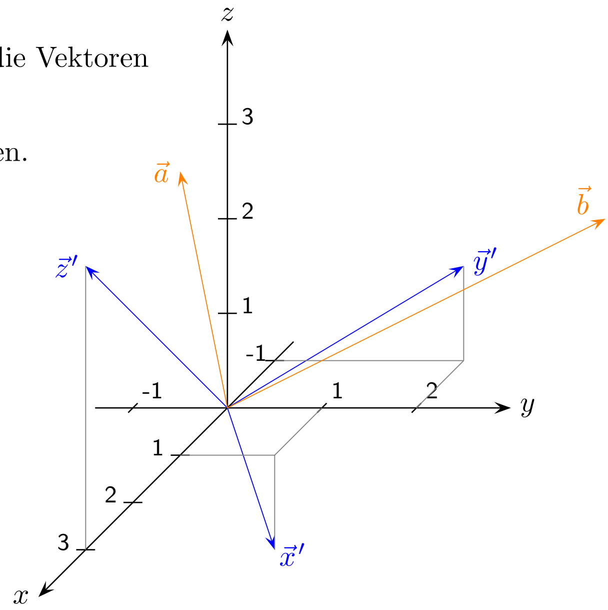
↑ Was ist ein Tensor?

Seit die Mathematiker über die Relativitätstheorie hergefallen sind,
verstehe ich sie selbst nicht mehr. Albert Einstein 1879-1955

Die mathematische Tensor-Definition verhüllt den dahinterliegenden Sinn.
Um diesen aufzudecken, betrachten wir zunächst das Skalarprodukt

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$ im xyz-Koordinatensystem.



Mit dem Skalarprodukt können wir z. B. nachweisen, dass die Vektoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ senkrecht aufeinander stehen.

Betrachten wir nun die Situation aus Sicht des gedrehten
x', y', z'-Koordinatensystems.

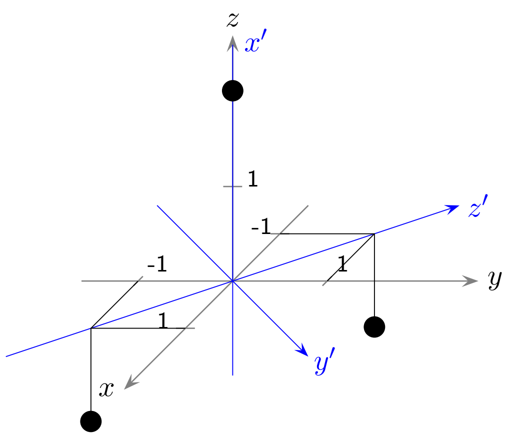
$\vec{a}, \vec{b}$ gehen über in

$$\vec{a}\,' = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{3} \\ 5\sqrt{6}/3 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Auch hier gilt erwartungsgemäß $\vec{a}\,' \cdot \vec{b}\,' = 0$, also $\vec{a}\,' \perp \vec{b}\,' = 0$.

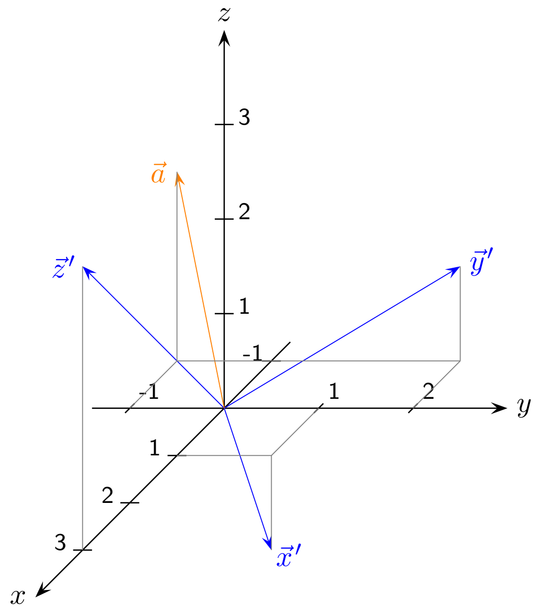
Für Interessierte steht die Rechnung auf der nächsten Seite. Wichtig ist hier nur: Aussagekräftige Matrix-Formeln, mit denen z. B. in der Mechanik Systemeigenschaften erfasst werden, können nicht vom Koordinatensystem abhängig sein, wie z. B. die Matrix Θ (daher Tensor genannt), die es ermöglicht, alle Trägheitsmomente bei Rotation eines Systems mit drei Punktmassen zu ermitteln.

$$\Theta = \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{3}(y^2+z^2) & -\sum\limits_{i=1}^{3}xy & -\sum\limits_{i=1}^{3}xz \\ -\sum\limits_{i=1}^{3}xy & \sum\limits_{i=1}^{3}(x^2+z^2) & -\sum\limits_{i=1}^{3}yz \\ -\sum\limits_{i=1}^{3}xz & -\sum\limits_{i=1}^{3}yz & \sum\limits_{i=1}^{3}(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$



Der Übergang zu einem neuen Koordinatensystem
(x', y', z') kann zu einer vereinfachten Darstellung und
neuen Erkenntnissen (Hauptträgheitsachsen) führen.

$\uparrow$ Koordinatentransformation



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}' = \begin{pmatrix} -4/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Die (x', y', z')-Koordinaten eines orthogonalen, normierten Rechtssystems von $\vec{a}$ wurden mit

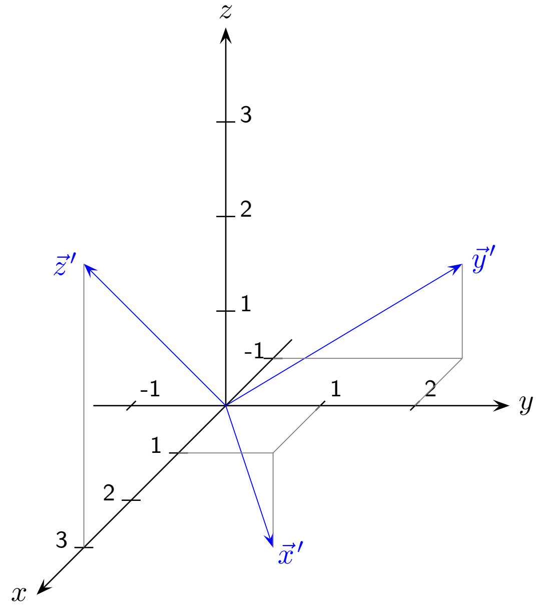
$$A = [\vec{x}^{\circ\prime}, \vec{y}^{\circ\prime}, \vec{z}^{\circ\prime}] = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{6} & 2\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{x}' = A^{-1}\vec{x} \quad \text{berechnet, beachte:} \quad A^{-1} = A^{\top}$$

$(A^{\top}A$ ergibt die Einheitsmatrix)

$$\begin{aligned} \vec{x} &= A\vec{x}' \qquad \text{direkt einsehbar mit:} \\ &= [\vec{x}^{\circ\prime}, \vec{y}^{\circ\prime}, \vec{z}^{\circ\prime}]\vec{x}' \\ &= x_1\vec{x}^{\circ\prime} + x_2\vec{y}^{\circ\prime} + x_3\vec{z}^{\circ\prime} \end{aligned}$$

↑ Tensor Beispiel

Anhand eines einfachen mathematischen Beispiels will ich den Begriff erläutern.



$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{genauer} \quad \Omega_{x_1,x_2,x_3}$$

Zur Beschreibung eines (noch undurchsichtigen) Sachverhalts für einen Vektor

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (z. B.) erhalten wir mit dessen Koordinaten

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nun wechseln wir das Koordinatensystem. Aus Ω wird $\Omega' = \Omega_{x',y',z'}$.
Die (x', y', z')-Koordinaten von $\vec{x}$ werden mit

$$A = [\vec{x}^{\circ\prime}, \vec{y}^{\circ\prime}, \vec{z}^{\circ\prime}] = \frac{1}{\sqrt{18}} \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -\sqrt{3} & 3 \\ \sqrt{6} & 2\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{6} & \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$$

und $\vec{x}' = A^{-1}\vec{x}$ berechnet, beachte: $A^{-1} = A^\top$
($A^\top A$ ergibt die Einheitsmatrix)

$$\vec{x}' = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -x'_3 & x'_2 \\ x'_3 & 0 & -x'_1 \\ -x'_2 & x'_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Omega' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Behauptung: Ω' beinhaltet für $\vec{x}'$ denselben Sachverhalt wie Ω für $\vec{x}$.

Dies erscheint naheliegend, wenn wir mit einem Vektor (z. B.) $\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $\vec{y}' = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$
in folgender Weise rechnen.

$\Omega\vec{y} = (3|0|3)^\top \qquad = \vec{x} \times \vec{y} \qquad (3|0|3)'^\top = (0|0|\sqrt{18})^\top$

$\Omega'\vec{y}' = (0|0|\sqrt{18})^\top \qquad = \vec{x}' \times \vec{y}'$ hier ist die Darstellung besonders einfach

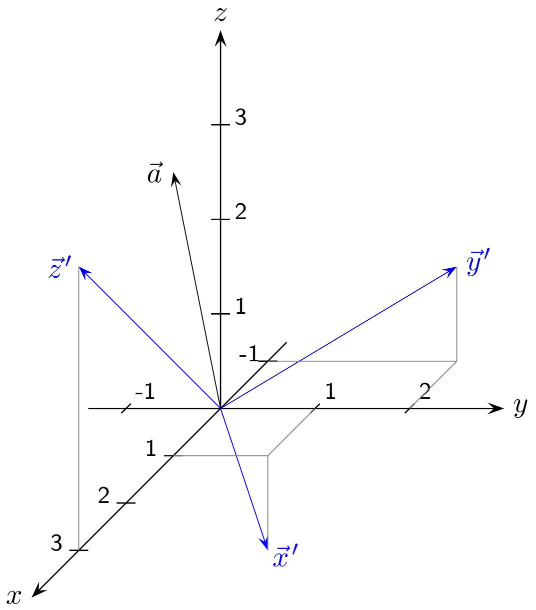
$\Omega'\vec{y}' = (\Omega\vec{y})'$ beachte die Eigenschaften $|\vec{x} \times \vec{y}| = |\vec{x}' \times \vec{y}'|$

$\vec{x} \times \vec{y} \perp \vec{x}, \vec{y} \qquad \vec{x}' \times \vec{y}' \perp \vec{x}', \vec{y}'$

$\uparrow$ Tensor Definition

Die Begriffsbildung bezieht sich (hier) auf eine Matrix-Formel Ω_{x_1,x_2,x_3} wie z. B.

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Weiter betrachten wir ein beliebiges orthogonales, normiertes Rechtssystem mit (x', y', z')-Koordinaten und

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 0 & -x'_3 & x'_2 \\ x'_3 & 0 & -x'_1 \\ -x'_2 & x'_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix Ω ist ein Tensor, wenn gilt: $\Omega'\vec{a}\,' = (\Omega\vec{a})'$, $\vec{a}$ beliebig in (x, y, z)-Koordinaten, $\Omega' = \Omega_{x',y',z'}$

Erläuterung:
Die Koordinaten eines Ortspfeils seien $\vec{a}$ bzw. $\vec{a}\,'$.
Die Matrizenmultiplikationen $\Omega'\vec{a}\,'$ und $\Omega\vec{a}$ ergeben denselben Ortspfeil.
Für einen Vergleich ist dasselbe Koordinatensystem zu verwenden.
$\Omega\vec{a}$ in (x', y', z')-Koordinaten lautet $(\Omega\vec{a})'$.

alternative Formulierung
mit expliziter Angabe der Transformationsmatrix A, $\vec{x} = A\vec{x}\,'$, $\vec{x}\,' = A^\top\vec{x}$

$$\begin{aligned} \Omega'\vec{a}\,' &= (\Omega\vec{a})' \\ &= (\Omega A\vec{a}\,')' \\ &= A^\top\Omega A\,\vec{a}\,' \qquad\qquad \vec{a}\,' \text{ beliebig, mit den Einheitsvektoren } \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3 \text{ heißt das} \\ \Omega' &= A^\top\Omega A \end{aligned}$$

Die Matrix Ω ist ein Tensor, wenn gilt: $\Omega' = A^\top\Omega A$, A beliebige orthonormale Transformation.

Dieser Zusammenhang ermöglicht es, gezielt nach einer Transformation zu suchen, mit der Ω' eine besonders einfache Form annimmt (Diagonalisierung von Ω).

↑ Mathematische Tensor-Definition

Auf der Suche nach einem mathematischen Objekt, dass durch die neun Einträge in der Tensor-Matrix festgelegt ist, gelangt man zur bilinearen Abbildung

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \longrightarrow & T(\vec{x}, \vec{y}) \qquad \text{(je 2 Vektoren wird eine reelle Zahl zugeordnet).} \end{array}$$

Sie ist durch die Funktionswerte $t_{i,j} = T(\vec{e_i}, \vec{e_j})$ für neun mögliche Basispaare festgelegt und somit durch die Matrix:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Wenn entsprechende Transformationseigenschaften vorliegen, wird die bilineare Abbildung als Tensor bezeichnet. Näheres siehe: Tensoren

$\uparrow$ Dyadisches Produkt $\vec{a} \otimes \vec{b}$

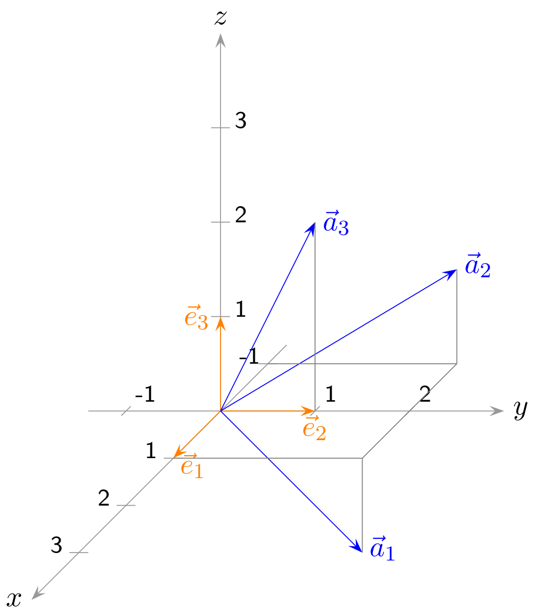
$$\Omega = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \vec{a}\,\vec{b}^\top$$

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann nachgewiesen werden, dass die Matrix ein Tensor ist.

$$\Omega'\vec{c}\,' \stackrel{!}{=} (\Omega\,\vec{c})'$$

$$\begin{aligned}
(\Omega\,\vec{c})' &= \big((\vec{a}\,\vec{b}^\top)\,\vec{c}\big)' \\
&= \big(\vec{a}\,(\vec{b}^\top\vec{c})\big)' && \text{Matrizenmultiplikation ist assoziativ} \\
&= \vec{a}\,'(\vec{b}\,'^\top\vec{c}\,') && \text{für das Skalarprodukt gilt} \quad \vec{b}^\top\vec{c} = \vec{b}\,'^\top\vec{c}\,' \\
& && \vec{b}^\top\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \mid\vec{b}\mid\cdot\mid\vec{c}\mid\cdot\cos\alpha \\
& && \quad \vec{b}\cdot\vec{c} \;\; \text{hängt nur von den Längen und dem Winkel ab.} \\
&= (\vec{a}\,'\,\vec{b}\,'^\top)\,\vec{c}\,' && \text{Matrizenmultiplikation ist assoziativ} \\
&= \Omega'\vec{c}\,'
\end{aligned}$$

↑ Metrischer Tensor



Neben der kanonischen Basis $\vec{e}_i$ betrachten wir die schiefwinklige Basis $\vec{a}_i$.
Die Koordinaten für einen Vektor $\vec{x}$ seien

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 = y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3$$

Wie können mit schiefwinkligen Koordinaten Abstände und Winkel ermittelt werden?
Für die Länge von $\vec{x}$ wird das Skalarprodukt verwendet.

$$\begin{aligned}
|\vec{x}| &= \sqrt{\vec{x}\cdot\vec{x}} \\
\vec{x}^2 &= (y_1\vec{a}_1 + y_2\vec{a}_2 + y_3\vec{a}_3)^2 \\
&= y_1y_1\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 + y_1y_2\,\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 + \ldots + y_2y_2\,\vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 + \ldots + y_2y_3\,\vec{a}_2\cdot\vec{a}_3 + \ldots + y_3y_3\,\vec{a}_3\cdot\vec{a}_3 \\
&= \vec{y}^{\top}\Omega\,\vec{y}
\end{aligned}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \vec{a}_1\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_2 & \vec{a}_1\cdot\vec{a}_3 \\ \vec{a}_2\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_2 & \vec{a}_2\cdot\vec{a}_3 \\ \vec{a}_3\cdot\vec{a}_1 & \vec{a}_3\cdot\vec{a}_2 & \vec{a}_3\cdot\vec{a}_3 \end{pmatrix}$$

Metrischer Tensor der Basis $\vec{a}_i$

Mit $\vec{x}^2 = \vec{y}^{\top}\Omega\,\vec{y}$ können nun Längen und Abstände im schiefwinkligen Koordinatensystem ermittelt werden und mit $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{x}^{\top}\Omega\,\vec{y}$ auch Winkel ($\vec{x}\cdot\vec{y} = |\vec{x}|\cdot|\vec{y}|\cdot\cos\alpha$).

Der metrische Tensor einer orthonormalen Basis $\vec{e}_i$ ist die Einheitsmatrix E,
es ist $\Omega = [\vec{a}_i, \vec{a}_2, \vec{a}_3]^{\top} E\,[\vec{a}_i, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$.

Statt von einem orthonormalen System kann auch von einem schiefwinkligen Koordinatensystem $\vec{b}_i$ mit metrischem Tensor Ω ausgegangen werden. Dann gilt $\Omega = [\vec{c}_i, \vec{c}_2, \vec{c}_3]^{\top}\Omega\,[\vec{c}_i, \vec{c}_2, \vec{c}_3]$, wobei $\vec{c}_i$ die Koordinaten von $\vec{a}_i$ bezüglich der Basis $\vec{b}_i$ sind.

Siehe auch:

- Trägheitsmoment
- Startseite