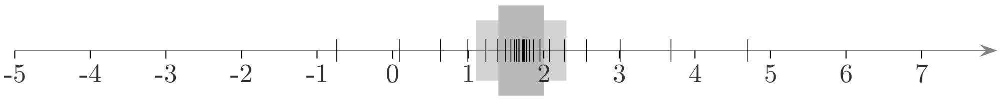
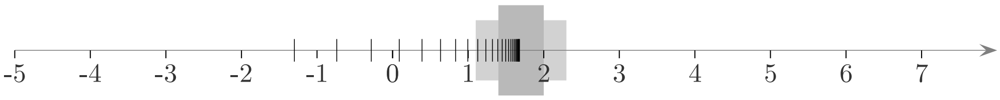
Supremum, Limes superior

Wir betrachten eine Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, \ldots.$
Falls ein Grenzwert a vorhanden ist, tummeln sich die Werte um a.

Zu beliebig (kleiner) Umgebung von a muss es jeweils eine Stelle n_0 in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder in dieser Umgebung liegen.
Hierbei muss a kein Folgenglied sein.

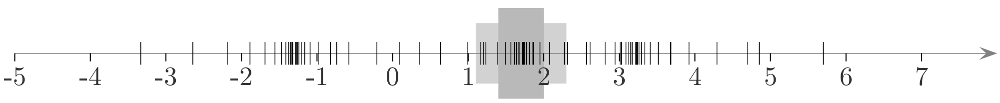


Eine nach oben beschränkte monoton wachsende Folge hat einen Grenzwert.



Dieser Grenzwert ist die kleinste obere Schranke (Supremum) der Zahlen der Folge.
Das Supremum muss im Gegensatz zum Maximum kein Element der Folge sein.

Eine (nach oben und unten) beschränkte Folge muss zwar keinen Grenzwert haben, jedoch (mindestens) einen Häufungspunkt. Beweisidee: Das Intervall wird fortgesetzt halbiert und jeweils diejenige Hälfte mit unendlich vielen Folgengliedern ausgewählt. Dieses Vorgehen schachtelt einen Häufungspunkt ein. In seinen (noch so kleinen) Umgebungen liegen jeweils unendlich viele Folgenglieder.



Unter diesen Häufungspunkten gibt es einen größten, den Limes superior s.
Gegen ihn strebt eine monoton fallende Teilfolge, $s = \lim\limits_{n\to\infty} \big(\sup\ \{a_n \mid k \geq n\}\big)$.
Hierauf basiert eine häufig verwendete Definition des Limes superiors, die gut geeignet ist, einen überfüllten Hörsaal zu lichten, $s = \inf\big\{\sup\ \{a_n \mid k \geq n\}\big\}$. Infimum, inf, größte untere Schranke
Äquivalent: Rechts von jeder Umgebung von s befinden sich nur endlich viele Folgenelemente.