

Tunnelbau

Eine Ameise bohrt einen Tunnel (alternativ: Ein Gabelstapler räumt ein langgestrecktes Lager). Wir ermitteln die benötigte Zeit t in Abhängigkeit von der Länge x des gegrabenen Tunnels und nehmen an:

$$\Delta t \sim x \quad (\text{Abtransport des Abraums})$$

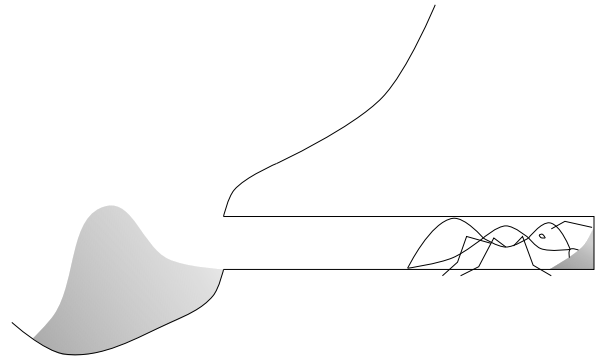
$$\Delta t \sim \Delta x$$

$$\Rightarrow \Delta t = k \cdot x \cdot \Delta x$$

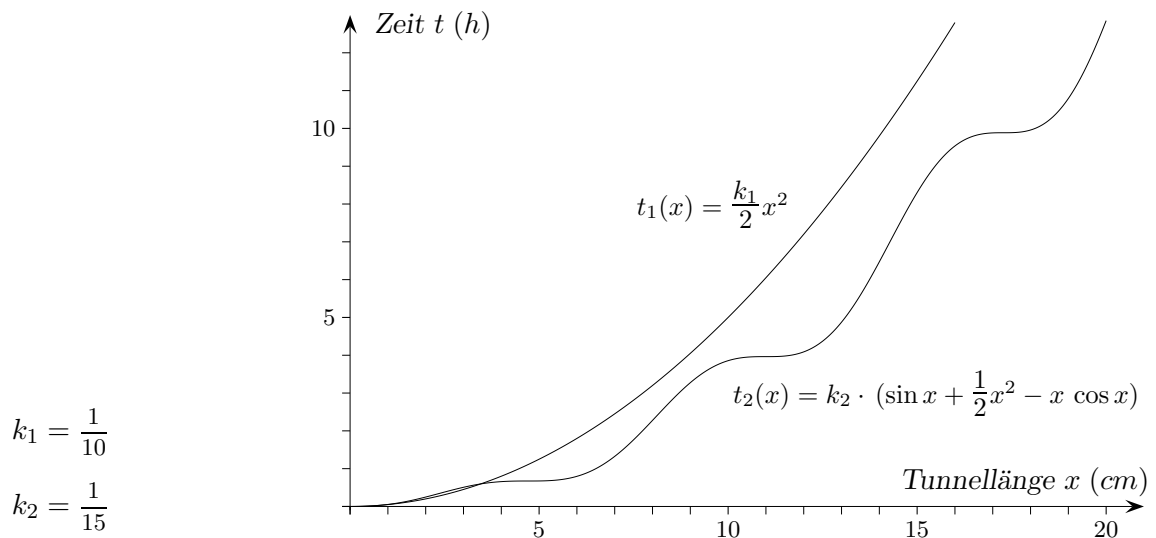
$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = k \cdot x$$

$$\frac{dt}{dx} = k \cdot x$$

$$t(x) = \frac{k}{2} \cdot x^2$$



Die Umkehrfunktion $x(t)$ (Tunnellänge in Abhängigkeit von der Zeit) löst die DGL $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k \cdot x}$ (x ist die Funktion $x(t)$, man beachte das Rechnen mit Differentialen).



Die Problemstellung kann variiert werden, so dass k wegen schwankender Bodenbeschaffenheit von der Tunnellänge x abhängt. Statt k wählen wir z.B. $k \cdot (\sin x + 1)$ und erhalten:

$$\frac{dt}{dx} = k \cdot x \cdot (\sin x + 1) \quad \text{und mit partieller Integration } t(x), \text{ siehe Grafik.}$$

Für die Umkehrfunktion $x(t)$ können wir keinen Funktionsterm angeben, jedoch eine DGL

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{k \cdot x \cdot (\sin x + 1)} \quad \text{mit der Lösung } x(t).$$

Eine iterative Näherung für $x(t)$ gelingt z.B. mit $\Delta x = 0,001$, $x_0 = 0,1$ und $n = 12000$ (Excel).