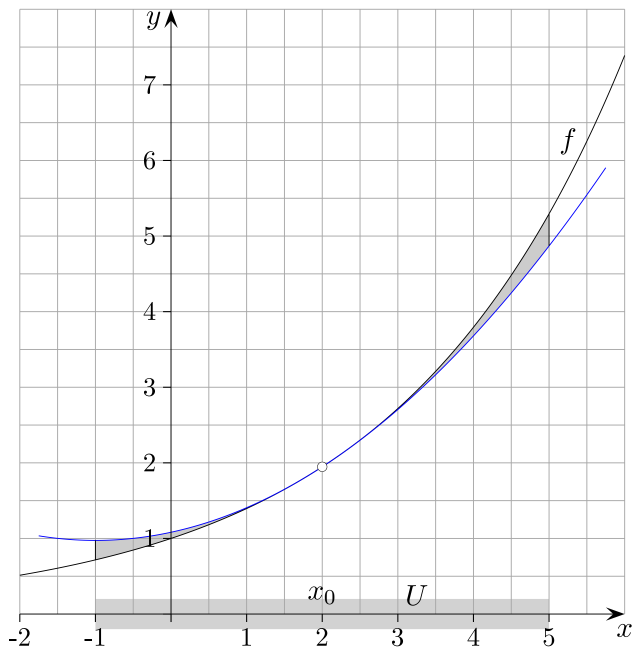
# Satz von Taylor




Wenn $f^{(n+1)}(x)$ in einer Umgebung $U$ von $x_0$ existiert, dann gilt für jedes $x \in U$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ ... \ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R(x)$$

$$|R(x)| \leq \max_{z \in U} \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \right|, \qquad x \in U \qquad \text{oder}$$

$$|R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1}, \qquad x \in U \qquad \text{mit} \quad \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M \quad \text{auf } U$$

Wenn $f^{(n+1)}(x)$ in einer Umgebung $U$ von 0 existiert, dann gilt für jedes $x \in U$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ ... \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R(x)$$

$$|R(x)| \leq \max_{z \in U} \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}x^{n+1} \right|, \qquad x \in U \qquad \text{oder}$$

$$|R(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} \left| x \right|^{n+1}, \qquad x \in U \qquad \text{mit} \quad \left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M \quad \text{auf } U$$

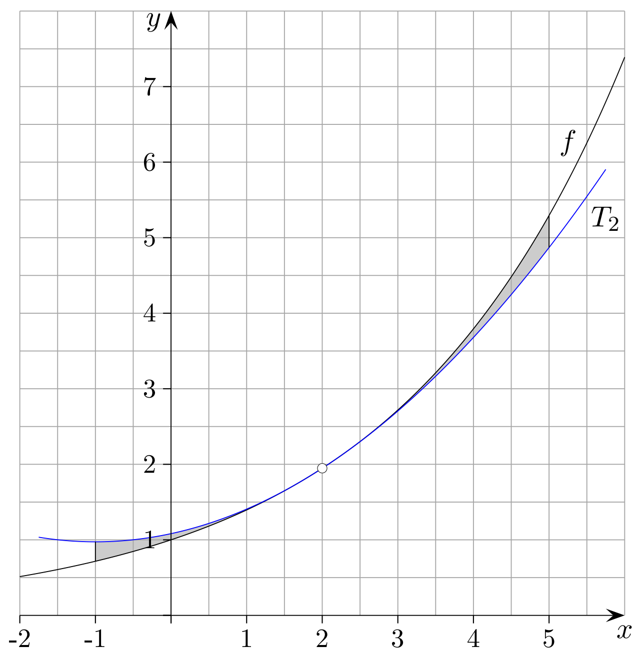
# Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$.

a) Berechnen Sie das $n$-te Taylorpolynom $T_n(x)$ und die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 2$.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler von $T_n(x)$ zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.
Wie groß ist mit dieser Abschätzung die maximale Abweichung bei der Approximation mit $T_2(x)$ auf dem Intervall $1 \leq x \leq 3$?
Wie groß ist der tatsächliche Fehler an der Stelle $x_1 = 3$ von $T_2(x)$ zu $f(x)$?

c) Bis zu welcher Ordnung muss man hier approximieren, um einen Fehler zu erhalten, der auf dem Intervall $1 \leq x \leq 3$ kleiner als $10^{-4}$ ist?




Die Umgebung von $x_0$ wurde hier vergrößert.

# Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{\frac{x}{3}}$.

a) Berechnen Sie das $n$-te Taylorpolynom $T_n(x)$ und die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 2$.

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ ...\ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}$$

$$f^{(n)}(x) = (\tfrac{1}{3})^n e^{\frac{x}{3}}$$

$$T_n(x) = e^{\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}(x-2) + \tfrac{1}{3^2 \cdot 2!}e^{\frac{2}{3}}(x-2)^2 + \tfrac{1}{3^3 \cdot 3!}e^{\frac{2}{3}}(x-2)^3 + \ ...\ + \tfrac{1}{3^n \cdot n!}e^{\frac{2}{3}}(x-2)^n$$

$$T(x) = e^{\frac{2}{3}} + \tfrac{1}{3}e^{\frac{2}{3}}(x-2) + \tfrac{1}{18}e^{\frac{2}{3}}(x-2)^2 + \tfrac{1}{162}e^{\frac{2}{3}}(x-2)^3 + \ ...\ + \tfrac{1}{3^n \cdot n!}e^{\frac{2}{3}}(x-2)^n + \ ...$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler von $T_n(x)$ zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.

$$|\,R(x)\,| \leq \max_{z \in U} \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \right|, \qquad x \in U$$

$$|\,R(x)\,| \leq \frac{M}{(n+1)!}\left|\, x - x_0 \,\right|^{n+1}, \qquad x \in U \qquad \text{mit} \qquad f^{(n+1)}(x) \leq M \quad \text{auf } U$$

$$|\,R(x)\,| \leq \left| \frac{e^{\frac{r}{3}}}{3^{n+1}(n+1)!}(x-2)^{n+1} \right|, \qquad x \in U, \quad r \text{ rechte Grenze von } U$$

Die rechte Seite konvergiert offensichtlich für $n \longrightarrow \infty$ gegen null.
Beachte: $e^x$ ist monoton steigend.

Wie groß ist mit dieser Abschätzung die maximale Abweichung bei der Approximation mit $T_2(x)$ auf dem Intervall $1 \leq x \leq 3$?

$$|\,R(x)\,| \leq \left| \frac{e^1}{162}(x-2)^3 \right| \leq 0{,}0168 \qquad x \in [1, 3]$$

Wie groß ist der tatsächliche Fehler an der Stelle $x_1 = 3$ von $T_2(x)$ zu $f(x)$?

$$|\, f(3) - T_2(3) \,| = 0{,}013$$

c) Bis zu welcher Ordnung muss man hier approximieren, um einen Fehler zu erhalten, der auf dem Intervall $1 \leq x \leq 3$ kleiner als $3 \cdot 10^{-4}$ ist?

$$\frac{e}{3^{n+1}(n+1)!} < 10^{-4}$$

$n = 4$ (Probieren)

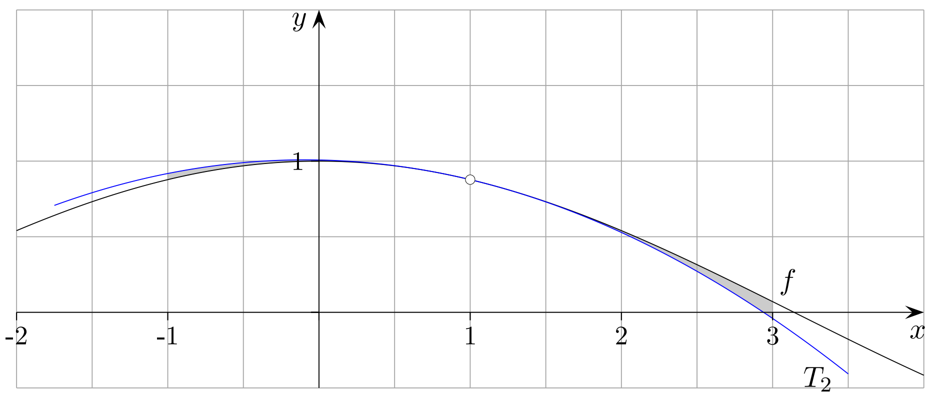
# Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

a) Berechnen Sie das $n$-te Taylorpolynom $T_n(x)$ und die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler von $T_n(x)$ zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.
Wie groß ist mit dieser Abschätzung die maximale Abweichung bei der Approximation mit $T_2(x)$ auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2$?
Wie groß ist der tatsächliche Fehler an der Stelle $x_1 = 2$ von $T_2(x)$ zu $f(x)$?

c) Bis zu welcher Ordnung muss man hier approximieren, um einen Fehler zu erhalten, der auf dem Intervall $0 \leq x \leq 2$ kleiner als $3 \cdot 10^{-5}$ ist?




Die Umgebung von $x_0$ wurde hier vergrößert.

# Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos\frac{x}{2}$.

a) Berechnen Sie das $n$-te Taylorpolynom $T_n(x)$ und die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 1$.

$$T_n(x) \;=\; f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}\,(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}\,(x-x_0)^2 + \;...\; + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$$

$$f''(x) = -\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\cos\frac{x}{2}$$

$$f'''(x) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^3\sin\frac{x}{2}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{(n+1)/2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\sin\frac{x}{2} & n \text{ ungerade} \\[2ex] (-1)^{n/2}\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\cos\frac{x}{2} & n \text{ gerade} \qquad \text{(hier überflüssig)} \end{cases}$$

$$T_n(x) \;=\; \cos\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sin\frac{1}{2}\cdot(x-1) - \frac{1}{8}\cos\frac{1}{2}\cdot(x-1)^2 + \frac{1}{48}\sin\frac{1}{2}\cdot(x-1)^3 + \;...$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler von $T_n(x)$ zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.

$$|\,R(x)\,| \le \max_{z\in U}\left|\,\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}\right|, \qquad x \in U$$

$$|\,R(x)\,| \le \frac{M}{(n+1)!}\,|\,x-x_0\,|^{n+1}, \qquad x\in U \qquad \text{mit} \qquad \left|\,f^{(n+1)}(x)\right| \le M \quad \text{auf } U$$

$$|\,R(x)\,| \le \left|\,\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!}\,(x-1)^{n+1}\right|, \qquad x \in U$$

Die rechte Seite konvergiert offensichtlich für $n \longrightarrow \infty$ gegen null.
Beachte: $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$

Wie groß ist mit dieser Abschätzung die maximale Abweichung bei der Approximation mit $T_2(x)$ auf dem Intervall $0 \le x \le 2$?

$$|\,R(x)\,| \le \left|\,\frac{1}{48}\,(x-1)^3\right| \le 0{,}021\,, \qquad x \in [0,2]$$

Wie groß ist der tatsächliche Fehler an der Stelle $x_1 = 2$ von $T_2(x)$ zu $f(x)$?

$$|\,f(2) - T_2(2)\,| = 0{,}012$$

c) Bis zu welcher Ordnung muss man hier approximieren, um einen Fehler zu erhalten, der auf dem Intervall $0 \le x \le 2$ kleiner als $5\cdot 10^{-5}$ ist?

$$\frac{1}{2^{n+1}(n+1)!} < 3\cdot 10^{-5}$$

$n = 5$ (Probieren)

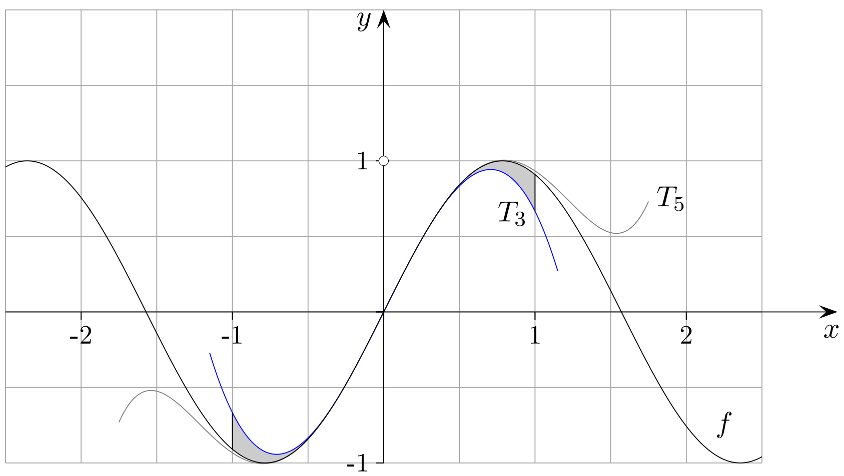
# Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin 2x$.

a) Berechnen Sie das $n$-te Taylorpolynom $T_n(x)$ und die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler von $T_n(x)$ zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.
Wie groß ist mit dieser Abschätzung die maximale Abweichung bei der Approximation mit $T_3(x)$ auf dem Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$?
Wie groß ist der tatsächliche Fehler an der Stelle $x_1 = 0{,}5$ von $T_3(x)$ zu $f(x)$?

c) Bis zu welcher Ordnung muss man hier approximieren, um einen Fehler zu erhalten, der auf dem Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ kleiner als $2 \cdot 10^{-3}$ ist?




Die Umgebung von $x_0$ wurde hier vergrößert.

# Taylor-Entwicklung

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin 2x$.

a) Berechnen Sie das $n$-te Taylorpolynom $T_n(x)$ und die Taylorreihe für die Entwicklungsstelle $x_0 = 0$.

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \,...\, + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + R(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin 2x & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= 2\cos 2x & f'(0) &= 2 \\ f''(x) &= -2^2 \sin 2x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -2^3 \cos 2x & f'''(0) &= -2^3 \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} (-1)^{(n+3)/2}\, 2^n \cos 2x & n \text{ ungerade} \\ \\ (-1)^{(n+4)/2}\, 2^n \sin 2x & n \text{ gerade} \qquad \text{(hier überflüssig)} \end{cases}$$

$$T_n(x) = 2x - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{4}{15}x^5 - \tfrac{8}{315}x^7 ...$$

b) Geben Sie eine Abschätzung für den Fehler von $T_n(x)$ zu $f(x)$ an und zeigen Sie, dass $f$ auf $\mathbb{R}$ durch ihre Taylorreihe dargestellt wird.

$$|\,R(x)\,| \leq \max_{z\in U} \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\,x^{n+1} \right|, \qquad x \in U \qquad \text{oder}$$

$$|\,R(x)\,| \leq \frac{M}{(n+1)!}\,|\,x\,|^{n+1}, \qquad x \in U \qquad \text{mit} \qquad M = 2^{n+1}$$

Die rechte Seite konvergiert offensichtlich für $n \longrightarrow \infty$ gegen null.
Beachte: $|\cos x| \leq 1$

Wie groß ist mit dieser Abschätzung die maximale Abweichung bei der Approximation mit $T_3(x)$ auf dem Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$?

$$|\,R(x)\,| \leq \left| \frac{2}{3}\,x^4 \right| \leq 0{,}042$$

Wie groß ist der tatsächliche Fehler an der Stelle $x_1 = 0{,}5$ von $T_3(x)$ zu $f(x)$?

$$|\,f(0{,}5) - T_3(0{,}5)\,| = 0{,}008$$

c) Bis zu welcher Ordnung muss man hier approximieren, um einen Fehler zu erhalten, der auf dem Intervall $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ kleiner als $2 \cdot 10^{-3}$ ist?

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 0{,}5^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} < 2 \cdot 10^{-3}$$

$n = 5$ (Probieren)