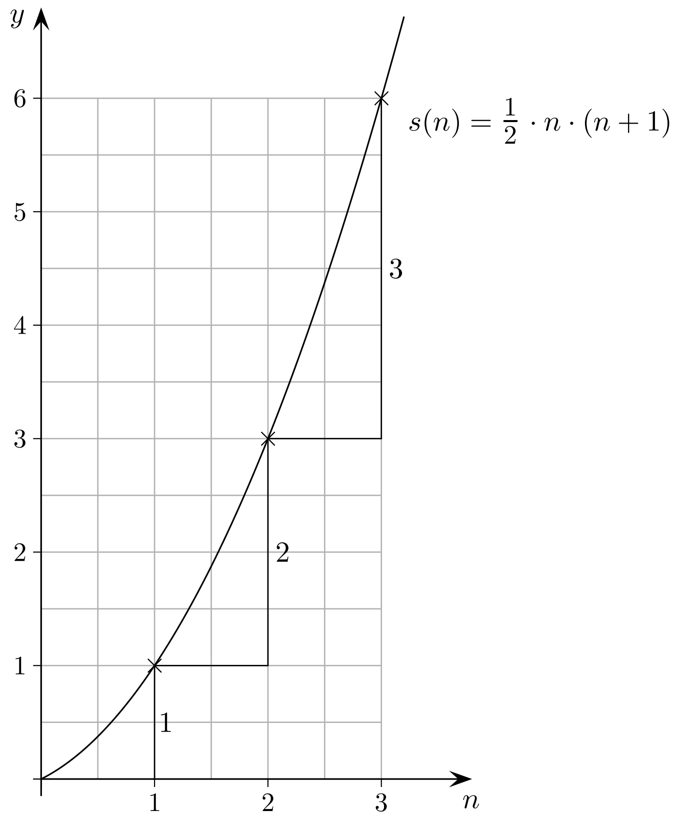
Summe der Quadratzahlen

Als Vorübung ermitteln wir eine Summenformel für

$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$



Ansatz $s(n) = an^2 + bn$

Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & s(1) & = & 1 \\ 2. & s(2) & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 1. & a + b & = & 1 \\ 2. & 4a + 2b & = & 3 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

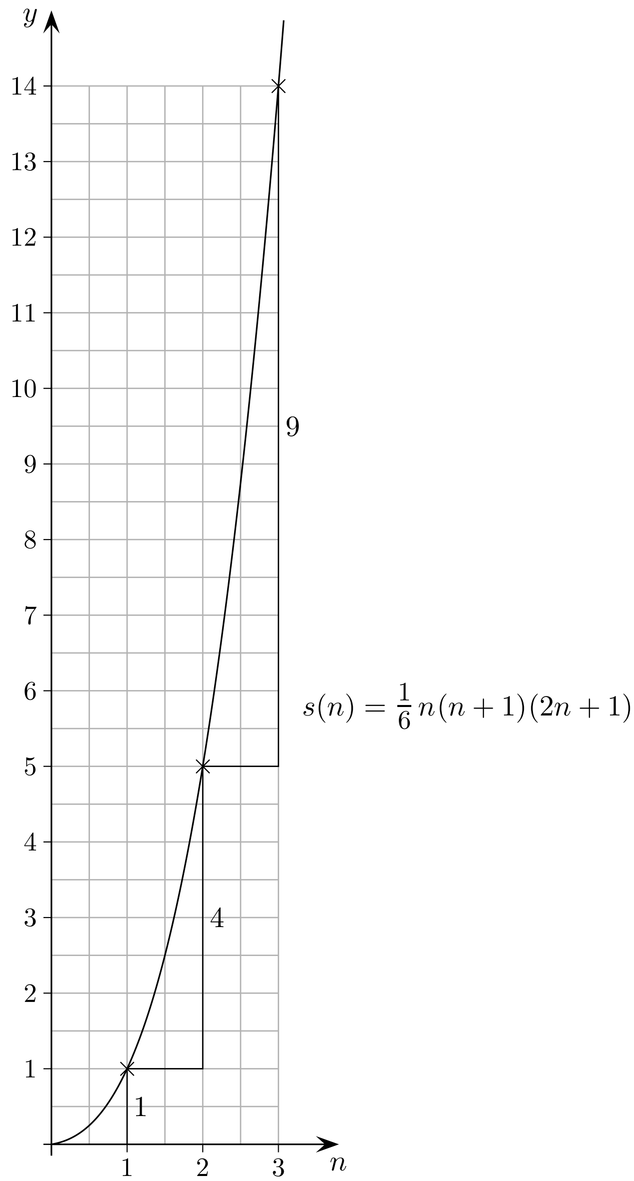
Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \ldots = n$ erbracht ($\frac{1}{2}n$ ausklammern).

Roolfs

Summe der Quadratzahlen

$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$



Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn$

Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & s(1) & = & 1 \\ 2. & s(2) & = & 5 \\ 3. & s(3) & = & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 1. & a + b + c & = & 1 \\ 2. & 8a + 4b + 2c & = & 5 \\ 3. & 27a + 9b + 3c & = & 14 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \ldots = n^2$ erbracht ($\frac{1}{6}n$ ausklammern).

Roolfs

Summe der Quadratzahlen   alternativ

$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn$

Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass gilt:

$$s(n) - s(n-1) = n^2$$

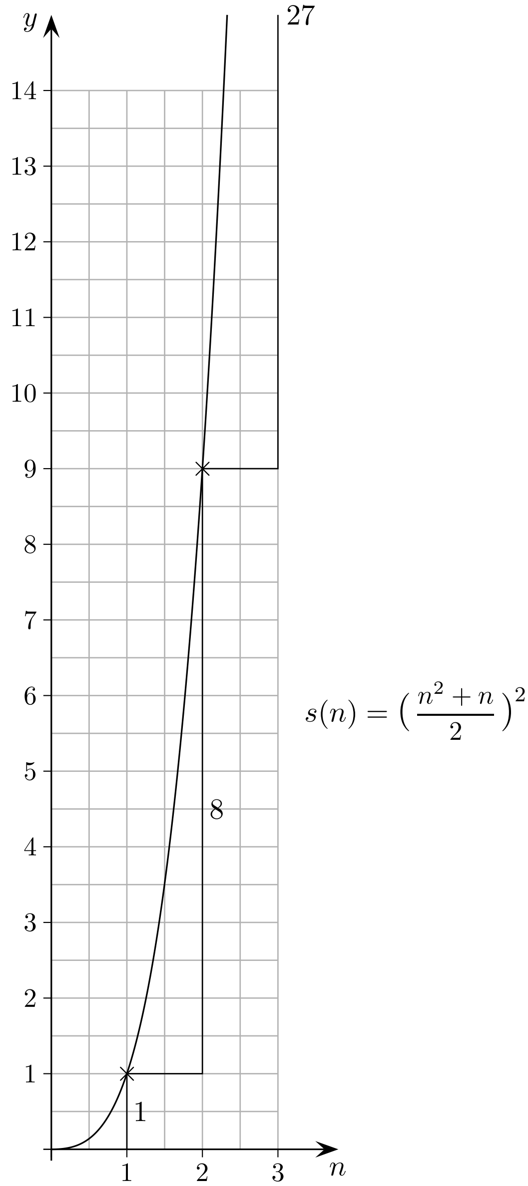
$$\iff \quad 3an^2 + (2b - 3a)n + a - b + c = n^2$$

Ein Koeffizientenvergleich erbringt mit $s(1) = 1$ die Lösung .

Die Summenformel lautet somit: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \; = \; \frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$

Summe der Kubikzahlen

$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$



Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$

Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & s(1) & = & 1 \\ 2. & s(2) & = & 9 \\ 3. & s(3) & = & 36 \\ 4. & s(4) & = & 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & a + b + c + d & = & 1 \\ 2. & 16a + 8b + 4c + 2d & = & 9 \\ 3. & 81a + 27b + 9c + 3d & = & 36 \\ 4. & 256a + 64b + 16c + 4d & = & 100 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \ldots = n^3$ erbracht.

Roolfs

Summe der Kubikzahlen   alternativ

$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$

Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass gilt:

$$s(n) - s(n-1) = n^3$$

$$\iff \quad 4an^3 + (3b - 6a)n^2 + (4a - 3b + 2c)n - a + b - c + d = n^3$$

Ein Koeffizientenvergleich erbringt mit $s(1) = 1$ die Lösung.

Die Summenformel lautet somit: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2\,(n+1)^2$

Roolfs