

Taylorentwicklung

Brook Taylor (1685-1731)

Für eine ganzrationale Funktion $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ bestimmen wir den Funktionswert und die Ableitungen an der Stelle $x = 0$. Es ist:

$$f(0) = a_0; \quad f'(0) = a_1; \quad f''(0) = 2a_2; \quad f'''(0) = 3!a_3; \quad \dots; \quad f^{(n)}(0) = n!a_n$$

und wir erhalten die Darstellung:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

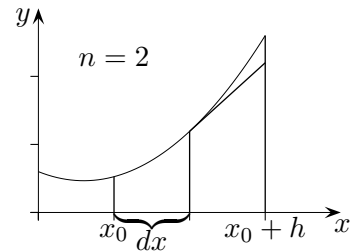
Taylor fand 1712 eine Verallgemeinerung. Seine Idee soll nun - vereinfacht - wiedergegeben werden.

Ein Funktionswert $f(x_0 + h)$ kann mit dem Funktionswert $f(x_0)$ und den Ableitungswerten $f'(x_0), f''(x_0), \dots$ approximiert werden. Zunächst ist: (genauer \approx statt $=$)

$$f(x_0 + dx) = f(x_0) + f'(x_0) dx, \quad dx = h$$

Eine Halbierung des Intervalls $[x_0, x_0 + h]$ ergibt:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2 dx) &= f(x_0 + dx) + f'(x_0 + dx) dx, & dx &= \frac{h}{2} \\ &= f(x_0) + 2 f'(x_0) dx + f''(x_0) dx^2 \end{aligned}$$



Das bereits Erhaltene wird eingesetzt, beachte dass auch gilt:

$$f'(x_0 + dx) = f'(x_0) + f''(x_0) dx$$

Für weitere Unterteilungen erhalten wir:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 3 dx) &= f(x_0 + 2 dx) + f'(x_0 + 2 dx) dx, & dx &= \frac{h}{3} \\ &= f(x_0) + 3 f'(x_0) dx + 3 f''(x_0) dx^2 + f'''(x_0) dx^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x_0 + 4 dx) &= f(x_0 + 3 dx) + f'(x_0 + 3 dx) dx, & dx &= \frac{h}{4} \\ &= f(x_0) + 4 f'(x_0) dx + 6 f''(x_0) dx^2 + 4 f'''(x_0) dx^3 + f^{(4)}(x_0) dx^4 \end{aligned}$$

Taylor erkannte - und wir nun auch -, dass die Koeffizienten wie die Zahlen im Pascalschen Dreieck gebildet werden:

$n = 1$	1	1		$\binom{n}{0} = 1$	sonst	
$n = 2$	1	2	1			
$n = 3$	1	3	3	1	$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$	
$n = 4$	1	4	6	4	1	
	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$	$= \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Mit $dx = \frac{h}{n}$ und $\binom{n}{k} \cdot dx^k \approx \frac{1}{k!}$ für großes n entsteht die Taylorentwicklung der Funktion f :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} h^3 + \dots \quad \text{Für } x_0 = 0 \text{ erhält man:}$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

Um die Herleitung zu vervollständigen, wäre noch

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

zu beweisen (warum?).

Taylor untersuchte weder die Konvergenz seiner Reihe, noch führte er eine Restgliedabschätzung durch.

Für eine mögliche Restgliedabschätzung siehe: *Fehlerabschätzung für Taylorpolynome der e-Funktion, Differential- und Integralrechnung, Teil 2.*