i) = \left[h_i - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h_i \cdot (1 - h_i)}{n}} \mid h_i + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{h_i \cdot (1 - h_i)}{n}}\right], \quad h_i = \frac{k_i}{n}$$

Erläutere die Funktion
und ihren Graphen.

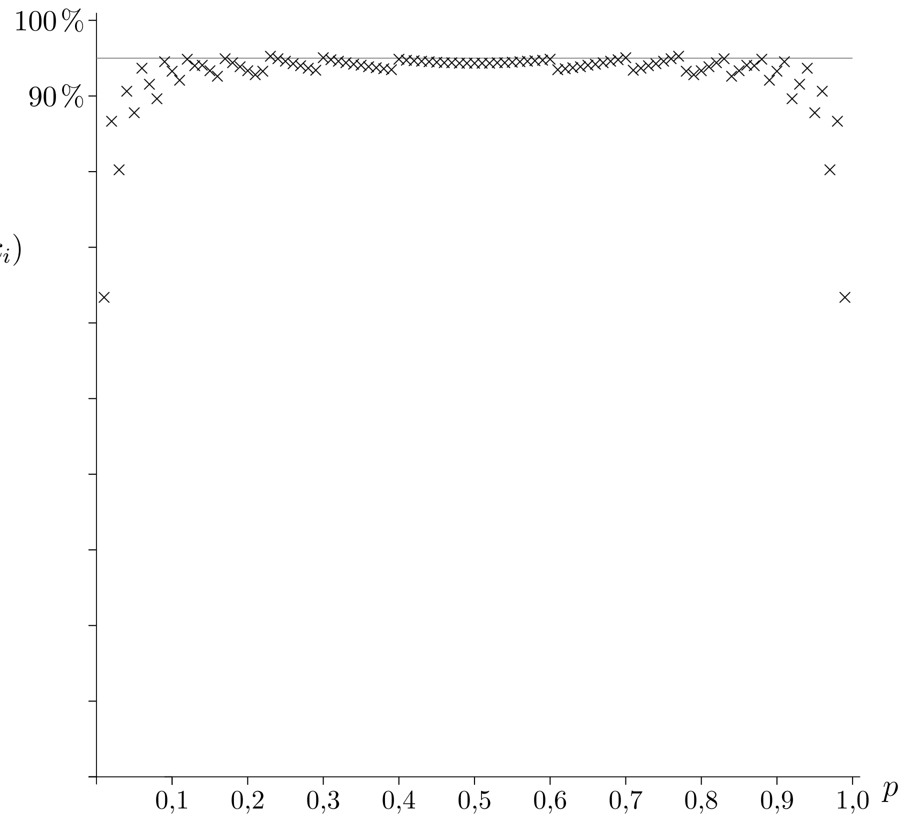
$$p \longrightarrow \sum_{\substack{i=0\ldots n \\ p \in C(k_i)}} P_p(X = k_i)$$



Überdeckungswahrscheinlichkeit

Erläutere die Funktion
und ihren Graphen.

$$p \longrightarrow \sum_{\substack{i=0\ldots n \\ p\in C(k_i)}} P_p(X = k_i)$$



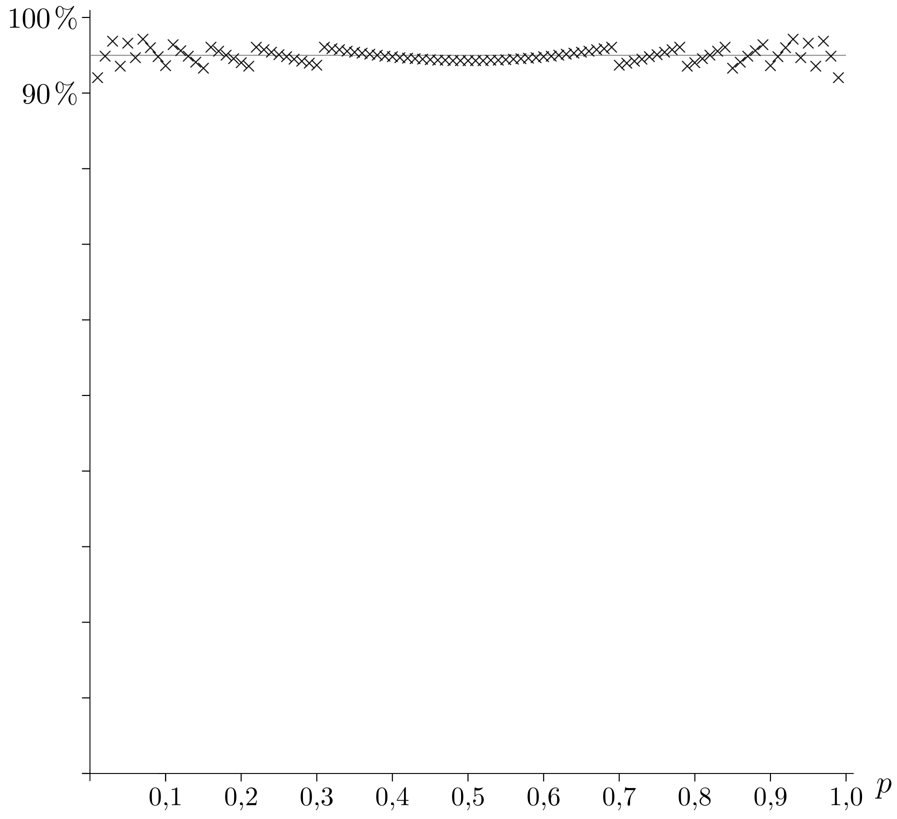
Die Funktion klärt die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Konfidenzintervall die zugrunde liegende (unbekannte) Wahrscheinlichkeit überdeckt.
Sei p gegeben. Wir schauen hinter den Vorhang.
Zu jedem Stichprobenergebnis k_i gehört ein Konfidenzintervall $C(k_i)$, das mit der Wahrscheinlichkeit $P_p(X = k_i)$ gebildet wird und entweder p überdeckt oder nicht.
Betrachten wir nun alle Konfidenzintervalle $C(k_i)$, die p überdecken, und zählen deren Wahrscheinlichkeiten $P_p(X = k_i)$ zusammen. Mit dieser Wahrscheinlichkeit wird ein Konfidenzintervall, das mit einem zufälligen Stichprobenergebnis gebildet wird, p enthalten.
Der Graph beinhaltet diese Wahrscheinlichkeiten für mögliche p-Werte, Schrittweite 0,01.

Überdeckungswahrscheinlichkeit

Eine Erhöhung der Überdeckungswahrscheinlichkeit lässt sich durch eine genauere Berechnung der Konfidenzintervalle (Wilson) erzielen:

$C(k_i) = [a_i,\, b_i]$

a_i ist Lösung der Gleichung $k_i = \mu + 1{,}96\,\sigma$ (Variable p)
b_i löst $k_i = \mu - 1{,}96\,\sigma$



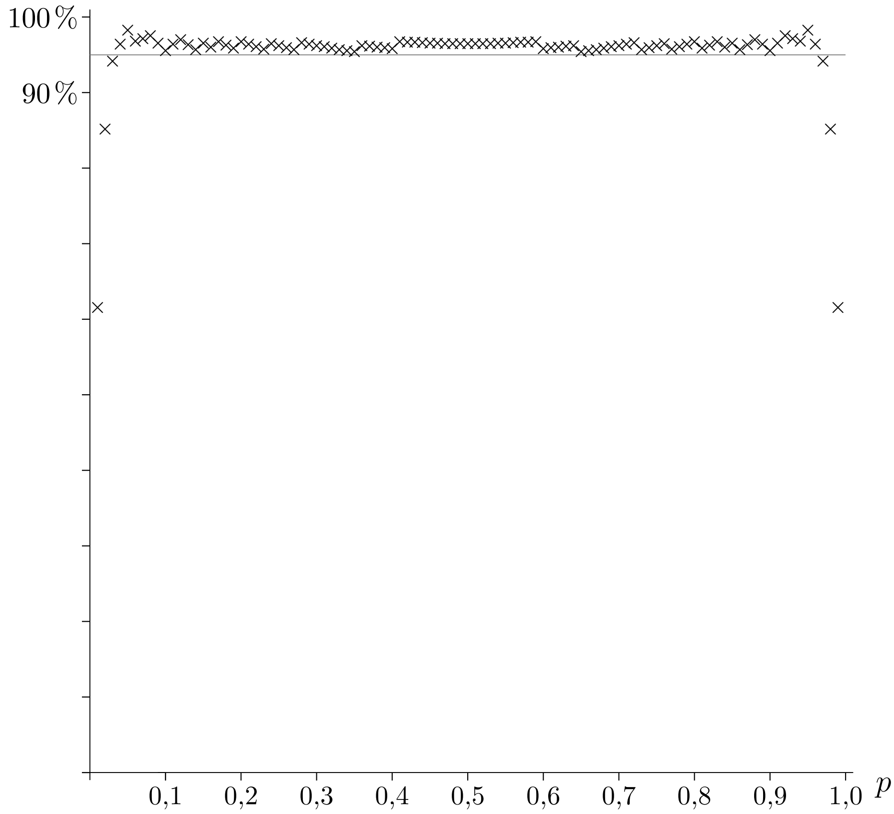
Für die exakten Konfidenzintervalle (Clopper-Pearson) gilt:

$C(k_i) = [a_i,\, b_i]$

$a_i = 1 - \mathrm{BetaInv}\Big(1 - \dfrac{1-\alpha}{2},\, n-k+1,\, k\Big)$

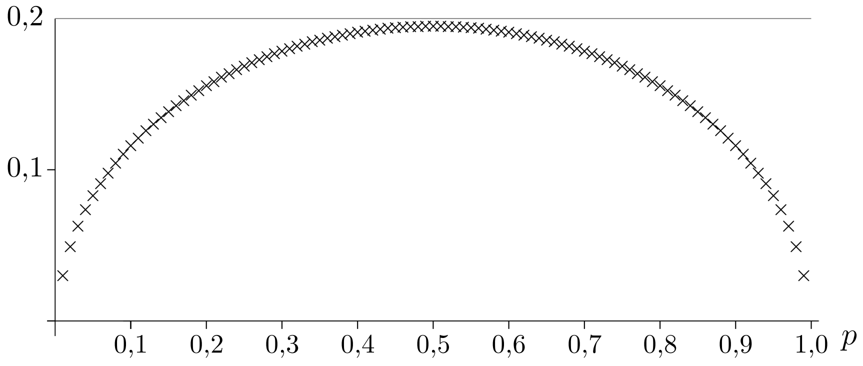
$b_i = 1 - \mathrm{BetaInv}\Big(\dfrac{1-\alpha}{2},\, n-k,\, k+1\Big)$

$P_p^n(X \le k) = \mathrm{Beta}(1-p,\, n-k,\, k+1)$

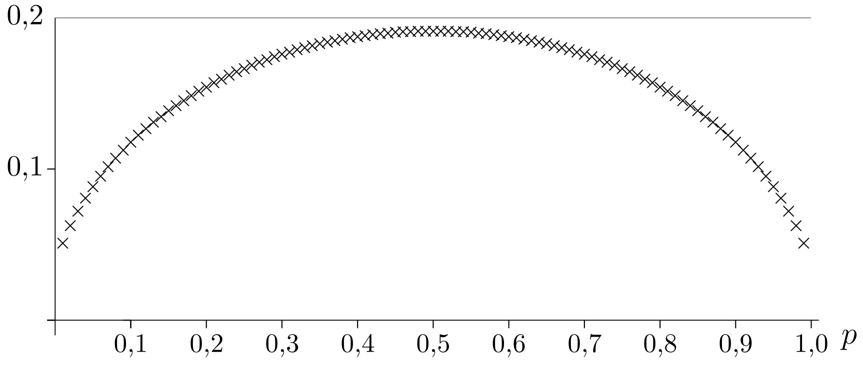


Mittlere Konfidenzintervalllänge

Wald-Konfidenzintervalle:



Wilson-Konfidenzintervalle:



Clopper-Pearson-Konfidenzintervalle: