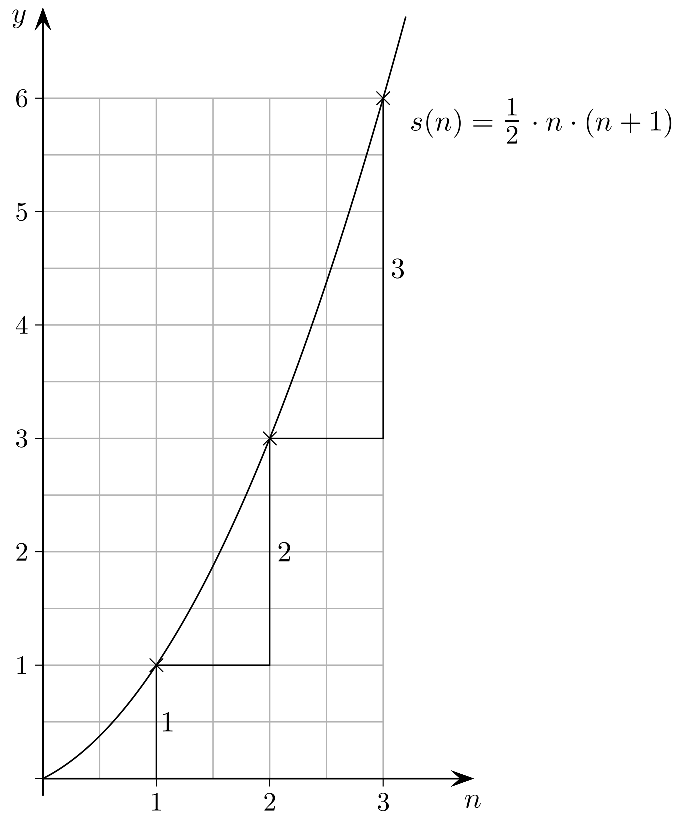
Potenzsummen

↑ Summenformel $s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$

Als Vorübung ermitteln wir eine Summenformel für

$s_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$



Ansatz $s(n) = an^2 + bn$

Bedingungen:

$$\begin{array}{lrcl} 1. & s(1) & = & 1 \\ 2. & s(2) & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{lrcl} 1. & a + b & = & 1 \\ 2. & 4a + 2b & = & 3 \end{array}$$

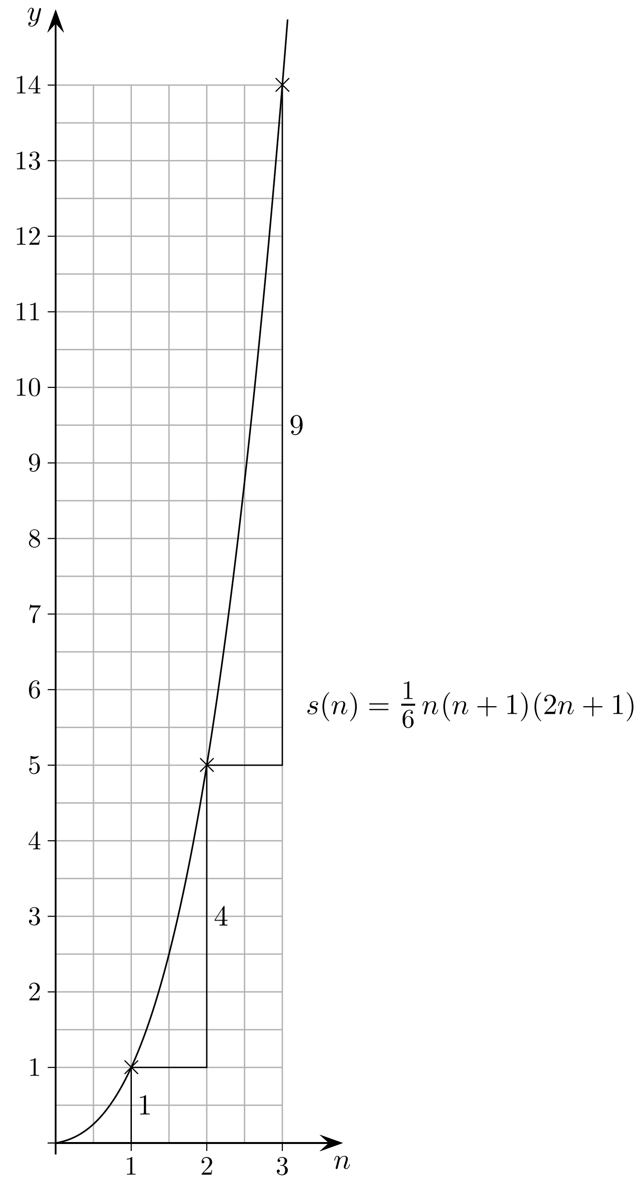
Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \ldots = n$ erbracht ($\frac{1}{2}n$ ausklammern).

↑ Summe der Quadratzahlen

$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$



Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn$

Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & s(1) & = & 1 \\ 2. & s(2) & = & 5 \\ 3. & s(3) & = & 14 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 1. & a + b + c & = & 1 \\ 2. & 8a + 4b + 2c & = & 5 \\ 3. & 27a + 9b + 3c & = & 14 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \;=\; \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \ldots = n^2$ erbracht ($\frac{1}{6}n$ ausklammern).

↑ Summe der Quadratzahlen   alternativ

$s_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

Ansatz $s(n) = an^3 + bn^2 + cn$

Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass die vollständige Induktion über n durchführbar ist, dass also gilt:

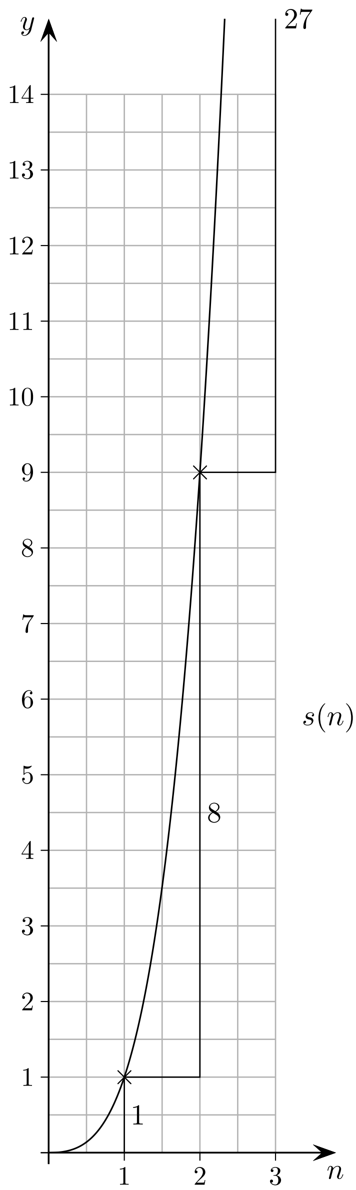
$$s(n) - s(n-1) = n^2$$
$$\iff \quad 3an^2 + (2b - 3a)n + a - b + c = n^2$$

Ein Koeffizientenvergleich erbringt mit $s(1) = 1$ die Lösung .

Die Summenformel lautet somit: $s(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \; = \; \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

↑ Summe der Kubikzahlen

$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$



$s(n) = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2$

Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$

Bedingungen:

$$\begin{array}{rrcl} 1. & s(1) & = & 1 \\ 2. & s(2) & = & 9 \\ 3. & s(3) & = & 36 \\ 4. & s(4) & = & 100 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} 1. & a + b + c + d & = & 1 \\ 2. & 16a + 8b + 4c + 2d & = & 9 \\ 3. & 81a + 27b + 9c + 3d & = & 36 \\ 4. & 256a + 64b + 16c + 4d & = & 100 \end{array}$$

Die Funktion lautet: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Dies könnte die gesuchte Summenformel sein.

Der Nachweis wird durch $s(n) - s(n-1) = \ldots = n^3$ erbracht.

↑ Summe der Kubikzahlen alternativ

$s_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

Ansatz $s(n) = an^4 + bn^3 + cn^2 + dn$

Die Koeffizienten sind so zu wählen, dass die vollständige Induktion über n durchführbar ist, dass also gilt:

$$\begin{aligned} s(n) - s(n-1) &= n^3 \\ \iff \quad 4an^3 + (3b - 6a)n^2 + (4a - 3b + 2c)n - a + b - c + d &= n^3 \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich erbringt mit $s(1) = 1$ die Lösung.

Die Summenformel lautet somit: $s(n) = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

Beachtenswert ist, dass die Potenzsummenformeln mit dem Ansatz der vollständigen Induktion erhalten und gleichzeitig bewiesen werden können.

Die Eigenschaft $\frac{1}{k+1}\big(B_{k+1}(n) - B_{k+1}(n-1)\big) = n^k$ der Bernoulli-Polynome (Grad $k+1$, siehe folgende Seiten) rechtfertigt den Ansatz.

Faulhaber 1631, Fermat, Jakob Bernoulli und Leibniz unter anderen entwickelten Formeln für die Summe aufeinanderfolgender k-ter Potenzen.

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i && \text{Wir gehen von der Binomialformel aus.}\\
(m+1)^{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} m^{k+1-i}\\
(m+1)^{k+1} - m^{k+1} &= \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k+1}{i} m^{k+1-i}\\
(m+1)^{k+1} - m^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} m^{j} && \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad \binom{k+1}{i} = \binom{k+1}{k+1-i}
\end{aligned}
$$

$m = 1, 2, 3, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
(1+1)^{k+1} - 1^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} 1^{j}\\
(2+1)^{k+1} - 2^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} 2^{j}\\
(3+1)^{k+1} - 3^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} 3^{j}\\
&\ldots && \text{Summiere die rechte und linke Seite,}\\
(n+1)^{k+1} - n^{k+1} &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} n^{j} && \text{links liegt eine Teleskopsumme vor.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{j=0}^{k} \binom{k+1}{j} S_j(n) && \text{mit} \quad S_j(n) = 1^j + 2^j + 3^j + \ldots n^j\\
&= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n) + \binom{k+1}{k} S_k(n) && \binom{k+1}{k} = k+1
\end{aligned}
$$

$$
S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left((n+k)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} S_j(n)\right) \qquad \text{Rekursionsformel}
$$

$$
\begin{aligned}
S_0(n) &= 1 + 1 + \ldots + 1 = n\\
S_1(n) &= 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n\\
S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n\\
S_3(n) &= \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 + 0n\\
S_4(n) &= \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 + 0n^2 - \tfrac{1}{30}n
\end{aligned}
$$

$\uparrow$ Bernoulli-Zahlen

Besonders übersichtlich ist die Summenformel bei Verwendung der Bernoulli-Zahlen (der zweiten Art).

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k =$$

$$\frac{1}{k+1}\left[\binom{k+1}{0}B_0 n^{k+1} + \binom{k+1}{1}B_1 n^k + \binom{k+1}{1}B_2 n^{k-1} + \binom{k+1}{1}B_3 n^{k-2} + \ldots + \binom{k+1}{k}B_k n\right]$$

$$B_0 = 1,\ B_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ \ldots$$

Die B_m sind rekursiv definiert.

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_m &= 1 - \frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}B_i \end{aligned}$$

In der übersichtlichen formalen Darstellung $(B-1)^m = B^m \ (m \neq 1)$ sind die Potenzen von B als die entsprechend indizierten Bernoulli-Zahlen zu interpretieren. Genauer (Definition):
$\underline{(B-1)^m} = (B-1)^m$ mit B^i ersetzt durch B_i. Den Unterstrich lassen wir weg.

$$\begin{aligned} B^0 &= 1 \\ (B-1)^2 &= B^2 \\ B^2 - 2B^1 + 1 &= B^2 && \Longrightarrow \quad B^1 = \frac{1}{2} \\ (B-1)^3 &= B^3 \\ B^3 - 3B^2 + 3B^1 - 1 &= B^3 && \Longrightarrow \quad B^2 = \frac{1}{6} \\ (B-1)^4 &= B^4 \\ B^4 - 4B^3 + 6B^2 - 4B^1 + 1 &= B^4 && \Longrightarrow \quad B^3 = 0 \\ (B-1)^5 &= B^5 \\ B^5 - 5B^4 + 10B^3 - 10B^2 + 5B^1 - 1 &= B^4 && \Longrightarrow \quad B^4 = -\frac{1}{30} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (10+B)^{k+1} &= 10^{k+1} + \binom{k+1}{1}10^k B^1 + \binom{k+1}{2}10^{k-1}B^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}10B^k + B^{k+1} \\ (9+B)^{k+1} &= (10 + (B-1))^{k+1} \\ &= 10^{k+1} + \binom{k+1}{1}10^k (B-1)^1 + \binom{k+1}{2}10^{k-1}(B-1)^2 + \ldots + \binom{k+1}{k}10(B-1)^k + (B-1)^{k+1} \end{aligned}$$

$$(10+B)^{k+1}-(9+B)^{k+1} = (k+1)10^k$$

Subtraktion, sämtliche Summanden sind bis auf die blau gefärbten wegen $(1-B)^m = B^m$ gleich

Nun addieren wir 10 dieser Gleichungen, um den Zusammenhang aufzudecken.

$$\begin{aligned}
(10+B)^{k+1}-(9+B)^{k+1} &= (k+1)10^k \\
(9+B)^{k+1}-(8+B)^{k+1} &= (k+1)9^k \\
(8+B)^{k+1}-(7+B)^{k+1} &= (k+1)8^k \\
&\dots \\
(2+B)^{k+1}-(1+B)^{k+1} &= (k+1)2^k \\
(1+B)^{k+1}-B^{k+1} &= (k+1)1^k
\end{aligned}$$

Summiere die rechte und linke Seite, links liegt eine Teleskopsumme vor.

$$(10+B)^{k+1}-B^{k+1} = (k+1)(1^k+2^k+3^k+\ldots+9^k+10^k)$$

$$1^k+2^k+3^k+\ldots+9^k+10^k = \tfrac{(10+B)^{k+1}-B^{k+1}}{k+1} \qquad (\text{für } n=10)$$

$$= \frac{1}{k+1}\left[\binom{k+1}{0}B_0n^{k+1}+\binom{k+1}{1}B_1n^k+\binom{k+1}{2}B_2n^{k-1}+\binom{k+1}{3}B_3n^{k-2}+\ldots+\binom{k+1}{k}B_kn\right]$$

↑ Bernoulli-Zahlen der ersten Art

Die Summenformeln können auch als Polynome in $n+1$ geschrieben werden.

Die einfache Umrechnung lautet: $S_k(n+1) = S_k(n) + (n+1)^k$

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= 1 + 2 + \ldots + n = \tfrac{1}{2}(n+1)^2 - (n+1) \\
S_2(n) &= 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \tfrac{1}{3}(n+1)^3 - \tfrac{1}{2}(n+1)^2 + \tfrac{1}{4}(n+1) \\
S_3(n) &= \tfrac{1}{4}(n+1)^4 - \tfrac{1}{2}(n+1)^3 + \tfrac{1}{4}(n+1)^2
\end{aligned}$$

allgemein $\qquad S_k(n) = S_k(n+1) - (n+1)^k$

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k =$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big[\binom{k+1}{0}B_0(n+1)^{k+1} + \binom{k+1}{1}B_1(n+1)^k + \binom{k+1}{2}B_2(n+1)^{k-1} + \binom{k+1}{3}B_3(n+1)^{k-2} +$$

$$\ldots + \binom{k+1}{k}B_k(n+1)\Big] - (n+1)^k \qquad B_1 = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big[\binom{k+1}{0}B_0(n+1)^{k+1} + \binom{k+1}{1}B_1'(n+1)^k + \binom{k+1}{2}B_2(n+1)^{k-1} + \binom{k+1}{3}B_3(n+1)^{k-2} +$$

$$\ldots + \binom{k+1}{k}B_k(n+1)\Big] \qquad \text{Terme mit } (n+1)^k \text{ zusammengefasst, } B_1' = B_1 - 1 = -\frac{1}{2}$$

In dieser Summenformel werden die Bernoulli-Zahlen der ersten Art verwendet.

$$B_0 = 1,\ B_1' = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ \ldots$$

Die B_m sind rekursiv definiert (statt B' wieder B).

$$\begin{aligned}
B_0 &= 1 \\
B_m &= -\frac{1}{m+1}\sum_{i=0}^{m-1}\binom{m+1}{i}B_i
\end{aligned}$$

In der übersichtlichen formalen Darstellung $(B+1)^m = B^m$ $(m \neq 1)$ sind die Potenzen von B als die entsprechend indizierten Bernoulli-Zahlen zu interpretieren. Genauer (Definition): $\underline{(B+1)^m} = (B+1)^m$ mit B^i ersetzt durch B_i. Den Unterstrich lassen wir weg.

$$\begin{aligned}
B^0 &= 1 \\
(B+1)^2 &= B^2 \\
B^2 + 2B^1 + 1 &= B^2 \qquad \Longrightarrow \qquad B^1 = -\frac{1}{2} \\
(B+1)^3 &= B^3 \\
B^3 + 3B^2 + 3B^1 + 1 &= B^3 \qquad \Longrightarrow \qquad B^2 = \frac{1}{6} \\
(B+1)^4 &= B^4 \\
B^4 + 4B^3 + 6B^2 + 4B^1 + 1 &= B^4 \qquad \Longrightarrow \qquad B^3 = 0 \\
(B+1)^5 &= B^5 \\
B^5 + 5B^4 + 10B^3 + 10B^2 + 5B^1 + 1 &= B^4 \qquad \Longrightarrow \qquad B^4 = -\frac{1}{30}
\end{aligned}$$

ohne Beweis sei erwähnt

$$1^k + 2^k + \ldots + n^k =$$

$$= \frac{1}{k+1}\Big[\binom{k+1}{0}B_0 n^{k+1} - \binom{k+1}{1}B_1 n^k + \binom{k+1}{2}B_2 n^{k-1} - \binom{k+1}{3}B_3 n^{k-2} + \ldots + (-1)^k \binom{k+1}{k}B_k n\Big]$$

↑ Bernoulli-Polynome

Hierunter möchte man Polynome der Form

$$B_k(x) \;=\; B_0 x^k + \binom{k}{1} B_1 x^{k-1} + \binom{k}{2} B_2 x^{k-2} + \ldots \binom{k}{k-1} B_{k-1} x + B_k$$

verstehen. Charakterisierende Eigenschaften
liegen der rekursiven Definition der Polynome $B_k(x)$ zugrunde.

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1 \\ B_k'(x) &= k B_{k-1}(x) \\ \int_0^1 B_k(x)\,\mathrm{d}x &= 0 \qquad\qquad \text{gleichgroße Flächen ober- und unterhalb der } x\text{-Achse} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1'(x) &= 1 \\ B_1(x) &= x + C \\ \int_0^1 B_1(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \qquad \Longrightarrow C = -\tfrac{1}{2} \qquad\qquad B_1(x) = x - \tfrac{1}{2} \\ B_2'(x) &= 2(x - \tfrac{1}{2}) \\ B_2(x) &= x^2 - x + C \\ \int_0^1 B_2(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \qquad \Longrightarrow C = \tfrac{1}{6} \qquad\qquad B_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6} \qquad\qquad B_2'(x) = 2B_1'(x) \\ B_3'(x) &= 3(x^2 - x + \tfrac{1}{6}) \\ B_3(x) &= x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x + C \\ \int_0^1 B_3(t)\,\mathrm{d}t &= 0 \qquad \Longrightarrow C = 0 \qquad\qquad B_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x \qquad\qquad B_3'(x) = 3B_2'(x) \end{aligned}$$

usw.

Zur Polynomfolge $B_k(x)$ sei eine Zahlenfolge durch $B_k = B_k(0)$ definiert, also

$B_0 = 1,\ B_1 = -\dfrac{1}{2},\ B_2 = \dfrac{1}{6},\ B_3 = 0, \ldots$

Die rekursive Definition für $B_k(x)$ wird zeigen, dass dies die schon eingeführten Bernoulli-Zahlen sind.

$$\begin{aligned} B_1(x) &= B_0 x + B_1 \\ B_2(x) &= B_0 x^2 + \binom{2}{1} B_1 x + B_2 \\ B_3(x) &= B_0 x^3 + \binom{3}{1} B_1 x^2 + \binom{3}{2} B_2 x + B_3 \end{aligned}$$

Die Vermutung

$$\begin{aligned} B_k(x) &= B_0 x^k + \binom{k}{1} B_1 x^{k-1} + \binom{k}{2} B_2 x^{k-2} + \dots \binom{k}{k-1} B_{k-1} x + B_k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i\, x^{k-i}, \end{aligned}$$

wird durch vollständige Induktion von $k-1$ auf k bewiesen, $k=1$ ist erfüllt.

$$\begin{aligned} B_k(x) &= k \int_0^x B_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t + B_k && \text{Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung} \\ &= k \int_0^x \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} B_i\, t^{k-1-i}\,\mathrm{d}t + B_k \\ &= k \sum_{i=0}^{k-1} \left[\binom{k-1}{i} B_i \int_0^x t^{k-1-i}\,\mathrm{d}t \right] + B_k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} k \binom{k-1}{i} \frac{1}{k-i}\, B_i x^{k-i} + B_k \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} B_i x^{k-i} + B_k \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i x^{k-i} \qquad \square \end{aligned}$$

In der formalen Darstellung $B_k(x) = (B+x)^k$ sind die Potenzen von B durch die entsprechend indizierten Bernoulli-Zahlen zu ersetzen.

Weiterhin folgt $\quad B_k(1) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} B_i \quad$ für $k \neq 1$, $\quad B_k(1) = k \underbrace{\int_0^1 B_{k-1}(t)\,\mathrm{d}t}_{0} + B_k \quad$ für $k \geq 2$

k durch $k+1$ ersetzt ergibt

$$\begin{aligned} B_{k+1} &= \sum_{i=0}^{k+1} \binom{k+1}{i} B_i \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} B_i + (k+1) B_k + B_{k+1} && \text{für } k \geq 1 \end{aligned}$$

Daraus folgt die rekursive Formel

$$B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k+1}{i} B_i \qquad \text{für } k \geq 1$$

↑ Potenzsumme

$$\begin{aligned}
B_1(x+1) - B_1(x) &= 1 \\
B_2(x+1) - B_2(x) &= 2x \\
B_3(x+1) - B_3(x) &= 3x^2
\end{aligned}$$

Die Vermutung

$$B_k(x+1) - B_k(x) = k\,x^{k-1} \qquad \text{für } k \geq 1$$

- sie führt uns zur Potenzsummenformel - wird durch vollständige Induktion nachgewiesen.

$$\begin{aligned}
B_k(x+1) - B_k(x) &= k\,x^{k-1} && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) &= \int_0^x \big[B'_{k+1}(t+1) - B'_{k+1}(t)\big]\,\mathrm{d}t \\
&= (k+1)\int_0^x \big[B_k(t+1) - B_k(t)\big]\,\mathrm{d}t && B'_k(x) = kB_{k-1}(x) \\
&= (k+1)\int_0^x k\,t^{k-1}\,\mathrm{d}t \\
&= (k+1)\,x^k
\end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ gilt damit $\quad B_{k+1}(i+1) - B_{k+1}(i) = (k+1)\,i^k$

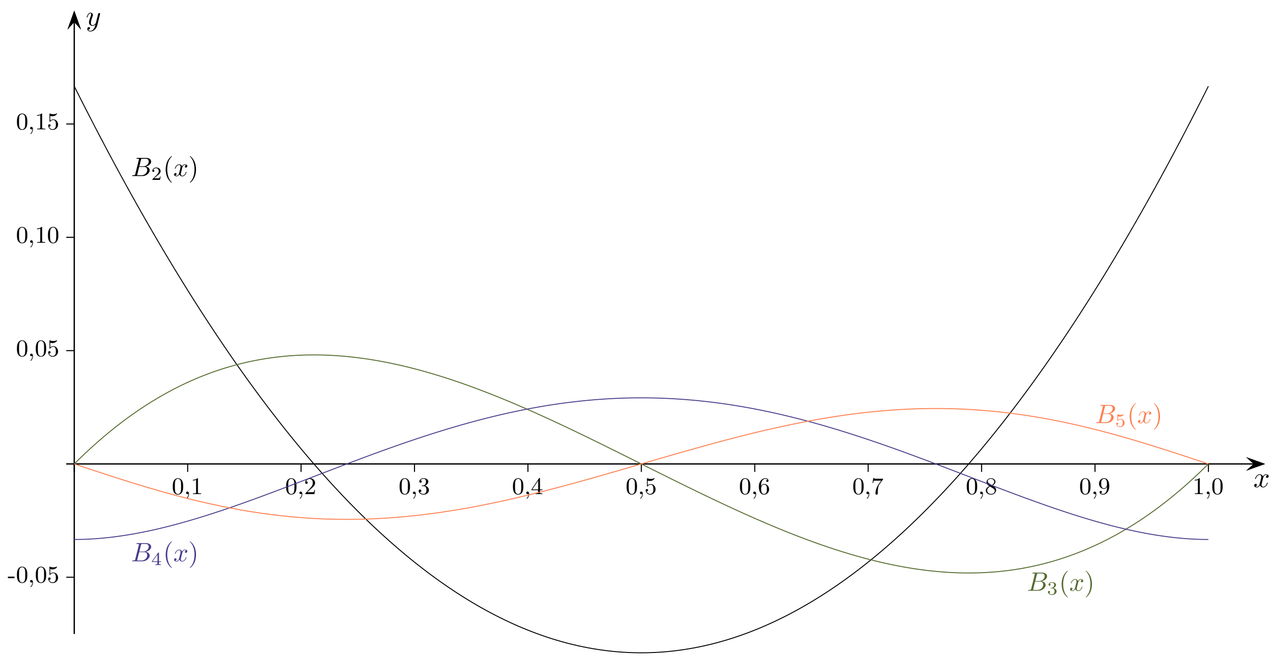
Durch Summieren über i von 1 bis n erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \big[B_{k+1}(i+1) - B_{k+1}(i)\big] &= (k+1)\big[1 + 2^k + 3^k + \ldots n^k\big] \\
B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1) &= (k+1)\sum_{i=1}^{n} i^k \\
\sum_{i=1}^{n} i^k &= \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(0)}{k+1} && B_{k+1}(0) = B_{k+1} \\
&= \int_0^{n+1} B_k(t)\,\mathrm{d}t && \int B_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}\,B_{k+1}(x)
\end{aligned}$$

Das Ergebnis stimmt mit

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\Big[\binom{k+1}{0}B_0(n+1)^{k+1} + \binom{k+1}{1}B'_1(n+1)^k + \binom{k+1}{2}B_2(n+1)^{k-1} + \binom{k+1}{3}B_3(n+1)^{k-2} +$$

$$\ldots + \binom{k+1}{k}B_k(n+1)\Big] \qquad \text{überein.} \qquad B'_1 = -\frac{1}{2}$$



Die Bedingung $\int_0^1 B_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0$ ist wegen $\int_0^1 B_{k-1}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\big(B_k(1) - B_k(0)\big)$

äquivalent zu $B_k(1) = B_k(0) \qquad k = 2, 3, \ldots$

Die Bernoulli-Polynome erfüllen die Symmetrieeigenschaft $B_k(x) = (-1)^k B_k(1-x), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$

Beweis durch vollständige Induktion
$n = 0$ erfüllt

$$\begin{aligned}
B_k(x) &= (-1)^k B_k(1-x) \\
\Longrightarrow \qquad \int_0^1 B_k(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 (-1)^k B_k(1-x)\,\mathrm{d}x \\
\Longrightarrow \qquad \frac{1}{k+1} B_{k+1}(x) &= -\int_0^1 (-1)^k B_k(u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{Substitution } u = 1-x \\
&= \frac{1}{k+1}(-1)^{k+1} B_{k+1}(1-x) \qquad \square
\end{aligned}$$

Folgerung ($x = 0$): $B_k = 0$ für k ungerade.

↑ Bernoulli-Zahlen

In mathematischen Skripten werden in der Regel möglichst kurze Wege beschritten,
auch wenn das dem Verständnis häufig nicht immer zuträglich ist.
So werden z. B. die Bernoulli-Zahlen als Koeffizienten einer Taylorreihe definiert werden.

$$\frac{x}{e^x-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!}$$

Die rekursive Darstellung der B_k soll hergeleitet werden.

$$
\begin{aligned}
x &= (e^x-1)\sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} && \text{mit } (e^x-1) \text{ multipliziert}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} && e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ eingesetzt}\\
1 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} && \text{durch } x \text{ dividiert}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{x^k}{k!} && \text{Umformulierung}\\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} \frac{B_k}{k!(n+1)!} x^{n+k} && \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} a_n b_k = \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \frac{B_k}{k!(m-k+1)!} x^m && \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}\\
1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k \right] \frac{1}{(m+1)!} x^m && \frac{1}{k!(m-k+1)!} = \frac{(m+1)!}{k!(m-k+1)!} \frac{1}{(m+1)!} = \\
& && \binom{m+1}{k} \frac{1}{(m+1)!}
\end{aligned}
$$

Nun führen wir einen Koeffizientenvergleich durch.
Der Vergleich der konstanten Terme ergibt $B_0 = 1$.
Der Term in den eckigen Klammern muss für $m \geq 1$ gleich null sein:

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k = 0$$

Das ist die rekursive Gleichung zur Bestimmung von B_k aus B_0 bis B_{k-1}.

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ \ldots$$

↑ Potenzsummen

Die Formel für $\sum\limits_{i=1}^{n} i^k$ soll nochmals hergeleitet werde.

Mit Hilfe der geometrischen Summenformel gilt

$$\sum_{i=1}^{n} e^{ix} = \frac{1-e^{(n+1)x}}{1-e^x} = \frac{e^{(n+1)x}-1}{x} \cdot \frac{x}{e^x-1}$$

und mit den Reihenentwicklungen eingesetzt:

$$\begin{aligned}
= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{i+1}}{(i+1)!} x^i \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_m}{m!} x^m &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+m=k} \frac{(n+1)^{i+1} B_m}{(i+1)!m!} x^{i+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{k} \frac{(n+1)^{k-m+1} B_m}{(k-m+1)!m!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} (n+1)^{k-m+1} \, B_m \Big] \frac{1}{(k+1)!} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} (n+1)^{k-m+1} \, B_m \Big] \frac{1}{k!} x^k
\end{aligned}$$

Andererseits gilt

$$\sum_{i=0}^{n} e^{ix} = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\sum_{i=0}^{n} i^k \Big] \frac{1}{k!} x^k$$

Nun folgt durch Koeffizientenvergleich die Potenzsummenformel, $k \geq 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} i^k &= \frac{1}{k+1} \sum_{m=0}^{k} \binom{k+1}{m} (n+1)^{k-m+1} B_m \\
&= \frac{1}{k+1} \Big[\binom{k+1}{0} B_0 (n+1)^{k+1} + \binom{k+1}{1} B_1 (n+1)^k + \binom{k+1}{2} B_2 (n+1)^{k-1} + \binom{k+1}{3} B_3 (n+1)^{k-2} + \\
&\qquad \ldots + \binom{k+1}{k} B_k (n+1) \Big]
\end{aligned}$$