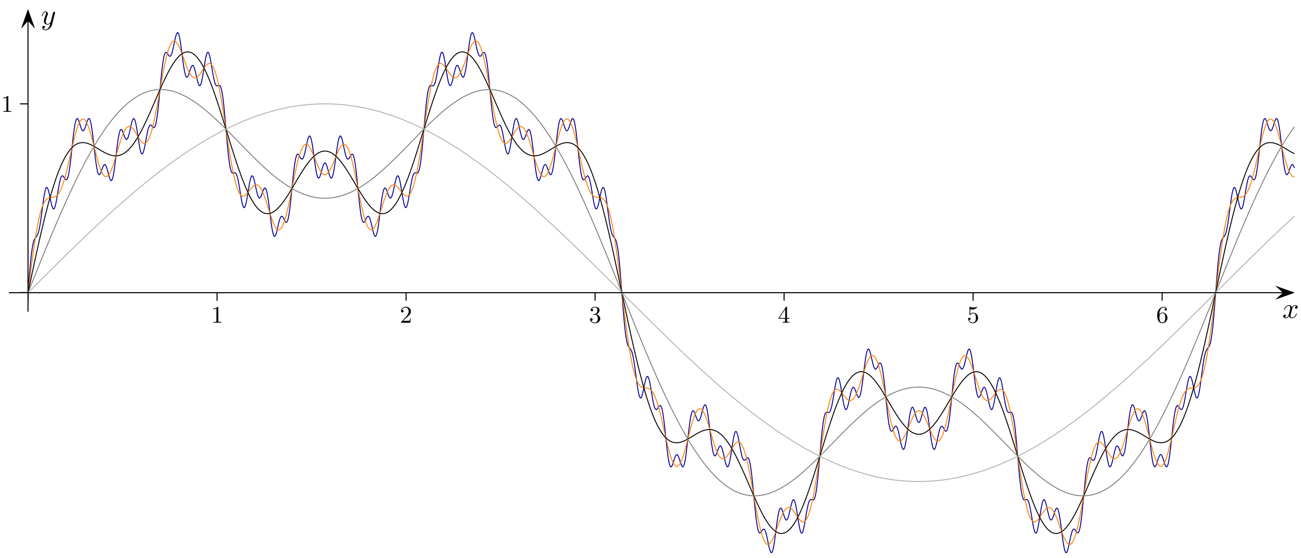
Stetigkeit/Differenzierbarkeit

Anschaulich bedeutet Stetigkeit, dass der Graph eine zusammenhängende Kurve ist, also keine Sprünge macht und man ihn ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann. Die mathematische Definition deckt sich nicht ganz mit der Anschauung. Bolzano 1834 und Weierstraß 1872 fanden stetige Funktionen, die nicht differenzierbar sind und deren Graphen sich nicht in der angegebenen Weise zeichnen lassen. Umgekehrt folgt aus der Differenzierbarkeit $\left(\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ existiert}\right)$ leicht ersichtlich die Stetigkeit $\big(f(x+h)-f(x) \text{ strebt für } h \to 0 \text{ gegen null}\big)$.

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$$

ist eine konvergente Funktionenfolge.
Der Zähler eines jeden Summanden ist aus dem Intervall $[-1,1]$, die Nenner wachsen dagegen exponentiell (geometrisch) an. Die Folge konvergiert gleichmäßig (der gegen null gehende Abstand kann so abgeschätzt werden, dass er von x unabhängig ist). In solchen Fällen überträgt sich die Stetigkeit der Summanden auf die Grenzfunktion.



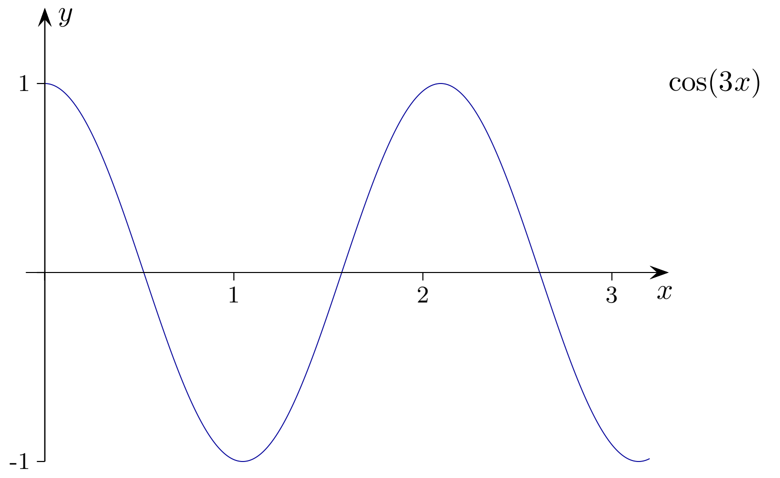
Die Grafik zeigt die Summe bis zum 1., 2., …, 5. Summanden von $W(x)$.
Das Bild ändert sich nicht wesentlich, wenn weitere Summanden hinzugenommen werden.

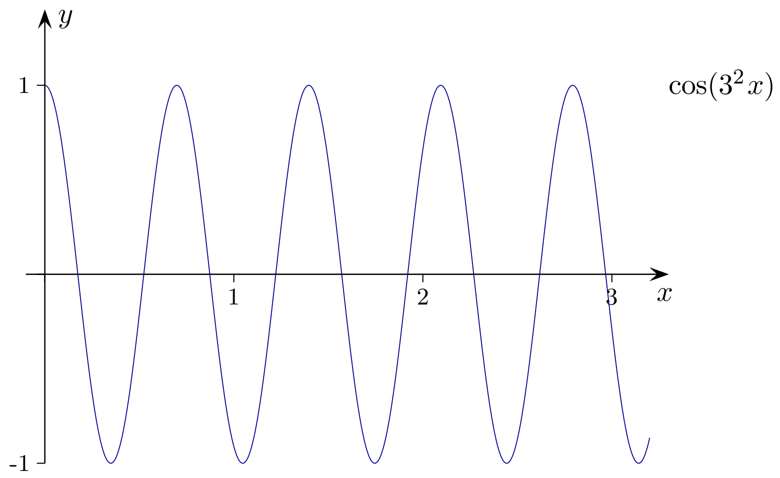
An dieser Stelle begnügen wir uns mit einer plausiblen Überlegung hinsichtlich der Differenzierbarkeit, und versuchen es mit

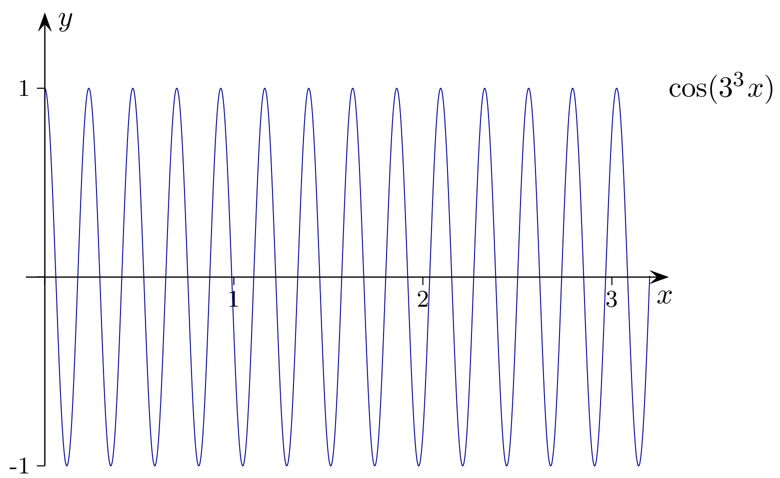
$$W'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n \cos(3^n x).$$

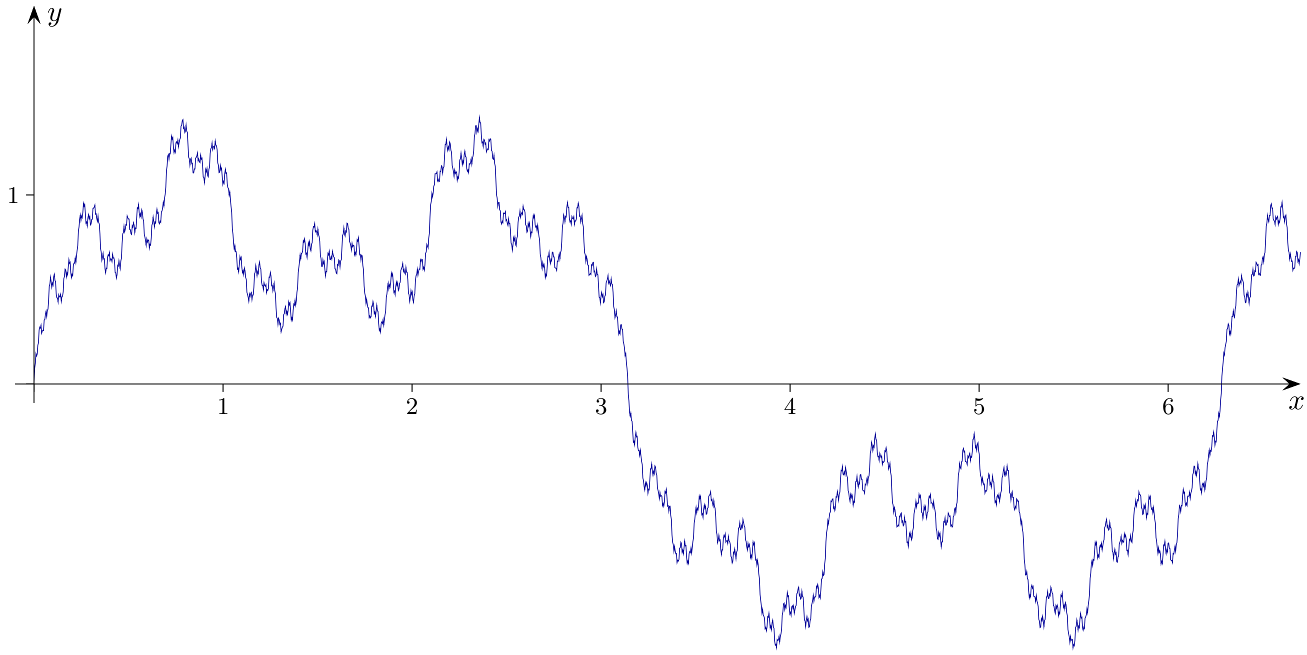
Es ist ersichtlich, dass die Frequenz der Kosinus-Funktionen mit jedem n zunimmt. Die Amplituden streben gegen unendlich. $W(x)$ kann daher außerhalb der abzählbar vielen Nullstellen der Kosinus-Funktionen nicht differenzierbar sein.

Eine geringfügige Verschärfung der Stetigkeit (Lipschitz-Stetigkeit) verändert die Sachlage. Lipschitz-stetige Funktionen sind fast überall differenzierbar (Rademacher 1919).


y
1
-1
1
2
3
x
cos(3x)


y
1
-1
1
2
3
x
cos(3^2 x)


y
1
-1
1
2
3
x
cos(3^3 x)



Die Grafik zeigt die Summe der ersten 8 Summanden von $W(x)$.