Taylorentwicklung

Brook Taylor (1685-1731)

Für eine ganzrationale Funktion $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ bestimmen wir den Funktionswert und die Ableitungen an der Stelle $x = 0$. Es ist:

$f(0) = a_0$; $f'(0) = a_1$; $f''(0) = 2a_2$; $f'''(0) = 3!\, a_3$; ... ; $f^{(n)}(0) = n!\, a_n$

und wir erhalten die Darstellung:

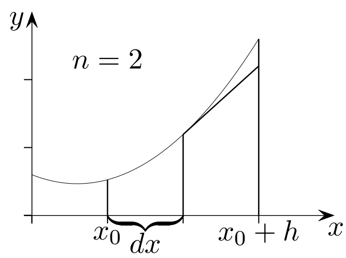
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n$$

Taylor fand 1712 eine Verallgemeinerung. Seine Idee soll nun - vereinfacht - widergegeben werden.

Ein Funktionswert $f(x_0 + h)$ kann mit dem Funktionswert $f(x_0)$ und den Ableitungswerten $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... approximiert werden. Zunächst ist: (genauer $\approx$ statt $=$)

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0)\,dx\,, \qquad dx = h$$

Eine Halbierung des Intervalls $[x_0,\ x_0 + h]$ ergibt:



$$\begin{aligned} f(x_0 + 2\,dx) &= f(x_0 + dx) + f'(x_0 + dx)\,dx\,, \qquad dx = \frac{h}{2} \\ &= f(x_0) + 2\,f'(x_0)\,dx + f''(x_0)\,dx^2 \end{aligned}$$

Das bereits Erhaltene wird eingesetzt, beachte dass auch gilt:

$f'(x_0 + dx) = f'(x_0) + f''(x_0)\,dx$

Für weitere Unterteilungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 3\,dx) &= f(x_0 + 2\,dx) + f'(x_0 + 2\,dx)\,dx\,, \qquad dx = \frac{h}{3} \\ &= f(x_0) + 3\,f'(x_0)\,dx + 3\,f''(x_0)\,dx^2 + f'''(x_0)\,dx^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + 4\,dx) &= f(x_0 + 3\,dx) + f'(x_0 + 3\,dx)\,dx\,, \qquad dx = \frac{h}{4} \\ &= f(x_0) + 4\,f'(x_0)\,dx + 6\,f''(x_0)\,dx^2 + 4\,f'''(x_0)\,dx^3 + f^{(4)}(x_0)\,dx^4 \end{aligned}$$

Taylor erkannte - und wir nun auch - , dass die Koeffizienten wie die Zahlen im Pascalschen Dreieck gebildet werden:

$$\begin{array}{lccccccccc} n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\ n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \textit{sonst}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n\,(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Mit $dx = \dfrac{h}{n}$ und $\dbinom{n}{k} \cdot dx^k \approx \dfrac{1}{k!}$ für großes n entsteht die Taylorentwicklung der Funktion f:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)\,h + \frac{f''(x_0)}{2!}\,h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,h^3 + \ldots$$

Für $x_0 = 0$ erhält man:

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 + \ldots$$

Um die Herleitung zu vervollständigen, wäre noch

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

zu beweisen (warum?).

Taylor untersuchte weder die Konvergenz seiner Reihe, noch führte er eine Restgliedabschätzung durch.

Für eine mögliche Restgliedabschätzung siehe: *Fehlerabschätzung für Taylorpolynome der e-Funktion, Differential- und Integralrechnung, Teil 2.*