

Tensoren

Koordinatentransformation

Metrische Matrix (Metrischer Tensor)

Parallelogrammfläche

Drehung um den Ursprung

Orthogonale Matrix

Koordinatentransformation bei einer Drehung

Tensoren in der Physik

Tensoren in der Mathematik

Bilineare Abbildungen (Tensoren)

Wat is' n Tensor?

Tensorprodukt

Tensorprodukt Basen

Tensorprodukt Eindeutigkeit

Tensorprodukt  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$

Tensorprodukt mathematische Definition

Polarkoordinaten

Vektoren mit Polarkoordinaten

Gradienten-Basis

Ko- und kontravariante Basis

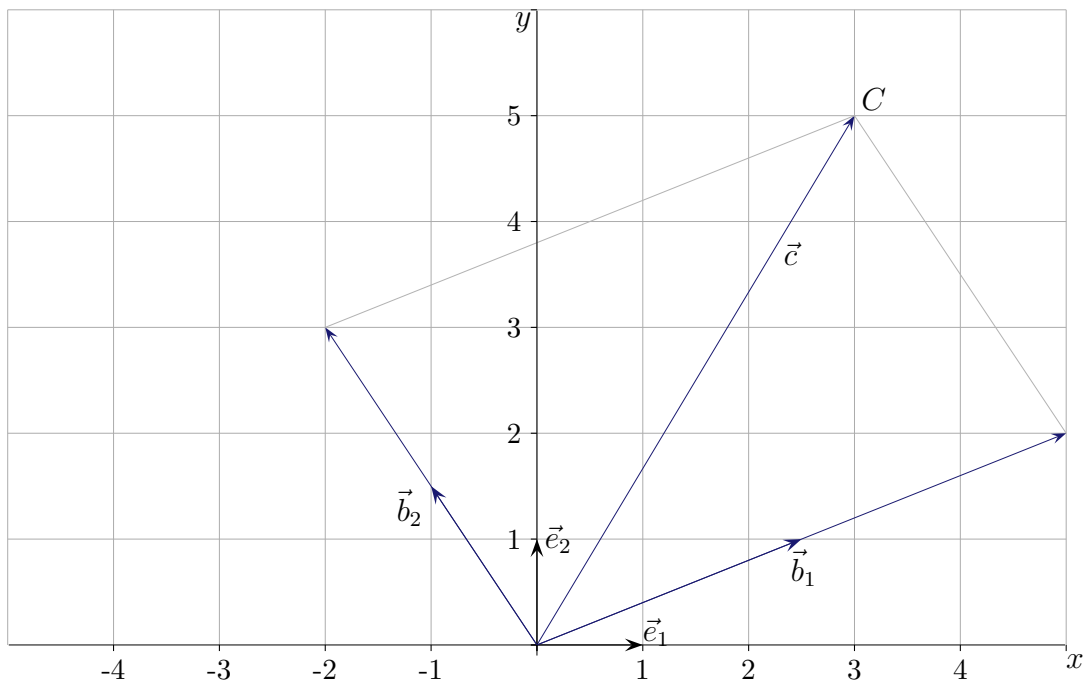
Vereinfachter Zusammenhang

Dualität

Duale Basis ermitteln

Zusammenhänge

# ↑ Koordinatentransformation



Die Koordinaten eines Punktes z.B.  $C$  seien  $(x, y)$  bezüglich der Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  und  $(u, v)$  bezüglich der Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ .

Es gilt dann

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = u\vec{b}_1 + v\vec{b}_2 \quad *$$

$$\vec{b}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$$

$$\vec{b}_2 = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

Die Basiselemente  $\vec{b}_i$  werden als Linearkombination der  $\vec{e}_i$  dargestellt

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = ua_{11}\vec{e}_1 + ua_{21}\vec{e}_2 + va_{12}\vec{e}_1 + va_{22}\vec{e}_2 \quad \text{und in } * \text{ eingesetzt.}$$

$$= \underbrace{(ua_{11} + va_{12})}_{x}\vec{e}_1 + \underbrace{(ua_{21} + va_{22})}_{y}\vec{e}_2$$

$$x = ua_{11} + va_{12}$$

$$y = ua_{21} + va_{22}$$

Beachte die Reihenfolge gegenüber der  $\vec{b}_i$ -Darstellung.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}_1, \vec{b}_2}$$

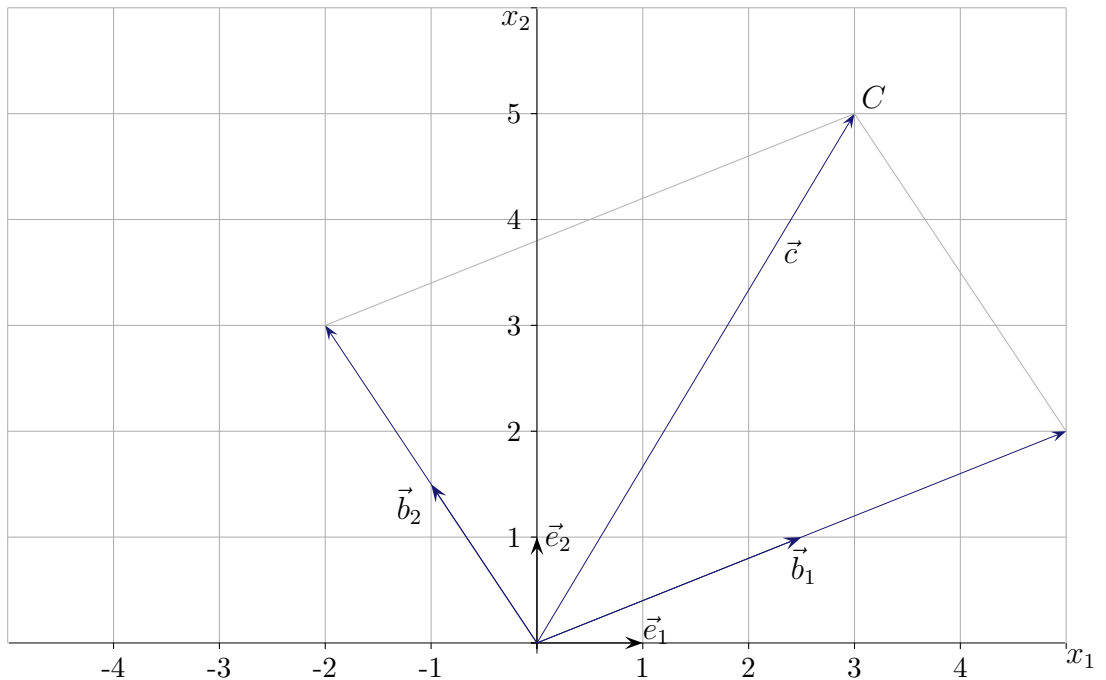
$$\vec{b}_1 = 2,5\vec{e}_1 + \vec{e}_2$$

$$\vec{b}_2 = -\vec{e}_1 + 1,5\vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} 2,5 & -1 \\ 1 & 1,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}_1, \vec{b}_2}$$

↑

## ↑ Metrische Matrix



Der Punkt  $C$  hat bezüglich der kanonischen Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  die Koordinaten  $(x_1, x_2) = (3, 5)$ .  
 Bezüglich der Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2$  lauten die Koordinaten  $(y_1, y_2) = (2, 2)$ .  
 Auch mit diesen Koordinaten könnten Längen, Winkel und Flächeninhalte ermittelt werden.

$$\vec{c} = y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2 \qquad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1,5 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{c}^2 &= (y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2) \cdot (y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2) \\ &= y_1 y_1 \vec{b}_1 \vec{b}_1 + y_1 y_2 \vec{b}_1 \vec{b}_2 + y_2 y_1 \vec{b}_2 \vec{b}_1 + y_2 y_2 \vec{b}_2 \vec{b}_2 \end{aligned}$$

$$\vec{c}^2 = (y_1, y_2) \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \vec{b}_2 \\ \vec{b}_2 \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \vec{b}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}_1, \vec{b}_2} \qquad \begin{matrix} \text{metrische Matrix} \\ \text{(metrischer Tensor)} \end{matrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

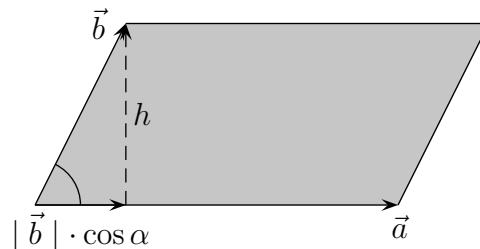
$$\vec{c}^2 = (2, 2) \begin{pmatrix} 7,25 & -1 \\ -1 & 3,25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}_1, \vec{b}_2} = (2, 2) \begin{pmatrix} 12,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} = 34 \quad \Rightarrow \quad |\vec{c}| = \sqrt{34}$$

↑

## ↑ Parallelogrammfläche

Wiederholung:

$$h = \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$



$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a}| \sqrt{|\vec{b}|^2 - |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2}$$

$$\begin{aligned} A_{\text{Parallelogramm}}^2 &= |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 \cdot (\cos \alpha)^2 \\ &= \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad * \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \\ &= \dots \quad \text{Klammern auflösen, umordnen} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 \\ &= (\vec{a} \times \vec{b})^2 \end{aligned}$$

$$\implies A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$\begin{aligned} \vec{a} &= y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2 \\ \vec{b} &= z_1 \vec{b}_1 + z_2 \vec{b}_2 \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= |(y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2) \times (z_1 \vec{b}_1 + z_2 \vec{b}_2)| = \dots = |y_1 z_2 - y_2 z_1| |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| \\ |\vec{b}_1 \times \vec{b}_2| &= \sqrt{\vec{b}_1^2 \cdot \vec{b}_2^2 - (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)^2} \quad * \\ &= \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \end{aligned}$$

insgesamt erhalten wir

$$A_{\text{Parallelogramm}} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |y_1 z_2 - y_2 z_1| \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}$$

↑

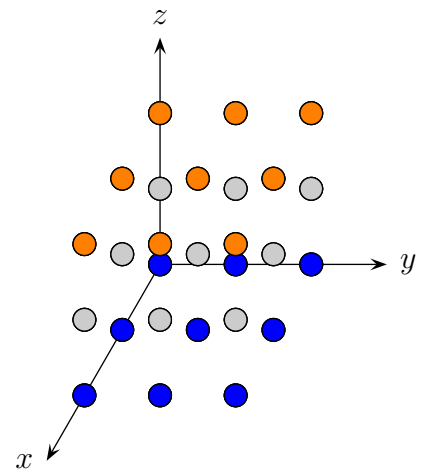
# ↑ Tensoren

Die Begriffe Vektor und Matrix werden mit dem Begriff Tensor verallgemeinert.  
 Ein Tensor der Stufe  $k$  im  $\mathbb{R}^n$  ist ein  $n^k$ -Tupel (Anordnung von  $n^k$  Zahlen).  
 Die Anordnung (nebeneinander, untereinander, rechteckartig, ...) ist dabei unerheblich.

Der Tensor der Stufe 1 im  $\mathbb{R}^3$  ist ein Vektor.

Der Tensor der Stufe 2 im  $\mathbb{R}^3$  besitzt  $3^2 = 9$  Elemente.  
 Für die Anordnung als Matrix werden 2 Indizes verwendet.

Der Tensor der Stufe 3 im  $\mathbb{R}^3$  besitzt  $3^3 = 27$  Elemente.  
 Für eine würfelfartige Anordnung werden 3 Indizes verwendet.



Der Tensor der Stufe 3 im  $\mathbb{R}^4$  besitzt  $4^3 = 64$  Elemente.  
 Es werden 3 Indizes verwendet, die jeweils von 1 bis 4 laufen.

Die Lokalisierung der Zahlen soll am Beispiel eines Tensors der Stufe 2 im  $\mathbb{R}^3$  gezeigt werden. Hierzu multiplizieren wir distributiv aus (wie bei einem Skalarprodukt):

$$\begin{aligned}
 (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \otimes (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) &= a_1a_1\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + a_1a_2\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + a_1a_3\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 \\
 &\quad \text{(sprich „mal im Kreis“)} \\
 &\quad \text{(oder „Tensor“)} \\
 &\quad + a_2a_1\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + a_2a_2\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + a_2a_3\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 \\
 &\quad + a_3a_1\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + a_3a_2\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + a_3a_3\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
 &= c_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + c_{13}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_3 \\
 &\quad + c_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 + c_{23}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_3 \\
 &\quad + c_{31}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_1 + c_{32}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_2 + c_{33}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3
 \end{aligned}$$

Die 9 Produkte  $c_{i,j}$  können nun durch ihren von  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  bestimmten Index unterschieden werden.  
 Die Elemente  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  sind als Basis eines 9-dimensionalen Matrix-Vektorraums vorstellbar.

$$\begin{aligned}
 &c_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + c_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \dots + c_{33}\vec{e}_3 \otimes \vec{e}_3 \\
 &= c_{11} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_{12} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \dots + c_{33} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wir sind nur an den Komponenten  $c_{ik}$  interessiert.

## ↑ Tensoren

2 Vektoren  $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ ,  $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$   
wird durch das Tensorprodukt  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  die Matrix

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \quad \text{kurz } T_{ij} = a_i b_j$$

zugeordnet.

Für einen Tensor der Stufe 2 im  $\mathbb{R}^4$  bilden wir:

$$(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4) \otimes (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3 + b_4\vec{e}_4) = T_{ij} = a_i b_j$$

Es sind alle möglichen Produkte zu bilden.

Die Indizes  $i, j$  laufen nun jeweils von 1 bis 4.

Für einen Tensor der Stufe 3 im  $\mathbb{R}^3$  bilden wir:

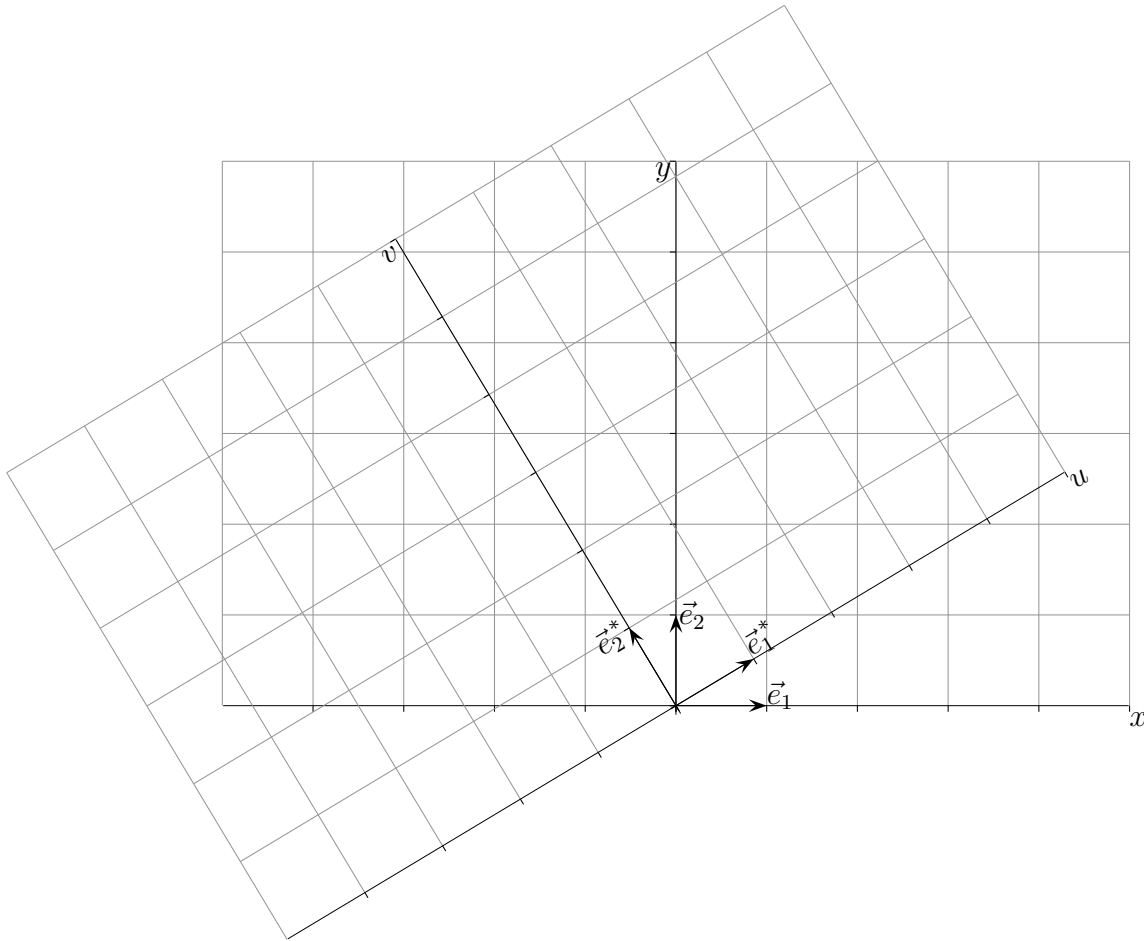
$$(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \otimes (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) \otimes (c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + c_3\vec{e}_3) = T_{ijk} = a_i b_j c_k$$

Die Indizes  $i, j, k$  laufen nun jeweils von 1 bis 3.

Einstein schrieb  $a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$  mit hochgestellten Indizes  $a^1\vec{e}_1 + a^2\vec{e}_2 + a^3\vec{e}_3 + a^4\vec{e}_4$  und kürzte die Summenschreibweise mit  $a^i\vec{e}_i$  ab, wobei über unten und oben gleich benannte Indizes zu summieren ist.

Im  $\mathbb{R}^4$  bedeutet  $x_i = g_{ji} \cdot x^j$  daher  $x_i = \sum_{j=1}^{n=4} g_{ji} \cdot x^j = g_{1i} \cdot x^1 + g_{2i} \cdot x^2 + g_{3i} \cdot x^3 + g_{4i} \cdot x^4$ .

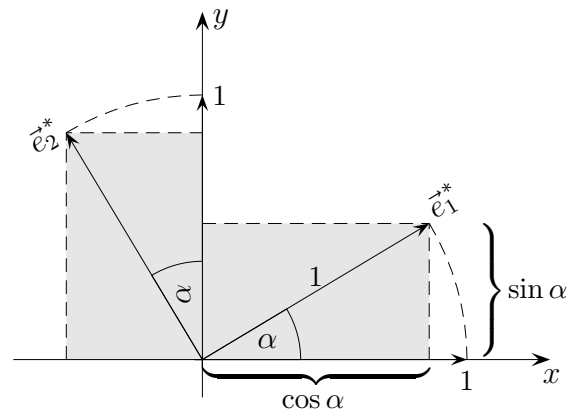
# ↑ Drehung um den Ursprung



$$\vec{e}_1^* = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2^* = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*}$$

Die 1. Spalte der Matrix enthält die  $x$ - und  $y$ -Koordinaten von  $\vec{e}_1^*$ , die 2. die von  $\vec{e}_2^*$ . Mit der inversen Matrix erfolgt die Umkehrung.

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

## ↑ Orthogonale Matrix

Bei der Drehung um den Ursprung

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wird die inverse Matrix für die Umkehrabbildung lediglich durch Transponieren gebildet. Das ist unmittelbar einzusehen. Für  $\alpha$  wird in die trig. Funktionen  $-\alpha$  eingesetzt, beachte  $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$ ,  $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$ .

Für eine zweite Begründung werden die Skalarprodukte  $\vec{e}_i^* \cdot \vec{e}_j^*$  distributiv ausgerechnet und bedacht, dass Orthonormalbasen vorliegen.

Der Zusammenhang  $\mathcal{A}^T \mathcal{A} = \mathcal{E}$ , d.h.  $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^{-1}$ , ist dann zu sehen.  $\mathcal{A}$  ist orthogonal.

$$\vec{e}_1^* = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2$$

$$\vec{e}_2^* = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*}$$

$$\mathcal{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

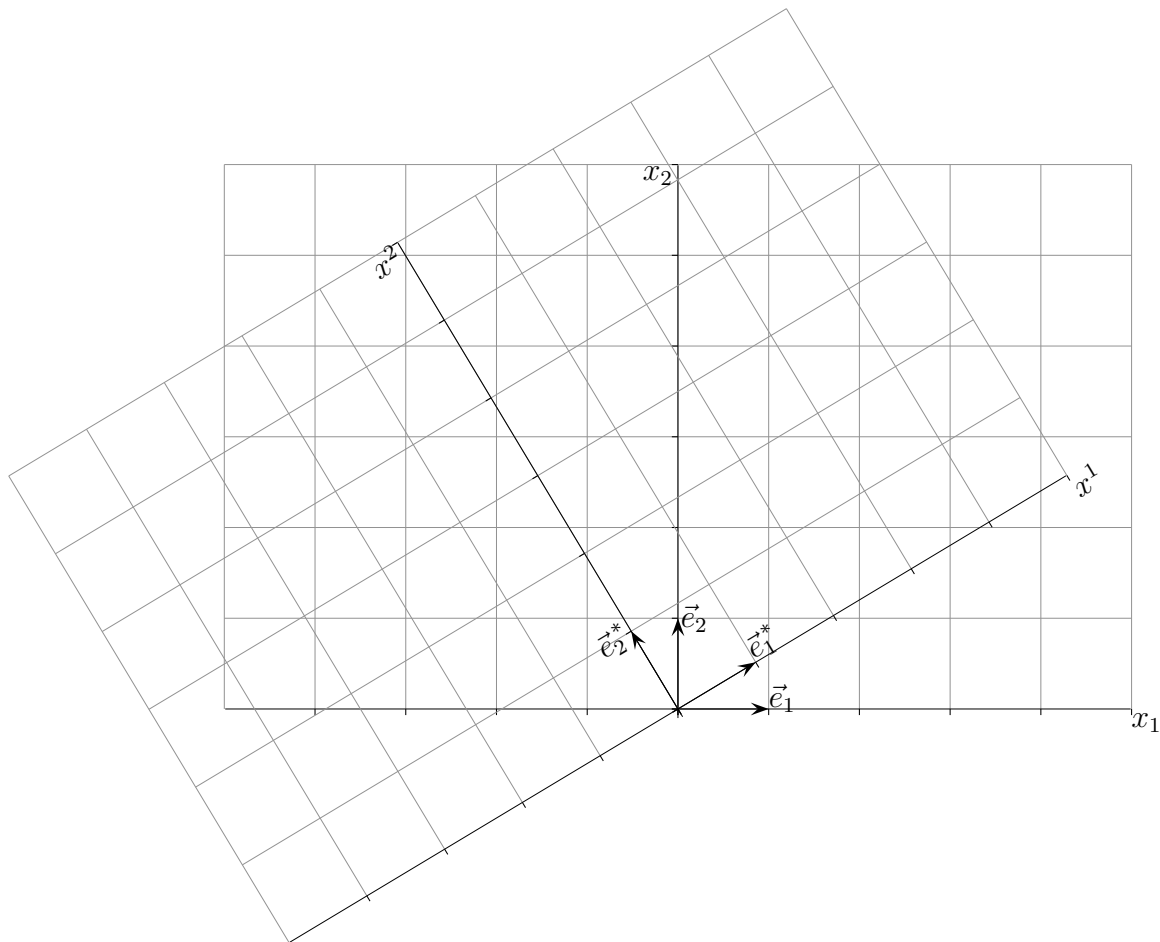
$$\vec{e}_1^* \cdot \vec{e}_1^* = a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} = 1$$

$$\vec{e}_2^* \cdot \vec{e}_2^* = a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1$$

$$\vec{e}_1^* \cdot \vec{e}_2^* = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} = 0 = \vec{e}_2^* \cdot \vec{e}_1^*$$



## ↑ Koordinatentransformation bei einer Drehung



$$\begin{aligned}\vec{e}_1^* &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^* &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*}$$

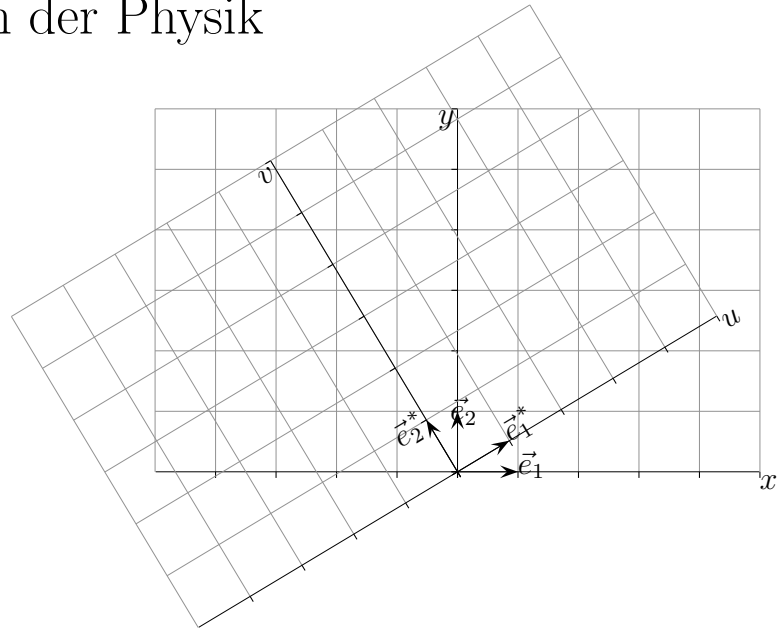
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}x_1 &= a_{11}x^1 + a_{12}x^2 \\ x_2 &= a_{21}x^1 + a_{22}x^2 \quad \iff \quad x_i = a_{ik}x^k\end{aligned}$$

Wir gehen von einem  $(x^1, x^2)$ -Koordinatensystem aus und rechnen die Koordinaten für ein  $(x, y)$ -System um. Die einsteinsche Summenkonvention ermöglicht eine kompakte Schreibweise der Transformationsgleichungen.

↑

# ↑ Tensoren in der Physik



Komplexere physikalische Größen wie die Spannung in einem Bauteil werden mit Tensoren erfasst. Der Tensor  $\mathcal{T}(x, y)$  bezieht sich auf die Basis  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ , da er deren Koordinaten enthält.  $\mathcal{T}^*(u, v)$  bezieht sich auf  $\vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*$ . Wir haben uns hier auf orthonormale Basen beschränkt. Die Matrix  $\mathcal{T}$  (in Bezug auf eine Basis) beschreibt nur dann eine tensorielle Größe, wenn  $\mathcal{T}$  und  $\mathcal{T}^*$  (beliebige andere Basis) dasselbe aussagen. Wie kann das überprüft werden?

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^* &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^* &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \end{aligned} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} \\ t^{21} & t^{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*}$$

Nachzuprüfen wäre

$$\mathcal{T}^* \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{e}_1^*, \vec{e}_2^*}$$

Auf der rechten Seite werden die  $u, v$ -Koordinaten zunächst in die  $x, y$ -Koordinaten transformiert, die dann vom Tensor  $\mathcal{T}$  abgebildet werden. Anschließend erfolgt die Rücktransformation in die  $u, v$ -Koordinaten.

$$\mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A} = \begin{pmatrix} (a_{11}t_{11} + a_{21}t_{21})a_{11} + (a_{11}t_{12} + a_{21}t_{22})a_{21} & (a_{11}t_{11} + a_{21}t_{21})a_{12} + (a_{11}t_{12} + a_{21}t_{22})a_{22} \\ (a_{12}t_{11} + a_{22}t_{21})a_{11} + (a_{12}t_{12} + a_{22}t_{22})a_{21} & (a_{12}t_{11} + a_{22}t_{21})a_{12} + (a_{12}t_{12} + a_{22}t_{22})a_{22} \end{pmatrix}$$

Mit der einsteinschen Summenkonvention lautet die Bedingung:  $\mathcal{T}_{ij}^* = a_{ki}a_{lj}\mathcal{T}^{kl}$

## ↑ Tensoren in der Mathematik

Mit einem Tensor der Stufe 2 (z.B.) im  $\mathbb{R}^2$  möchte man die Matrizen

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} \\ t^{21} & t^{22} \end{pmatrix}$$

mit der Transformationseigenschaft wie in der Physik erfassen.

$\mathcal{T}$  bezieht sich auf eine Basis. Die mathematische Definition ist basisfrei.

Gleich wird ersichtlich, wo geeignete Matrizen in der Mathematik auftauchen.

Betrachten wir eine bilineare Abbildung  $\otimes: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ .

Jedem Vektorpaar  $(\vec{a}, \vec{b})$  wird als Bild  $\vec{a} \otimes \vec{b}$  zugeordnet.

Da die Abbildung linear in jeder Variablen ist, können wir distributiv (“jeder mit jedem“) rechnen.

$$\begin{aligned} (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) \otimes (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2) &= a_1b_1\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + a_1b_2\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + a_2b_1\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + a_2b_2\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2 \\ &= a_i b_j \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j \end{aligned}$$

Um weiterrechnen zu können, müssen die Werte  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  bekannt sein.

Man trägt sie übersichtlich in eine Tabelle ein,  $t_{i,j} = \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ .

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t^{11} & t^{12} \\ t^{21} & t^{22} \end{pmatrix}$$

Es soll untersucht werden, wie sich diese Matrix bei einem Basiswechsel verändert. Die Abbildung bleibt davon unberührt, gleichgültig, mit welcher Basis das Argumentenpaar dargestellt wird.

Für den Basiswechsel

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^* &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2^* &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 \end{aligned} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

rechnen wir distributiv aus:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1^* \otimes \vec{e}_1^* &= (a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) \otimes (a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) = (a_{11}t_{11} + a_{21}t_{21})a_{11} + (a_{11}t_{12} + a_{21}t_{22})a_{21} \\ \vec{e}_1^* \otimes \vec{e}_2^* &= (a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2) \otimes (a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2) = (a_{11}t_{11} + a_{21}t_{21})a_{12} + (a_{11}t_{12} + a_{21}t_{22})a_{22} \\ \vec{e}_i^* \otimes \vec{e}_j^* &= a_{ki}a_{lj}t^{kl} \end{aligned}$$

Das ergibt die Koeffizienten-Matrix der bilinearen Abbildung für die Basis  $\vec{e}_i^*$ .

$$\mathcal{T}^* = \mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A} = a_{ki}a_{lj} \mathcal{T}^{kl}$$

Eine bilineare Abbildung (verallgemeinert multilineare) Abbildung heißt Tensor.

Zu einer gegebenen Basis gehört die Matrix  $\mathcal{T}$ , die auch als Tensor bezeichnet wird.

Eine bilineare Abbildung ist bei gegebener Basis  $\vec{e}_i$  eindeutig durch die Werte  $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$  festgelegt.

Werden umgekehrt zu einer gegebenen Basis  $\vec{e}_i$  Werte  $\mathcal{T}^{ij}$  vorgegeben und transformiert sich  $\mathcal{T}^{ij}$  bei einer Koordinatentransformation gemäß  $\mathcal{T}^* = \mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A}$ , so ist die Abbildung bilinear.

↑

## ↑ Bilineare Abbildungen (Tensoren)

Die Schreibweise für Vektoren wurde hier geändert.

Es werden nur orthonormale Basen berücksichtigt.

$$1. \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \longrightarrow \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i \quad \text{bezüglich der kanonischen Basis } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

Summation über  $i$

Das Skalarprodukt ist unabhängig von der Basis,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\angle \mathbf{a}, \mathbf{b})$ .

$$(a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3) \otimes (b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + b_3 \mathbf{e}_3) = a_i b_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Summation über  $i$  und  $j$

Ein Vergleich mit dem Skalarprodukt ergibt die Koeffizientenmatrix bezüglich der kanonischen Basis,  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}$ .

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Seien  $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$  und  $g(\mathbf{y}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}$  lineare Abbildungen,  $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ .  
Damit kann eine bilineare Abbildung (siehe 1.) zusammengesetzt werden.

$$\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \cdot g(\mathbf{y}) = a_i b_j x_i y_j \quad \text{bezüglich der kanonischen Basis } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$$

Summation über  $i$  und  $j$

$$(x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3) \otimes (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2 + y_3 \mathbf{e}_3) = x_i y_j \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

Ein Vergleich ergibt die Koeffizientenmatrix bezüglich der kanonischen Basis,  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = a_i b_j$ .

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T$$

Die Beispiele verdeutlichen noch einmal, wie eine bilineare Abbildung  $\otimes: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  durch 9 Basisprodukte  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  festgelegt (charakterisiert) ist.

## ↑ Bilineare Abbildungen (Tensoren)

Werden umgekehrt für eine Abbildung  $\odot: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  die 4 Basisprodukte  $\mathbf{e}_i \odot \mathbf{e}_j = t_{ij}$  vorgegeben, so ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} \odot \mathbf{y} = x_i y_j t_{ij} \end{aligned}$$

linear für jede Variable, wenn  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  als Linearkombination der  $\mathbf{e}_i$  dargestellt werden. Für jede andere Basis  $\mathbf{e}_i^*$  muss  $\mathbf{e}_i^* \odot \mathbf{e}_j^* = a_{ki} a_{lj} t_{kl}$  ( $= t_{ij}^*$ ) sein,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1^* &= a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{21} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2^* &= a_{12} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

damit eine (basisunabhängige) bilineare Abbildung vorliegt.

Beweis

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}_{\text{Basis } \mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2} \quad x_i^* = a_{ni} x_n \quad (y_i^* = a_{mi} y_m)$$

Es wird gezeigt, dass die Funktionswerte unabhängig von der Basis identisch sind.

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \odot \mathbf{y} &= x_i^* \mathbf{e}_i^* \odot y_j^* \mathbf{e}_j^* = x_i^* y_j^* a_{ki} a_{lj} t_{kl} \\ &= a_{ni} x_n a_{mj} y_m a_{ki} a_{lj} t_{kl} \\ &= \underbrace{a_{ni} a_{ki}}_{\delta_{nk}} \underbrace{a_{mj} a_{lj}}_{\delta_{ml}} x_n y_m t_{kl} \\ &= \underbrace{\delta_{nk} x_k}_{x_k} \underbrace{\delta_{ml} y_m}_{y_l} t_{kl} = x_i y_j t_{ij} \\ &= x_i \mathbf{e}_i \odot y_j \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

64 Summanden, für jeden freien Index Faktor 2  
Freie Indizes müssen umbenannt werden.  
jeweils 4 Summanden, beachte  $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{E}$

$\delta_{ij}$  nur bei gleichen Indizes 1 sonst 0

□

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{12}a_{21} = 1 & 0 \\ 0 & a_{21}a_{12} + a_{22}a_{22} = 1 \end{pmatrix}$$

$$a_{21}^2 = a_{12}^2$$

Die Aussage kann auf Abbildungen  $\odot: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  in naheliegender Weise verallgemeinert werden.

↑

© Roolfs

## ↑ Wat is' n Tensor?

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix}$$

Eine quadratische Matrix (hier  $n = 3$ ) ist ein Tensor mit der Basis  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , (es werden hier nur orthonormale Basen betrachtet) wenn in ihr der Bauplan für eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (\text{je 2 Vektoren wird eine reelle Zahl zugeordnet}) \end{aligned}$$

enthalten ist, die folgende ansprechende Eigenschaften hat (denke an das Skalarprodukt):

1.  $T$  ist linear für jede Variable,  $T(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + T(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$   
 $T(k\mathbf{x}, \mathbf{y}) = kT(\mathbf{x}, \mathbf{y})$   
Entsprechendes gilt für  $\mathbf{y}$ .
2. Die Funktionswerte  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  hängen nicht davon ab, mit welcher Basis  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  dargestellt werden.
3. Die Matrix enthält die Funktionswerte  $t_{i,j} = T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$  für alle möglichen Basispaare.

Für die Abbildung  $T$  ist die Schreibweise  $T(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \otimes \mathbf{y}$  vorteilhaft.

Rechnen wir einen Funktionswert aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= (x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) \otimes (y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3) \\ &= x_1y_1\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + x_1y_2\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \dots \quad (\text{“jeder mit jedem“}) \\ &= x_1y_1t_{11} + x_1y_2t_{12} + \dots \end{aligned}$$

Werden  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  mit einer anderen Basis  $\mathbf{e}_1^*, \mathbf{e}_2^*, \mathbf{e}_3^*$  dargestellt, so kann die Matrix  $\mathcal{T}$  an die neue Basis mit  $\mathcal{T}^* = \mathcal{A}^T \mathcal{T} \mathcal{A}$  angepasst werden. Hierbei transformiert  $\mathcal{A}$  die  $\mathbf{e}_i^*$ - in die  $\mathbf{e}_i$ -Koordinaten.

# ↑ Tensorprodukt

Eine Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \\ \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) \otimes (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 y_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + x_1 y_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + x_2 y_1 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1 + x_2 y_2 \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

ist mit einer Basis  $\mathbf{e}_i$  und 4 Werten  $t_{ij} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  festgelegt.  
Für eine Multilinearform  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$  sind es 27 Werte  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$ .

Es soll nun gezeigt werden, dass die  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  eine Basis eines Vektorraums (des Tensorprodukts  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ ) bilden, denen die Werte  $t_{ij}$  noch zugeordnet werden müssen. Von der Bilinearform wird also der stets gleichartige distributive Rechenanteil von der Zuordnung der die Bilinearform charakterisierenden Werte abgetrennt.

$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  wird sich als Vektorraum  $V$  der  $2 \times 2$ -Matrizen erweisen.  
Wir benötigen die bilineare Abbildung  $\otimes$  von  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  nach  $V$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \mathbf{y}^T \quad \text{Matrizenoperationen} \quad (\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2)^T = \mathbf{y}_1^T + \mathbf{y}_2^T \end{aligned}$$

Die folgenden Beispiele verdeutlichen den Zusammenhang.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  bilden eine Basis von  $V$ . Wir wechseln die Basis in  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 &= \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \\ \mathbf{e}_1 \otimes (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \otimes (\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2) \\ &= \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## ↑ Tensorprodukt Basen

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  bilden eine Basis von  $V$ . Wir wechseln die Basis in  $\mathbb{R}^2$ .

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die  $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$  bilden auch eine Basis von  $V$ .

Begründung

Die  $\mathbf{e}_i$  lassen sich jeweils durch eine Linearkombination der  $\mathbf{v}_i$  darstellen.

Bildet man nun die Tensorprodukte  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  mit den Linearkombinationen der  $\mathbf{v}_i$ ,

so erhält man für die Basiselemente  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  Linearkombinationen der  $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$ .

Da die Anzahlen der  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$  und  $\mathbf{v}_i \otimes \mathbf{v}_j$  übereinstimmen, folgt die Behauptung.

Ohne math. Nutzen, jedoch möglicherweise hilfreich für die Anschauung:

Da wir uns im Raum der  $2 \times 2$ -Matrizen bewegen, könnten den Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad \text{die Matrizen}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad \text{zugeordnet werden.}$$

$$\text{Es wäre dann jedenfalls} \quad \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = AB^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_1 \\ a_2 b_2 & a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$



# ↑ Tensorprodukt Eindeutigkeit

Jede bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow V \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &= f((x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2), (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2)) \\ &= x_1 y_1 f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + x_2 y_1 f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + x_2 y_2 f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) \end{aligned}$$

in einen Vektorraum  $V$  kann mit dem Tensorprodukt zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \longrightarrow x_1 y_1 f'(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 f'(\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2) + x_2 y_1 f'(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1) + x_2 y_2 f'(\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2) \\ &\text{mit } f'(\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

Durch diese universelle Eigenschaft ist das Tensorprodukt (bis auf Isomorphie) eindeutig bestimmt.

Nehmen wir an, es gelte für jede bilineare Abbildung  $f$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \circlearrowleft \mathbb{R}^2 \longrightarrow V \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} \circlearrowleft \mathbf{y} \longrightarrow x_1 y_1 f'(\mathbf{e}_1 \circlearrowleft \mathbf{e}_1) + x_1 y_2 f'(\mathbf{e}_1 \circlearrowleft \mathbf{e}_2) + x_2 y_1 f'(\mathbf{e}_2 \circlearrowleft \mathbf{e}_1) + x_2 y_2 f'(\mathbf{e}_2 \circlearrowleft \mathbf{e}_2) \\ &\text{mit } f'(\mathbf{e}_i \circlearrowleft \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \end{aligned}$$

dann ergäben sich für

$$f'(\mathbf{e}_i \circlearrowleft \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^T$$

4 Basisvektoren des Matrizenraums  $V$ .

$$\text{Aus } \lambda_1 \mathbf{e}_1 \circlearrowleft \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_1 \circlearrowleft \mathbf{e}_2 + \lambda_3 \mathbf{e}_2 \circlearrowleft \mathbf{e}_1 + \lambda_4 \mathbf{e}_2 \circlearrowleft \mathbf{e}_2 = 0$$

$$\text{folgt } \lambda_1 f'(\mathbf{e}_1 \circlearrowleft \mathbf{e}_1) + \lambda_2 f'(\mathbf{e}_1 \circlearrowleft \mathbf{e}_2) + \lambda_3 f'(\mathbf{e}_2 \circlearrowleft \mathbf{e}_1) + \lambda_4 f'(\mathbf{e}_2 \circlearrowleft \mathbf{e}_2) = 0$$

$$\text{und damit } \lambda_i = 0$$

Der Vektorraum  $\mathbb{R}^2 \circlearrowleft \mathbb{R}^2$  ist daher 4-dimensional und somit isomorph zu  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \mathbf{x} \mathbf{y}^T \quad \text{erzeugt das Tensorprodukt } \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

↑

## ↑ Tensorprodukt $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$

Eine Bilinearform

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &\longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} &= (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) \otimes (y_1 \mathbf{e}_1 + y_2 \mathbf{e}_2) \otimes (z_1 \mathbf{e}_1 + z_2 \mathbf{e}_2) \\ &= x_1 y_1 z_1 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 + x_1 y_1 z_2 \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 + \dots \end{aligned}$$

ist mit einer Basis  $\mathbf{e}_i$  und 8 Werten  $t_{ijk} = \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  festgelegt.

Es soll gezeigt werden, dass die  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$  eine Basis eines Vektorraums (des Tensorprodukts  $\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ ) bilden, denen die Werte  $t_{ijk}$  noch zugeordnet werden müssen. Von der Bilinearform wird also der stets gleichartige distributive Rechenanteil von der Zuordnung der die Bilinearform charakterisierenden Werte abgetrennt.

$\mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$  wird sich als Vektorraum  $V$  der  $2 \times 4$ -Matrizen erweisen. Wir benötigen die bilineare Abbildung  $\otimes$  von  $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$  nach  $V$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^{2 \times 4} \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) &\longrightarrow \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \mathbf{y}^T A \\ &\text{mit } A = \begin{pmatrix} z_1 & 0 & z_2 & 0 \\ 0 & z_1 & 0 & z_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die (naheliegende) Wahl von  $A$  wird durch

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} \otimes \mathbf{z} = \mathbf{x} \mathbf{y}^T A = \begin{pmatrix} x_1 y_1 z_1 & x_1 y_2 z_1 & x_1 y_1 z_2 & x_1 y_2 z_2 \\ x_2 y_1 z_1 & x_2 y_2 z_1 & x_2 y_1 z_2 & x_2 y_2 z_2 \end{pmatrix}$$

bestätigt, beachte

$$\mathbf{x} \otimes \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 \end{pmatrix}.$$

Für  $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  sind

$$\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Basiselemente von  $V$ .

$V$  hat die maximale Dimension 8 und somit die universelle Eigenschaft.

Die Anleitung für das sukzessive Basteln von Tensorprodukten dürfte ersichtlich sein.

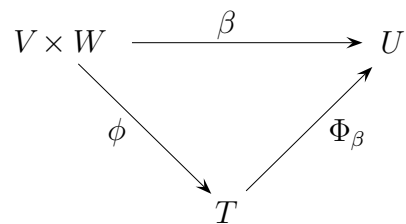
# ↑ Tensorprodukt    mathematische Definition

Seien  $V, W$   $K$ -Vektorräume.

Ein  $K$ -Vektorraum  $T$  mit einer bilinearen Abbildung  $\phi: V \times W \rightarrow T$  heißt ein Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ , falls  $\phi$  die folgende universelle Abbildungseigenschaft erfüllt:

Zu jedem  $K$ -Vektorraum  $U$  und jeder bilinearen Abbildung  $\beta: V \times W \rightarrow U$  existiert genau eine lineare Abbildung  $\Phi_\beta$  derart, dass  $\beta = \Phi_\beta \circ \phi$ .

Schreibe:  $T =: V \otimes W$ ,  $\phi(v, w) =: v \otimes w$



Nach den vorstehenden Überlegungen dürfte diese Definition sinnvoll erscheinen.

$\Phi_\beta$  ordnet den Basiselementen von  $V \otimes W$  die zugehörigen  $\beta$ -Werte zu.

$\beta$  ist hierdurch schon eindeutig festgelegt.

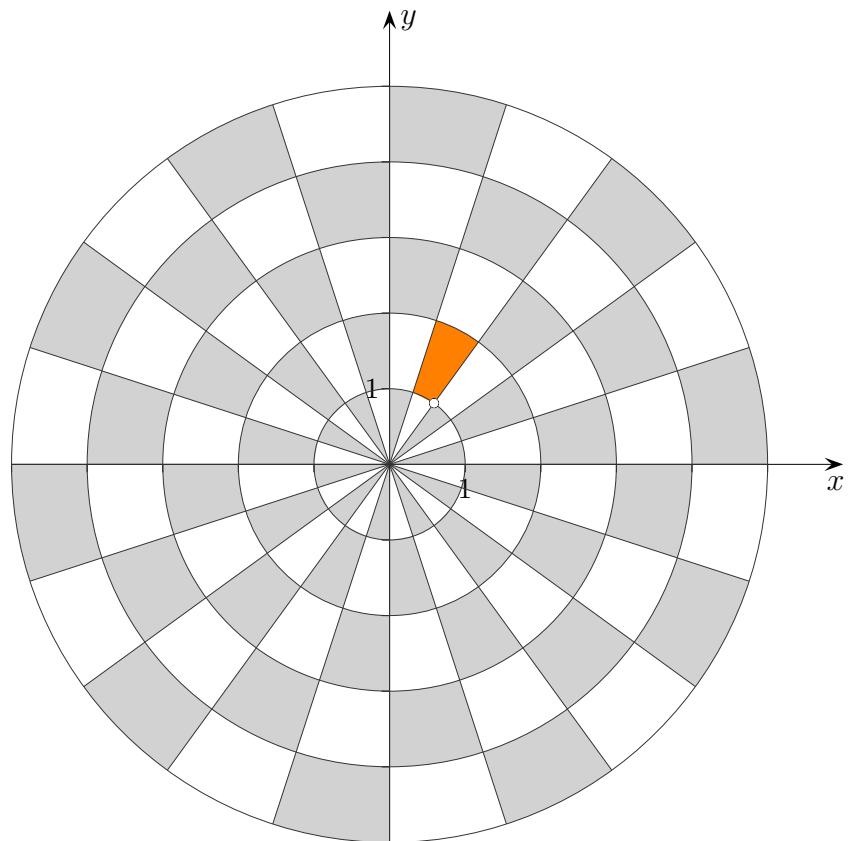
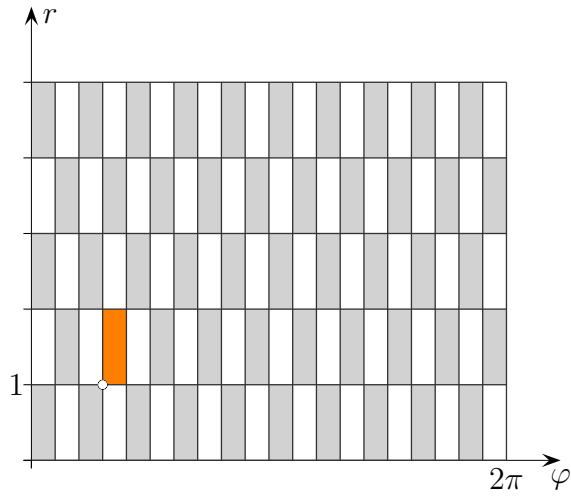
Die weiteren  $\beta$ -Werte ergeben sich durch die Linearität von  $\Phi_\beta$ .

$V \otimes W$  ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Es gilt  $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$ .

Die Definition eines Tensorprodukts lässt sich auch auf Strukturen ausdehnen, für die keine Basis existiert.

# ↑ Polarkoordinaten



Die Grafik veranschaulicht die Abbildung

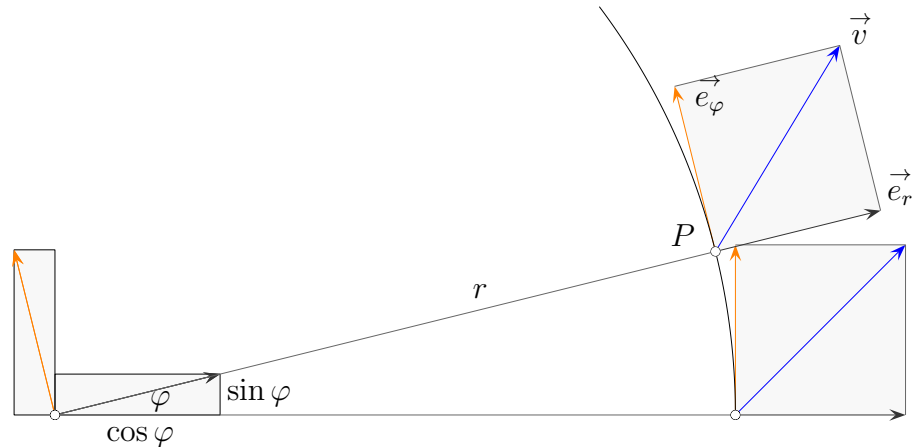
$$(\varphi, r) \longrightarrow (x, y)$$

$$x = r \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \varphi$$

## ↑ Vektoren mit Polarkoordinaten

Um Vektoren (oder Tensoren) in krummlinigen Koordinatensystemen zu erfassen, sind lokale affine Koordinatensysteme erforderlich. Koordinatenlinien im  $\mathbb{R}^2$  erhält man, indem von 2 Variablen jeweils eine festgehalten und die zweite variiert wird. Für jeden Punkt bilden die beiden Tangentialvektoren der Koordinatenlinien eine Basis für ein lokales Koordinatensystem. Dieses kann normiert werden, es muss jedoch nicht wie hier orthogonal sein.



$$\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_r = \frac{\partial}{\partial r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

auf Länge 1 gebracht

Ein Vektor  $\vec{v}$  lässt sich mit diesen Basisvektoren (tangential für  $r$  bzw.  $\varphi = \text{const}$ )

$$\text{in der Form } \vec{v} = v_r \vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi$$

darstellen. Für die Umrechnung gilt, siehe Drehung um den Ursprung:

$$\begin{aligned} \vec{e}_r &= a_{11} \vec{e}_1 + a_{21} \vec{e}_2 \\ \vec{e}_\varphi &= a_{12} \vec{e}_1 + a_{22} \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} \quad \text{Basis } \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} \Big|_{\text{Basis } \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi}$$

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \end{pmatrix} \Big|_{\text{Basis } \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Big|_{\text{Basis } \vec{e}_1, \vec{e}_2}$$

↑

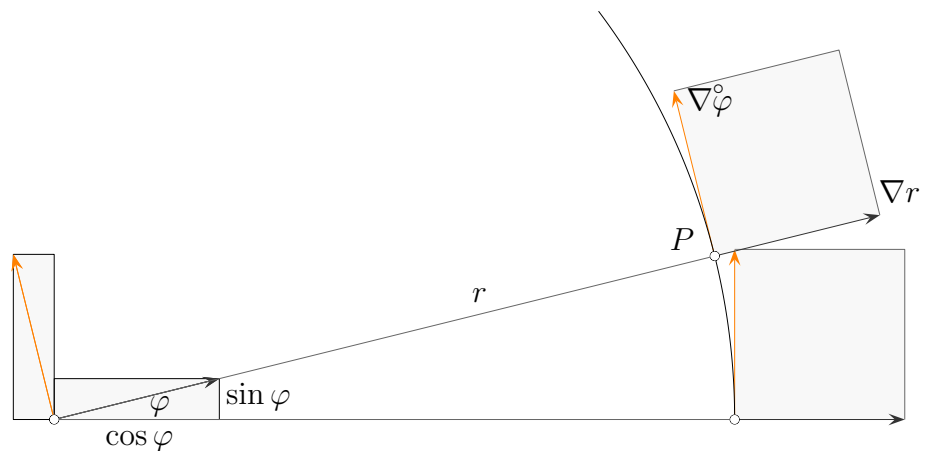
© Roelfs

## ↑ Gradienten-Basis

In krummlinigen Koordinatensystemen können lokale affine Koordinatensysteme neben Tangentialvektoren auch mit Gradienten gebildet werden. Ein Gradient (Richtung des größten Anstiegs) ist orthogonal zu einer Koordinatenlinie und somit auch zum zugehörigen Tangentialvektor. Für Polarkoordinaten gilt:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned}$$



$$\nabla r = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} \\ \frac{\partial r}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

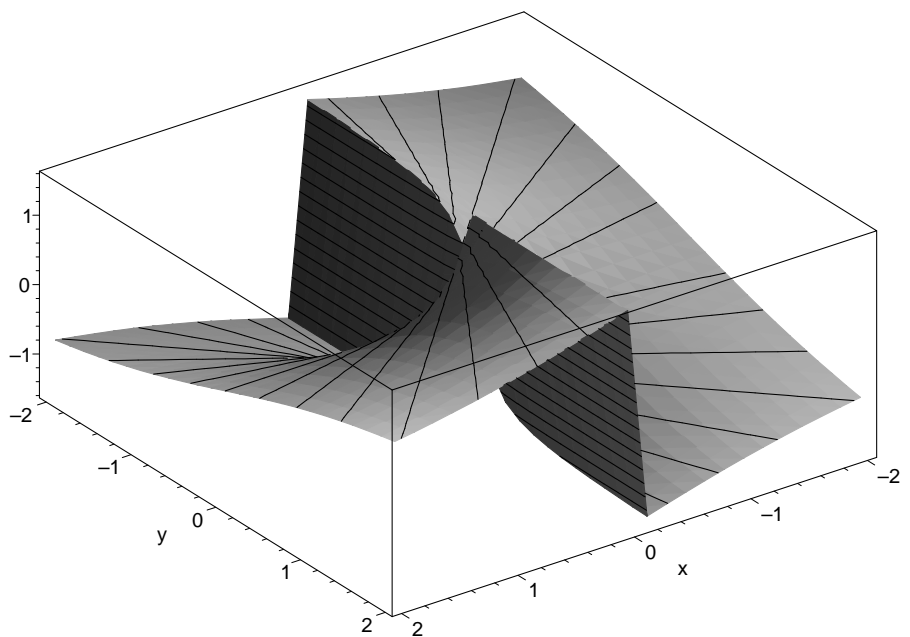
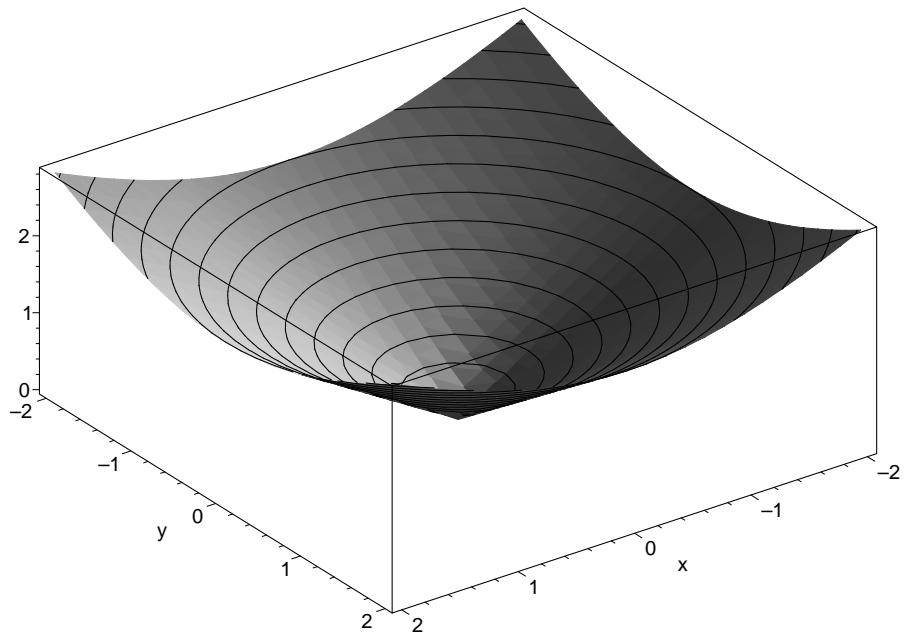
Nur in orthogonalen lokalen Koordinatensystemen erhalten wir nichts Neues.

## ↑ Gradienten-Basis

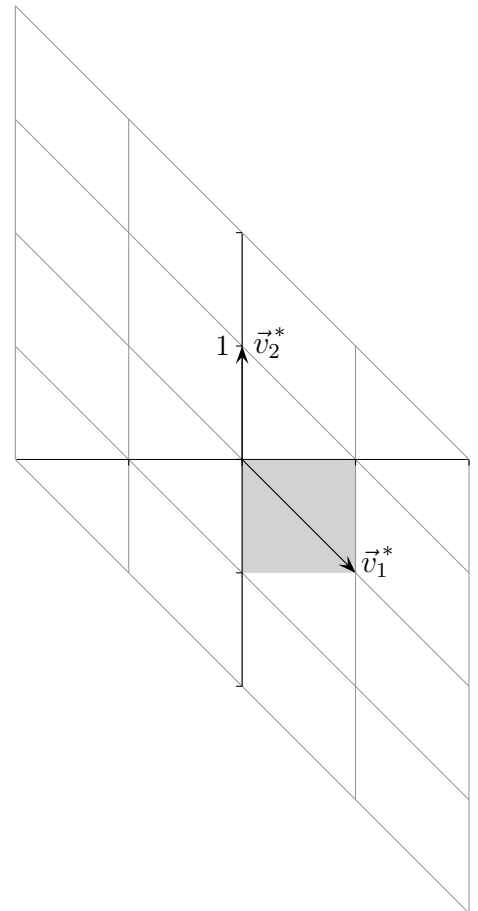
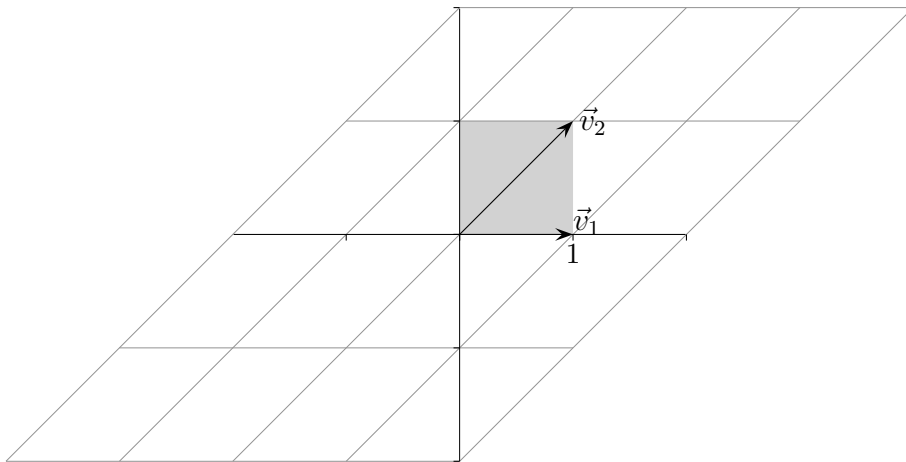
Die Graphen der Funktionen

$$\begin{aligned}(x, y) &\longrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} \\(x, y) &\longrightarrow \varphi = \arctan \frac{y}{x}\end{aligned}$$

sind abgebildet, um den Zusammenhang von Gradienten, größtem Anstieg und Koordinatenlinien zu veranschaulichen.



## ↑ Ko- und kontravariante Basis



Für die beiden affinen Koordinatensysteme gilt:

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2^* = 0$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1^* = 0$$

$$\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1^* = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = 1$$

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2^* = \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \cos 45^\circ = 1$$

Zusammengefasst (Kronecker-Symbol):  $\vec{v}_i \cdot \vec{v}_j^* = \delta_{ij}$

Nur bei gleichen Indizes ist das Ergebnis 1, sonst 0.

Die duale Basis für ein affines Koordinatensystem  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3$  im  $\mathbb{R}^3$  lautet:

$$\vec{b}_1^* = \frac{\vec{b}_2 \times \vec{b}_3}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3}, \quad \vec{b}_2^* = \frac{\vec{b}_3 \times \vec{b}_1}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3}, \quad \vec{b}_3^* = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3}$$

Aus den Eigenschaften für das Vektorprodukt folgt:  $\vec{b}_i \cdot \vec{b}_j^* = \delta_{ij}$

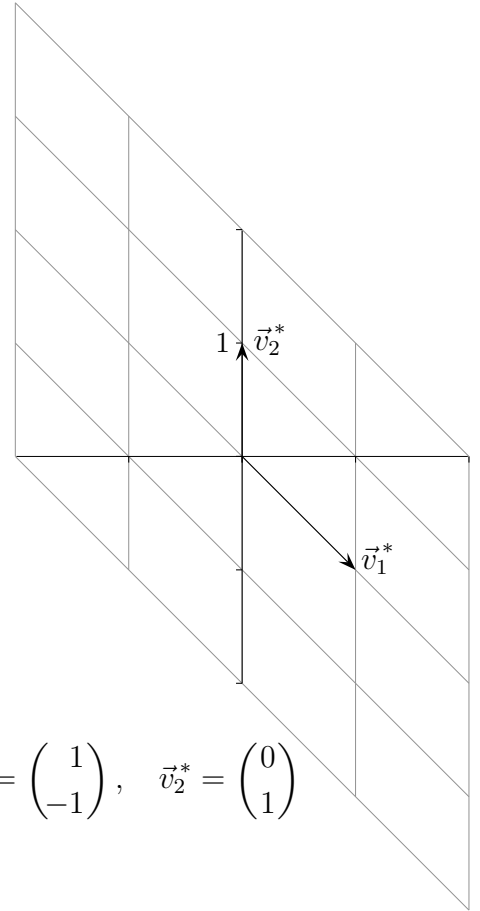
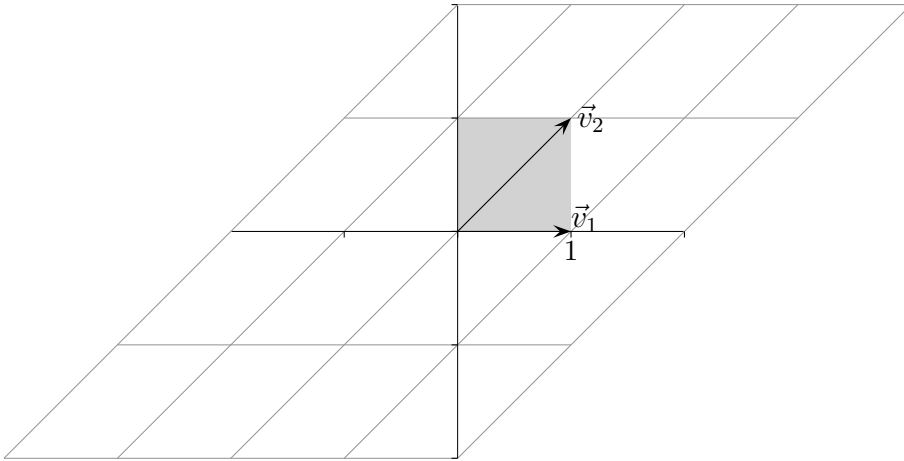
Die Orthogonalität liegt auch bei Tangentialvektoren und den zugehörigen Gradienten vor.

Die beiden Basen werden mit den Begriffen ko- und kontravariant, die entsprechenden Koordinaten mit unteren, bzw. oberen Indices unterschieden.

Ich verwende diese Schreibweise zunächst nicht.



# ↑ Transformation ko- und kontravarianter Vektoren



$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{pmatrix}_{\text{kartesisch}}$$

$$\vec{v}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_1^* = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_2^* = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

$$\vec{v}_1^* = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 \quad | \cdot \vec{v}_1^* \quad | \cdot \vec{v}_2^*$$

$$\vec{v}_2^* = a_{12}\vec{v}_1 + a_{22}\vec{v}_2 \quad | \cdot \vec{v}_1^* \quad | \cdot \vec{v}_2^*$$

Durch Multiplikation der Gleichungen mit  $\vec{v}_i^*$  unter Beachtung der Orthogonalitätsbeziehungen erkennen wir, dass die Transformationsmatrix mit der metrischen Matrix für die  $\vec{v}_i^*$  übereinstimmt.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^* \cdot \vec{v}_1^* & \vec{v}_1^* \cdot \vec{v}_2^* \\ \vec{v}_2^* \cdot \vec{v}_1^* & \vec{v}_2^* \cdot \vec{v}_2^* \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{v}_1, \vec{v}_2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{v}_1^*, \vec{v}_2^*}$$

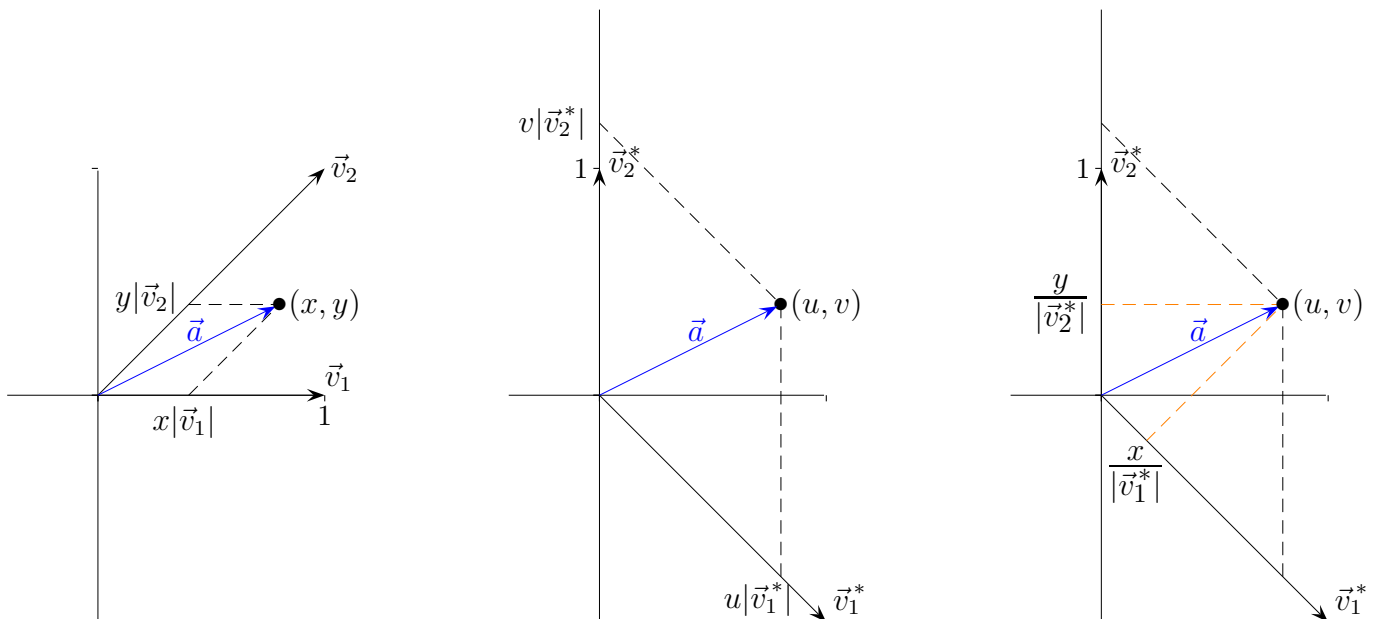
Umgekehrt gilt:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{v}_1^*, \vec{v}_2^*} = \mathcal{A}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{v}_1, \vec{v}_2}$$

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 & \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \end{pmatrix}$$

# ↑ Ko- und kontravariante Komponenten, Zusammenhang



Wir untersuchen den Zusammenhang der Komponenten von  $\vec{a}$  in den beiden dualen Koordinatensystemen.

Die Graphen enthalten auch Längenangaben.

Dem rechten Graphen ist zu entnehmen, wie im  $(u, v)$ -System auch die  $(x, y)$ -Koordinaten mit Hilfe senkrechter Projektionen ermittelt werden können.

$$\begin{aligned}
 x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 &= \vec{a} \quad | \cdot \vec{v}_1^* \\
 x &= \vec{a} \cdot \vec{v}_1^* \\
 &= |\vec{a}| |\vec{v}_1^*| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{v}_1^*) \implies \\
 \frac{x}{|\vec{v}_1^*|} &= |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{v}_1^*)
 \end{aligned}$$

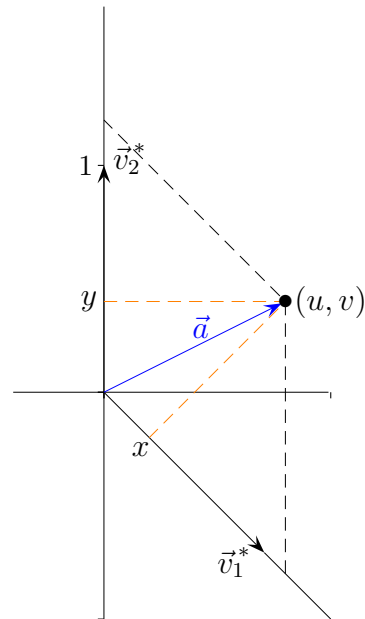
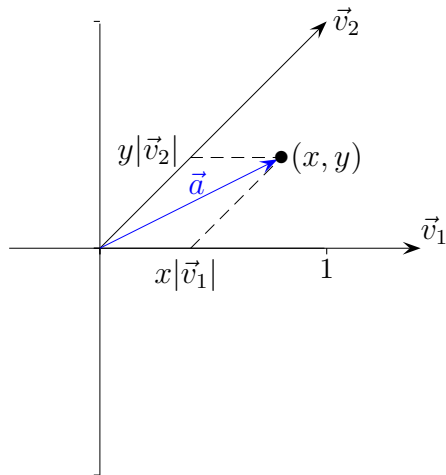
Entsprechendes gilt für  $y$  (Multiplikation mit  $\vec{v}_2^*$ ).

Zur Begriffsbildung

Wir betrachten den Vektor  $\vec{a}$ .  $x|\vec{v}_1|$  ist proportional zur Länge von  $\vec{v}_1$  ( $\vec{v}_i$  kovariante Basis),  $\frac{x}{|\vec{v}_1^*|}$  ist antiproportional zur Länge von  $\vec{v}_1^*$  ( $\vec{v}_i^*$  kontravariante Basis).

↑

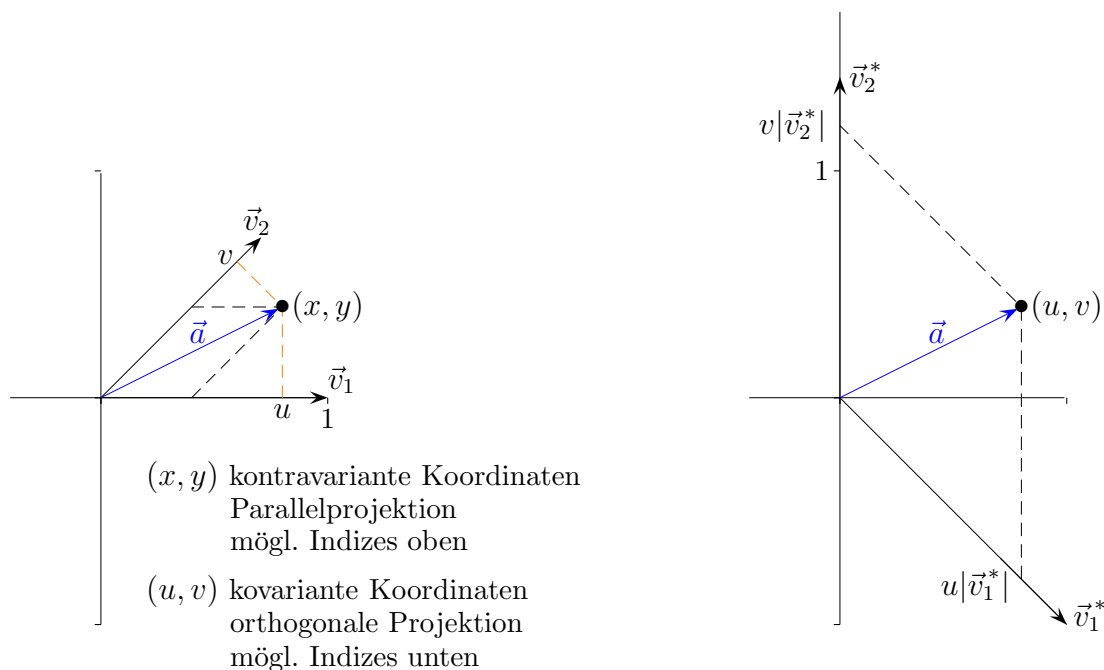
## ↑ Vereinfachter Zusammenhang



$$\vec{v}_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_{\text{kartesisch}} \quad \vec{v}_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^* = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die  $x, y$ -Koordinaten lassen sich nun aus der rechten Grafik direkt entnehmen, da  $\vec{v}_1^*$  normiert wurde ( $|\vec{v}_1^*| = 1$ ). Damit auch wie bisher  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1^* = 1$  gilt, wurde  $\vec{v}_1$  angepasst. Das Vorgehen ist nicht auf das Beispiel beschränkt.

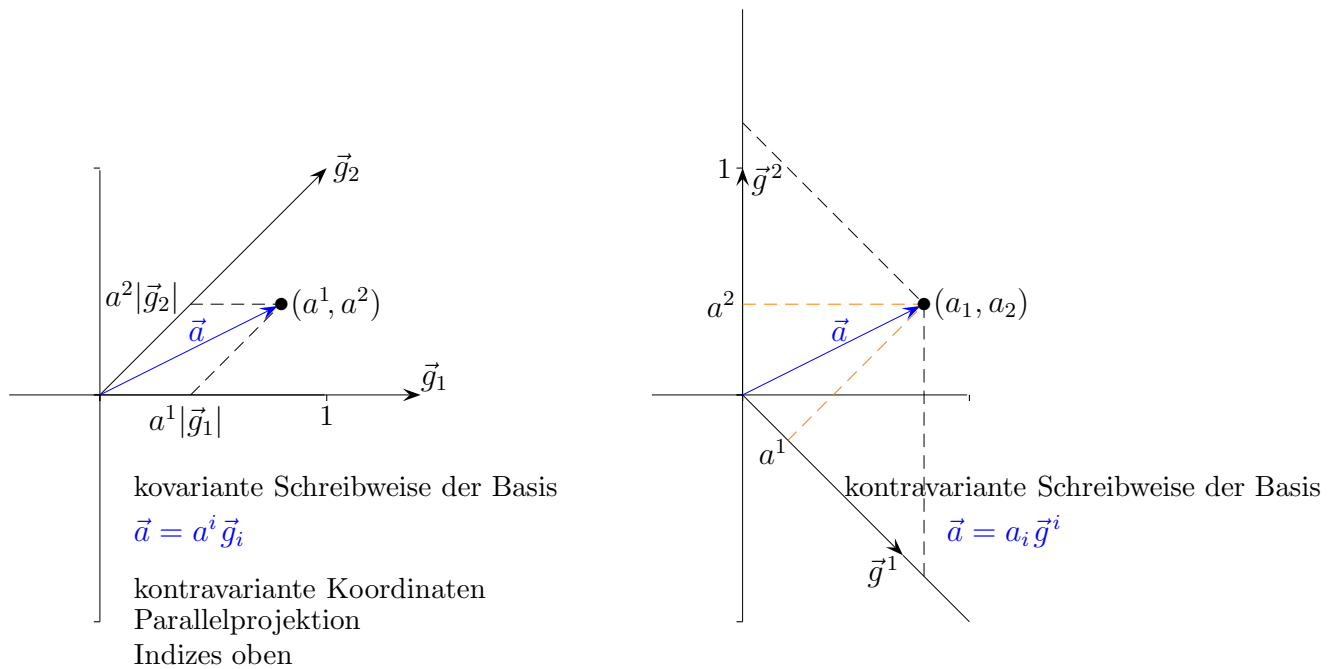
# ↑ Dualität



$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{pmatrix}_{\text{kartesisch}} \quad \vec{v}_1^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2^* = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umgekehrt lassen sich die  $u, v$ -Koordinaten aus der linken Grafik direkt entnehmen, da nun  $\vec{v}_1$  und  $\vec{v}_2$  normiert sind. Es gilt weiterhin  $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1^* = 1$  und  $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2^* = 1$ .

## ↑ Ko- und kontravariant



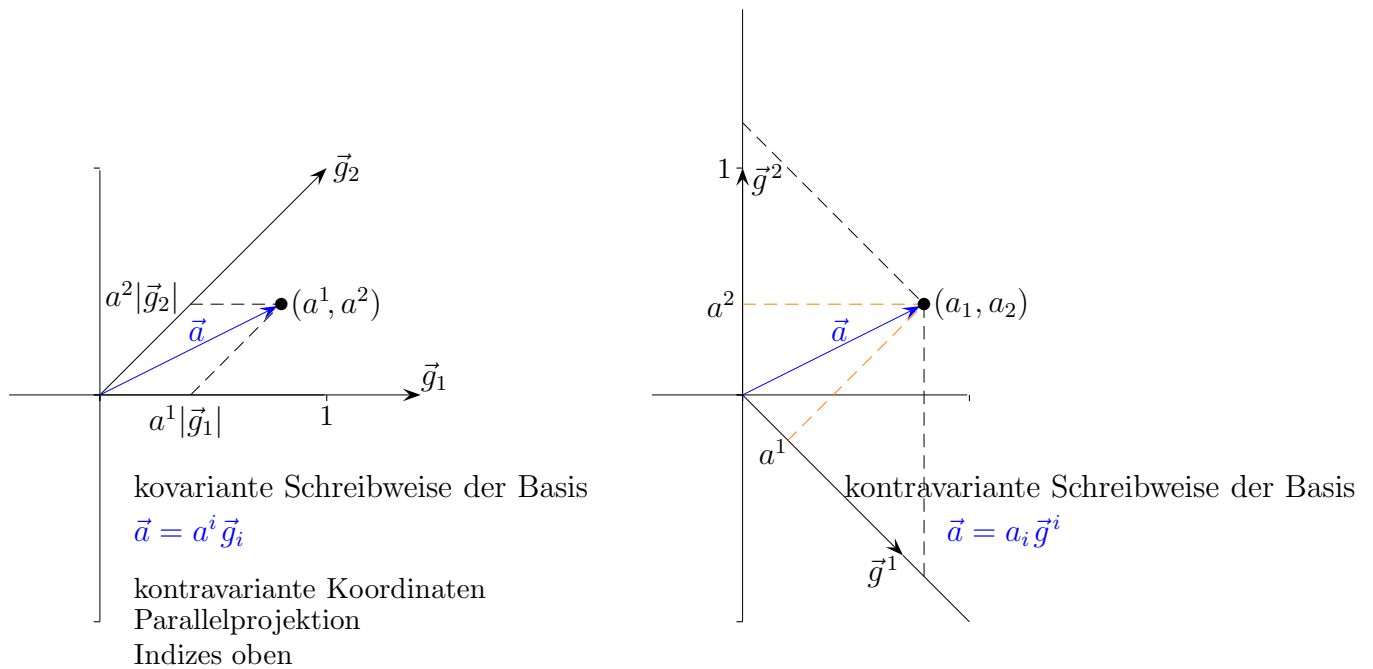
$$\vec{g}_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left( \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{x} \end{pmatrix} \right)_{\text{kartesisch}} \quad \vec{g}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wird die Basis des ursprünglich vorgegebenen Systems in der kovarianten Form  $\vec{g}_i$  (unten indiziert) angegeben, so wird die neu eingeführte duale (oder reziproke) Basis  $\vec{g}^i$  kontravariant geschrieben. Für die kovariante Basis werden die Komponenten eines Vektors kontravariant notiert und umgekehrt.

Index unten: kovariant (v Pfeilspitze nach unten)

Index oben: kontravariant (n Pfeilspitze nach oben)

## ↑ Ko- und kontravariant



$$\vec{g}_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \left( \begin{pmatrix} \phantom{a^1} \\ \phantom{a^2} \end{pmatrix} \right) = \left( \begin{pmatrix} \phantom{a^1} \\ \phantom{a^2} \end{pmatrix} \right)_{\text{kartesisch}} \quad \vec{g}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{g}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Wird die Basis des ursprünglich vorgegebenen Systems in der kovarianten Form  $\vec{g}_i$  (unten indiziert) angegeben, so wird die neu eingeführte duale (oder reziproke) Basis  $\vec{g}^i$  kontravariant geschrieben. Für die kovariante Basis werden die Komponenten eines Vektors kontravariant notiert und umgekehrt. Die Transformationsgleichungen nehmen dann eine besonders prägnante Form an.

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^1 & \vec{g}^1 \cdot \vec{g}^2 \\ \vec{g}^2 \cdot \vec{g}^1 & \vec{g}^2 \cdot \vec{g}^2 \end{pmatrix} \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{g}_1, \vec{g}_2} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{g}^1, \vec{g}^2}$$

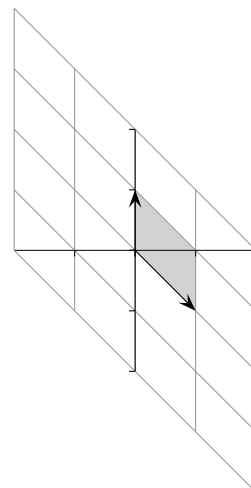
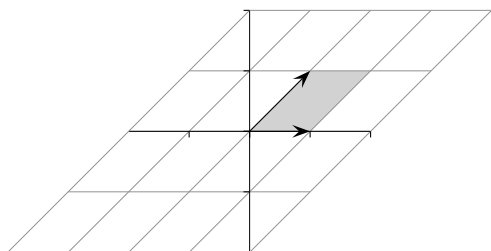
$$a^i = g^{ik} a_k$$

$$a_i = g_{ik} a^k$$

Umkehrung mit  $g_{ik} = \mathcal{A}_{ik}^{-1}$

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{pmatrix}$$

## ↑ Duale Basis ermitteln



Für duale Basen gilt:  $\vec{b}_i \cdot \vec{b}^j = \delta_{ij}$

Nur bei gleichen Indizes ist das Ergebnis 1, sonst 0.

Die duale Basis kann als Lösung eines linearen Gleichungssystems erhalten werden.

Beispiel

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Für den  $\mathbb{R}^3$  kann das Gleichungssystem mit der cramerschen Regel (Multiplikation mit Vektorprodukten  $\vec{b}_i \times \vec{b}_j$ ) gelöst werden.

$$\vec{b}^1 = \frac{\vec{b}_2 \times \vec{b}_3}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}^2 = \frac{\vec{b}_3 \times \vec{b}_1}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}^3 = \frac{\vec{b}_1 \times \vec{b}_2}{(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) \cdot \vec{b}_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

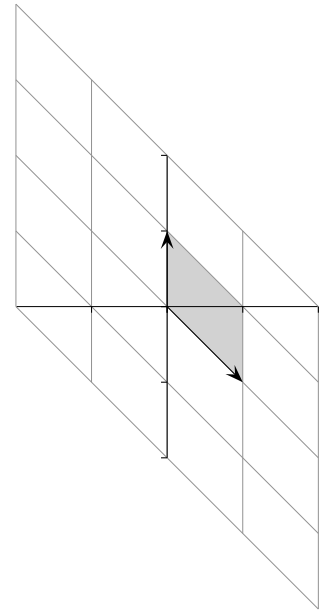
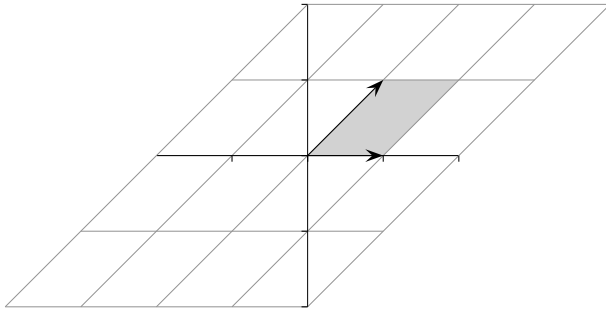
$$\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3} \quad g^{ij} = \vec{b}^i \cdot \vec{b}^j = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3} \quad g_{ij} = (g^{ij})^{-1} = \vec{b}_i \cdot \vec{b}_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{kartesisch}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}_{\text{Basis } \vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3} \quad \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right|_{\text{Basis } \vec{b}^1, \vec{b}^2, \vec{b}^3} = \sqrt{(2, 4, 5) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}} = 3$$

↑

## ↑ Zusammenhänge



$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die  $\vec{b}^i$  können aus den  $\vec{b}_i$  und ihres inversen metrischen Tensors ermittelt werden.

Wir hatten schon das Folgende zusammengetragen,  
siehe Transformation ko- und kontravarianter Vektoren.

$$\begin{aligned} \vec{b}^1 &= a_{11}\vec{b}_1 + a_{21}\vec{b}_2 + a_{31}\vec{b}_3 \\ \vec{b}^2 &= a_{12}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 + a_{32}\vec{b}_3 \\ \vec{b}^3 &= a_{13}\vec{b}_1 + a_{23}\vec{b}_2 + a_{33}\vec{b}_3 \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Da die Matrizen symmetrisch sind gilt:

$$\begin{aligned} \vec{b}^1 &= g^{11}\vec{b}_1 + g^{12}\vec{b}_2 + g^{13}\vec{b}_3 & \vec{b}^i &= g^{ij}\vec{b}_j \\ \vec{b}^2 &= g^{21}\vec{b}_1 + g^{22}\vec{b}_2 + g^{23}\vec{b}_3 \\ \vec{b}^3 &= g^{31}\vec{b}_1 + g^{32}\vec{b}_2 + g^{33}\vec{b}_3 \end{aligned}$$

z.B.

$$\vec{b}^2 = (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

↑