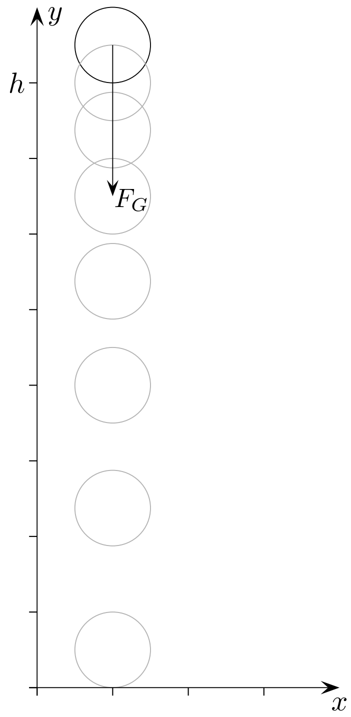
Trägheitsmoment

↑ Kinetische Energie

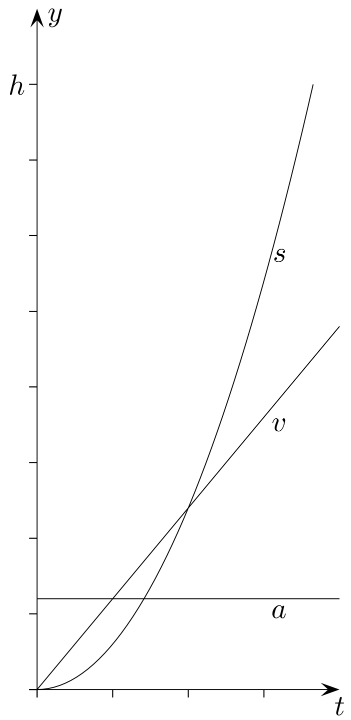


Wir heben einen Körper mit der Gewichtskraft F_G auf eine Höhe h. Die dabei verrichtete Arbeit $W = F_G \cdot h$ ist als potentielle Energie $E_{\text{pot}} = F_G \cdot h$ im Körper gespeichert, $F_G = m \cdot g$, Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$. Eine Kraft wird mit ihrer Wirkung, eine Masse zu beschleunigen, identifiziert. Wenn wir den Körper anschließend fallen lassen, wird die Lageenergie in Bewegungsenergie (kinetische Energie) umgewandelt. Beim Aufprall auf den Boden entsteht eine Verformung/Erwärmung. Die kinetische Energie wird dabei in Wärmeenergie umgewandelt.

Beschleunigung a (statt g), Geschwindigkeit v
Weglänge s (statt h), Zusammenhänge

1.	$v = at$	konstante Beschleunigung (Annahme), $v'(t) = a$
2.	$s = \frac{1}{2}at^2$	Weg-Zeit Gesetz, $s'(t) = v(t)$
3.	$s = \frac{1}{2a}v^2$	1. nach t aufgelöst und in 2. eingesetzt

Für eine doppelte Geschwindigkeit, bzw. doppelte Fallzeit, ist eine vierfache Fallhöhe erforderlich.



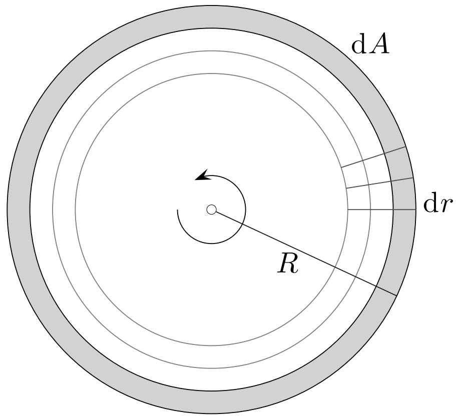
kinetische Energie

4. $E_{\text{kin}} = F_G \cdot s$
5. $= m \cdot a \cdot s$
6. $= m \cdot a \cdot \frac{1}{2a}v^2$
7. $= \frac{1}{2}m \cdot v^2$

Rotationsenergie ist eine Art Bewegungsenergie.

8.	$v = \omega \cdot r$	Winkelgeschwindigkeit ω
9.	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}m \cdot \omega^2 \cdot r^2$	v in 7. eingesetzt
10.	$J = \frac{1}{2}m \cdot r^2$	Trägheitsmoment J
11.	$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}J \cdot \omega^2$	

↑ Trägheitsmoment einer Scheibe, eines Zylinders



1. $J = \frac{1}{2} m \cdot r^2$ — Trägheitsmoment J für eine Punktmasse

2. $J = \sum_i m_i r_i^2$ — Trägheitsmoment für die Massenelemente m_i

3. $J = \rho \int_A r^2 \mathrm{d}A$ — Körper mit der Massendichte ρ, $m_i = \rho \mathrm{d}A$

4. $\quad = \frac{m}{\pi R^2} \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r$ — Elemente dA mit gleichem r werden zu $2\pi r \, \mathrm{d}r$ zusammengefasst

5. $\quad = \frac{m}{\pi R^2} \left[\frac{\pi}{2} r^4 \right]_0^R = \frac{1}{2} m R^2$

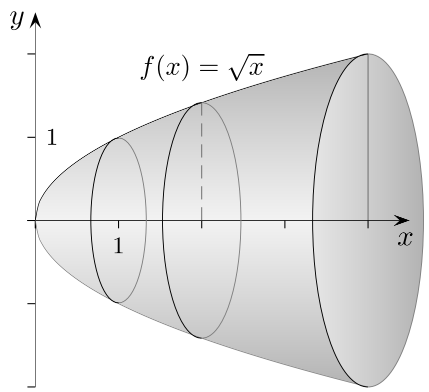
Zylinder mit der Höhe h (Grafik Draufsicht)

6. $J = \rho \int_A r^2 \mathrm{d}V$ — Körper mit der Massendichte ρ, $m_i = \rho \mathrm{d}V$

7. $\quad = \frac{m}{\pi R^2 h} \int_0^R r^2 \cdot 2\pi r h \, \mathrm{d}r$ — Elemente dV mit gleichem r werden zu $2\pi r h \, \mathrm{d}r$ zusammengefasst

8. $\quad = \frac{1}{2} m R^2$ — h fällt heraus, dieselbe Rechnung wie bei der Scheibe, Gleichung 4.

↑ Trägheitsmoment bei Rotation um die x-Achse



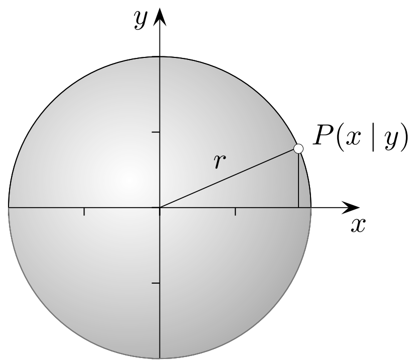
Der Rotationskörper wird durch kreisförmige (infinitesimale) Zylinderscheiben ersetzt.

1. $m_{\text{Scheibe}} = \pi(f(x))^2\rho\,\mathrm{d}x$

2. $J_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2}mR^2$

3. $ = \frac{1}{2}\pi(f(x))^2\rho(f(x))^2\,\mathrm{d}x$

4. $J_x = \frac{1}{2}\pi\rho\int\limits_a^b(f(x))^4\,\mathrm{d}x$



Für einen Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Kreis mit dem Radius r gilt:
$x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras).

Nach y aufgelöst, ergibt sich: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

d. h. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

5. $J_{\text{Kugel}} = \frac{1}{2}\pi\rho\int\limits_a^b(f(x))^4\,\mathrm{d}x$

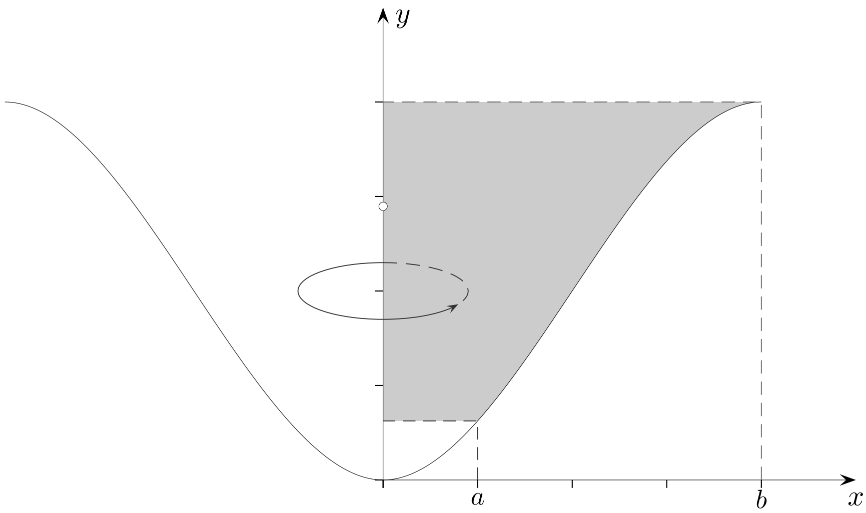
6. $ = \frac{1}{2}\pi\rho\cdot 2\int\limits_0^r(\sqrt{r^2 - x^2})^4\,\mathrm{d}x$

7. $ = \ldots = \frac{8}{15}\pi\rho r^5$

8. $m_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho \qquad (= m) \qquad \Longrightarrow$

9. $J_{\text{Kugel}} = \frac{2}{5}mr^2$

↑ Trägheitsmoment bei Rotation um die y-Achse ohne Umkehrfunktion



Der Rotationskörper wird durch kreisförmige (infinitesimale) Zylinderscheiben ersetzt.

1. $m_{\text{Scheibe}} = \pi x^2 \rho f'(x)\,\mathrm{d}x$

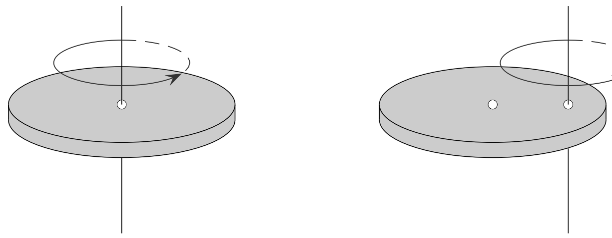
2. $J_{\text{Scheibe}} = \frac{1}{2} m R^2$

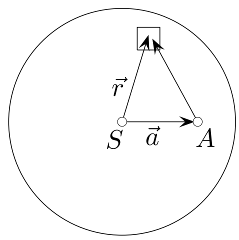
3. $= \frac{1}{2}\pi x^4 \rho f'(x)\,\mathrm{d}x$

4. $J_y = \frac{1}{2}\pi\rho \int\limits_a^b x^4 f'(x)\,\mathrm{d}x$

$\uparrow$ Satz von Steiner für flache Körper

Ist das Trägheitsmoment für die Rotation um eine Achse durch den Schwerpunkt bekannt, so kann man daraus leicht das Trägheitsmoment für eine Rotation um eine parallele Achse berechnen.





Draufsicht

1. $J_S = \displaystyle\int_V \vec{r}^{\,2}\,\mathrm{dm}$ $\qquad$ $\mathrm{dm} = \rho\,\mathrm{d}V, \quad \vec{r}^{\,2} = |\vec{r}|^2$

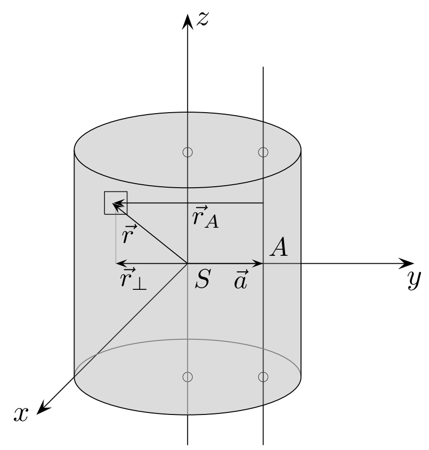
2. $J_A = \displaystyle\int_V (\vec{r} - \vec{a})^2\,\mathrm{dm}$

3. $ = \displaystyle\int_V (\vec{r}^{\,2} - 2\vec{r}\vec{a} + \vec{a}^{\,2})\,\mathrm{dm}$ $\qquad$ bin. Formel für das Skalarprodukt

4. $ = \underbrace{\displaystyle\int_V \vec{r}^{\,2}\,\mathrm{dm}}_{J_S} - \underbrace{2\vec{a}\displaystyle\int_V \vec{r}\,\mathrm{dm}}_{0} + \underbrace{\vec{a}^{\,2}\displaystyle\int_V \mathrm{dm}}_{d^2 \cdot m}$ $\qquad$ $\displaystyle\frac{1}{m}\int_V \vec{r}\,\mathrm{dm} = \vec{0}$, siehe Schwerpunkt

5. $J_A = J_S + d^2 \cdot m$ $\qquad$ $\vec{a}^{\,2} = d^2$, Abstand d der parallelen Achsen

↑ Satz von Steiner



Für Körper ist der Unterschied von $\vec{r}$ und $\vec{r}_\perp$ zu beachten.

1. $J_A = \displaystyle\int_V (\underbrace{\vec{r}_\perp - \vec{a}}_{\vec{r}_A})^2 \,\mathrm{dm}$

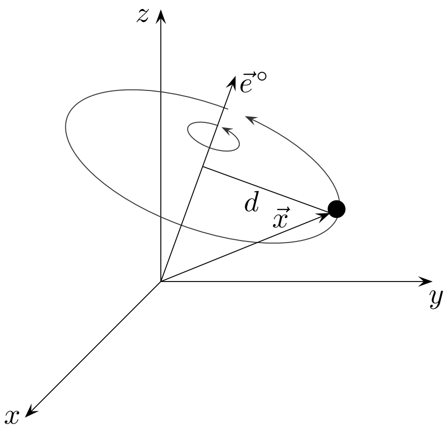
2. $ = \displaystyle\int_V (\vec{r}_\perp^{\,2} - 2\vec{r}_\perp \vec{a} + \vec{a}^{\,2})\,\mathrm{dm}$

3. $ = \underbrace{\displaystyle\int_V \vec{r}_\perp^{\,2}\,\mathrm{dm}}_{J_S} - \underbrace{2\vec{a}\displaystyle\int_V \vec{r}_\perp\,\mathrm{dm}}_{0} + \underbrace{\vec{a}^{\,2}\displaystyle\int_V \mathrm{dm}}_{d^2 \cdot m}$ für den 0-Term siehe unten

4. $J_A = J_S + d^2 \cdot m$ $\vec{a}^{\,2} = d^2$, Abstand d der parallelen Achsen

Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass der Ursprung im Schwerpunkt liegt und die z-Achse die Drehachse ist. Für den Schwerpunkt gilt dann $\vec{S} = \frac{1}{m}\int_V \vec{r}\,\mathrm{dm} = \vec{0}$. Die z-Koordinate von $\vec{r}_\perp$ ist 0, die x- und y-Koordinaten stimmen mit $\vec{r}$ überein, somit auch die (voneinander unabhängig berechenbaren) x- und y-Koordinaten von $\int_V \vec{r}_\perp\,\mathrm{dm}$ und $\int_V \vec{r}\,\mathrm{dm} = \vec{0}$.

↑ Rotation um eine beliebige Achse   Trägheitstensor



1. $$J = \int_V d^2 \,\mathrm{dm}$$

2. $$d^2 = |\vec{e}^{\circ} \times \vec{x}\,|$$ siehe Abstand Punkt/Gerade

3. $$= (ze_y - ye_z)^2 + (xe_z - ze_x)^2 + (ye_x - xe_y)^2$$

4. $$= e_x^2(y^2+z^2) + e_y^2(x^2+z^2) + e_z^2(x^2+y^2) - 2e_xe_yxy - 2e_ye_zyz - 2e_xe_zxz$$

5. $$J = e_x^2 \int_V (y^2+z^2)\,\mathrm{dm} + e_y^2 \int_V (x^2+z^2)\,\mathrm{dm} + e_z^2 \int_V (x^2+y^2)\,\mathrm{dm} \\ - 2e_xe_y \int_V xy\,\mathrm{dm} - 2e_ye_z \int_V yz\,\mathrm{dm} - 2e_xe_z \int_V xz\,\mathrm{dm}$$

6. $$= (e_x, e_y, e_z) \begin{pmatrix} \int_V (y^2+z^2)\,\mathrm{dm} & -\int_V xy\,\mathrm{dm} & -\int_V xz\,\mathrm{dm} \\ -\int_V xy\,\mathrm{dm} & \int_V (x^2+z^2)\,\mathrm{dm} & -\int_V yz\,\mathrm{dm} \\ -\int_V xz\,\mathrm{dm} & -\int_V yz\,\mathrm{dm} & \int_V (x^2+y^2)\,\mathrm{dm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix}$$

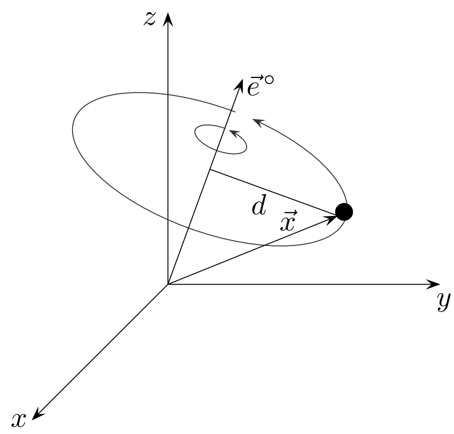
7. $$J = (\vec{e}^{\circ})^{\top}\,\Theta\,\vec{e}^{\circ}$$ Trägheitstensor Θ

8. $$\vec{e}^{\circ} = \frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$ Drehachsenrichtung mit dem Einheitsvektor von $\vec{\omega}$ festlegen

9. $$J = \Big(\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}\Big)^{\top}\Theta\,\frac{\vec{\omega}}{|\vec{\omega}|}$$

10. $$\frac{1}{2} J\,|\vec{\omega}|^2 = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{\top}\Theta\,\vec{\omega}$$ Rotationsenergie

$\uparrow$ Drehimpuls



Wir ermitteln den Drehimpuls $\vec{L}$ für einen Massepunkt.

1. $\vec{L} = \vec{x} \times m\vec{v}$

2. $\phantom{\vec{L}} = m\vec{x} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})$

3. $\phantom{\vec{L}} = m\big(\vec{\omega}\,\vec{x}^2 - \vec{x}(\vec{x}\vec{\omega})\big)$ bac-cab-Formel $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\,\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\,\vec{b})$

4. $$= m \begin{pmatrix} \omega_x(x^2+y^2+z^2) & -\,x(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \\ \omega_y(x^2+y^2+z^2) & -\,y(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \\ \omega_z(x^2+y^2+z^2) & -\,z(x\omega_x + y\omega_y + z\omega_z) \end{pmatrix}$$

5. $$\vec{L} = m \begin{pmatrix} (y^2+z^2) & -xy & -xz \\ -xy & (x^2+z^2) & -yz \\ -xz & -yz & (x^2+y^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

mit der Einheitsmatrix **1**
und dem dyadischen Produkt
kurz $\vec{L} = m\big[(\vec{x}\cdot\vec{x})\mathbf{1} - \vec{x}\otimes\vec{x}\big]\vec{\omega}$

6. $\vec{L} = \Theta\,\vec{\omega}$ und allgemein

7. $$\vec{L} = \begin{pmatrix} \int_V (y^2+z^2)\,\mathrm{dm} & -\int_V xy\,\mathrm{dm} & -\int_V xz\,\mathrm{dm} \\ -\int_V xy\,\mathrm{dm} & \int_V (x^2+z^2)\,\mathrm{dm} & -\int_V yz\,\mathrm{dm} \\ -\int_V xz\,\mathrm{dm} & -\int_V yz\,\mathrm{dm} & \int_V (x^2+y^2)\,\mathrm{dm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Umformung

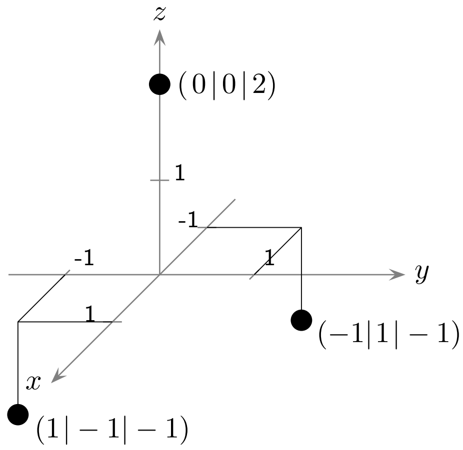
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{\top}\Theta\,\vec{\omega} \qquad \text{Rotationsenergie}$$

$$\vec{L} = \Theta\,\vec{\omega} \qquad \Longrightarrow$$

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{\top}\vec{L} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot\vec{L} = \frac{1}{2}\,\vec{L}\cdot\vec{\omega}$$

↑ Trägheitstensor diagonalisieren

Wir betrachten ein System aus starr gekoppelten Punktmassen identischer Masse m.



$$\Theta = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3}(y^2+z^2) & -\sum\limits_{i=1}^{3} xy & -\sum\limits_{i=1}^{3} xz \\ -\sum\limits_{i=1}^{3} xy & \sum\limits_{i=1}^{3}(x^2+z^2) & -\sum\limits_{i=1}^{3} yz \\ -\sum\limits_{i=1}^{3} xz & -\sum\limits_{i=1}^{3} yz & \sum\limits_{i=1}^{3}(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

Θ kann leicht ermittelt werden, sei $m = 1$.

$$\Theta = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

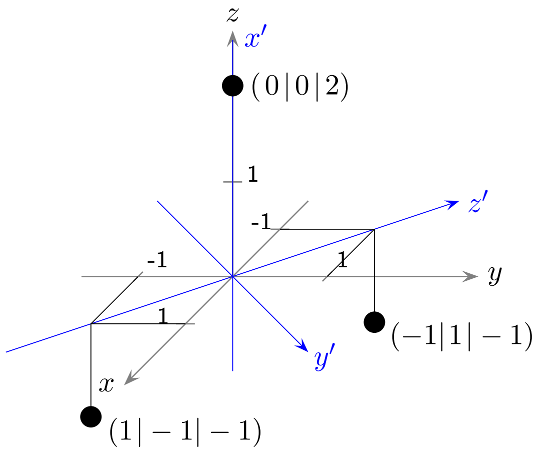
Um die Hauptachsen zu bestimmen, errechnen wie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren. Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

$$\begin{aligned} (4-\lambda)\big((8-\lambda)^2-4\big) &= 0 && \text{Laplace-Entwicklung der Determinante nach der letzten Spalte} \\ \lambda_1 &= 4 && \text{Satz vom Nullprodukt} \\ \lambda_2 &= 10 && (8-\lambda)^2 = 4, \quad 8-\lambda = \mp 2 \\ \lambda_3 &= 6 \end{aligned}$$

Die normierten Eigenvektoren: $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, können mit

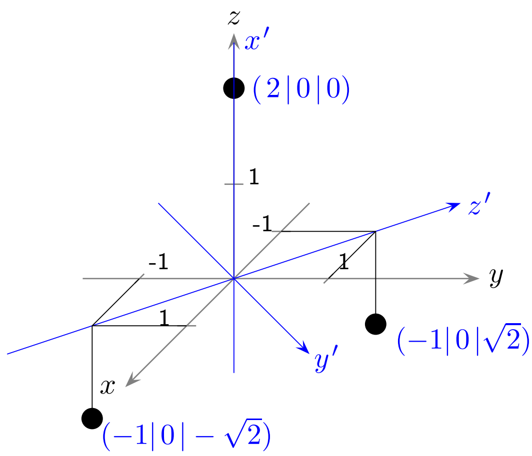
$\Theta\vec{v} = \lambda\vec{v}$ im Kopf verifiziert werden.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v}_1^\top \\ \vec{v}_2^\top \\ \vec{v}_3^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 2 & 0 \\ 2 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 4 \end{pmatrix} [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3]$$



Verwenden wir die Richtungen der Eigenvektoren als Achsen eines neuen Koordinatensystems (x', y', z'), dann ist der Trägheitstensor in diesen Koordinaten diagonal. Hauptträgheitsachsen fallen mit Symmetrieachsen des Systems zusammen.

↑ Tensoreigenschaft



Die (x', y', z')-Koordinaten wurden mit

$$A = [\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad \vec{x}\,' = A^{-1}\vec{x} \quad \text{berechnet, beachte:} \quad A^{-1} = A^\top$$

Nun ermitteln wir den Trägheitstensor für das neue Koordinatensystem
(und den neuen Achsen) und rechnen (im Kopf) nach.

$$\Theta' = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3}(y'^2+z'^2) & -\sum\limits_{i=1}^{3}x'y' & -\sum\limits_{i=1}^{3}x'z' \\ -\sum\limits_{i=1}^{3}x'y' & \sum\limits_{i=1}^{3}(x'^2+z'^2) & -\sum\limits_{i=1}^{3}y'z' \\ -\sum\limits_{i=1}^{3}x'z' & -\sum\limits_{i=1}^{3}y'z' & \sum\limits_{i=1}^{3}(x'^2+y'^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis ist nicht selbstverständlich.
Es beruht auf der noch nachzuweisenden Tensoreigenschaft der Matrix Θ,
die es erlaubt, Θ mit $\Theta' = A^\top \Theta A$ zu transformieren.
Die Diagonalisierung ist nicht das Bemerkenswerte, sondern dass $\Theta' = A^\top \Theta A$ die Rotation um das neue Koordinatensystem korrekt beschreibt. Es liegt also nicht nur eine bloße Umbenennung der Koordinaten vor.
Beachte: Mit Θ kann die Berechnungsvorschrift, sowie die Anwendung dieser Vorschrift auf ein System gemeint sein (Θ enthält feste Koordinaten), analog zu $f(x) = x^2$ und $f(3) = 9$.

Wenn ein Körper nicht um eine seiner Hauptträgheitsachsen rotiert, entsteht ein Drehmoment, das senkrecht zur Drehachse wirkt (Wäscheschleuder mit ungleichmäßig verteilter Wäsche).
Die außerhalb der Hauptdiagonalen von Θ stehenden Deviationsmomente (Zentrifugal- oder Nebenträgheitsmomente, Deviation, Abweichung) sind ein Maß für das Bestreben eines rotierenden Körpers, seine Rotationsachse zu verändern, bzw. in welchem Umfang er „ausgewuchtet“ ist.

↑ Tensor Nachweis

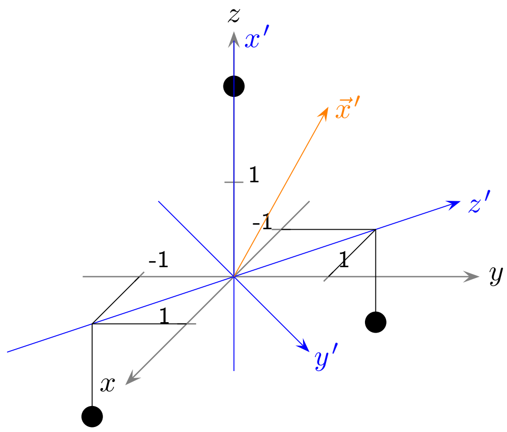
$$\Theta' \overset{!}{=} A^\top \Theta A$$

$\Longleftrightarrow \quad \vec{L}' = \Theta' \vec{x}' = A^\top \Theta A\, \vec{x}'$ — $\vec{x}'$ beliebig, die Einheitsvektoren $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ wären ausreichend

$\vec{x} = A\vec{x}'$ — Koordinatentransformation mit A

$\vec{L} = \Theta\vec{x}$ — Drehimpuls für $\vec{x}$

$\Theta'\vec{x}' = A^\top \vec{L} \overset{*}{=} \vec{L}'$ — Rücktransformation mit $A^\top$



Die letzte (und entscheidende) Umformung $\overset{*}{=}$ ist möglich, weil die Länge und die Richtung des Drehimpulsvektors nicht vom Koordinatensystem abhängig sind.

↑

Startseite

Schwerpunkt

Doppelintegral Flächenträgheitsmoment Walter Farkas

Massenträgheitsmoment Lubov Vassilevskaya Teil 1 Teil 2