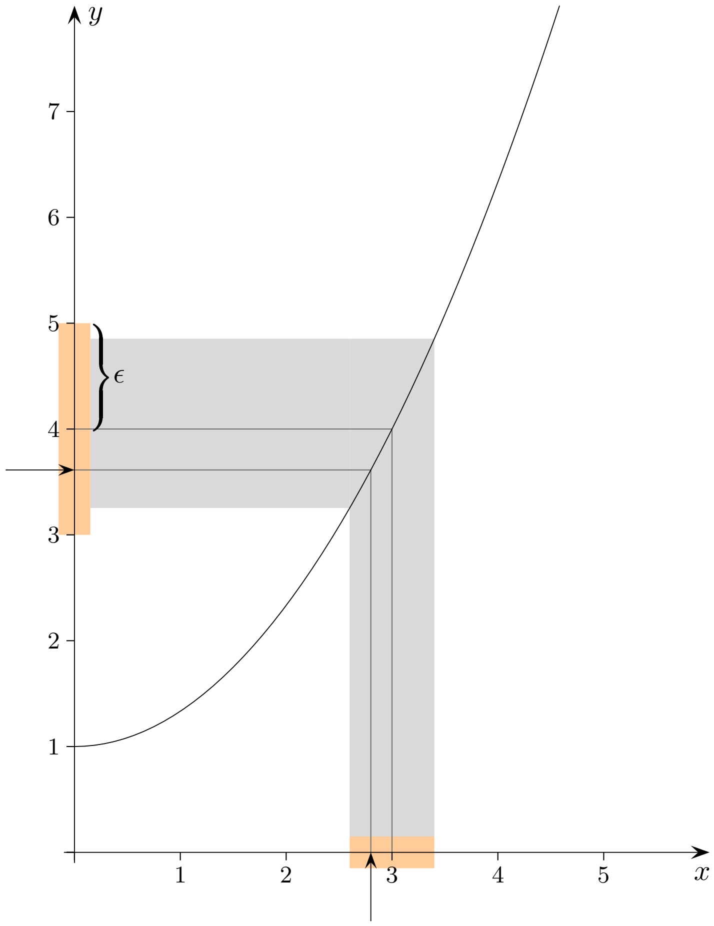
Stetigkeit nachweisen



Wir betrachten die Stelle $x = 3$, der Funktionswert ist 4, d. h. $f(3) = 4$.
Wenn wir uns in der Nähe von $x = 3$ aufhalten, ist der Funktionswert auch in der Nähe von $y = 4$.
Die Umgebung des Funktionswertes $y = 4$ soll nun vorgegeben sein (die ϵ-Umgebung) und wir fragen uns, in welchem Bereich um den x-Wert 3 (die δ-Umgebung) ich mich bewegen darf, damit der zugehörige Funktionswert in der vorgegebenen ϵ-Umgebung bleibt.
Veranschaulichung: x ein Schieberegler, y ein Höhenzeiger.
Hierbei ist nicht verlangt, dass die δ-Umgebung möglichst groß sein muss.
Wichtig ist nur, dass die Funktionswerte nicht aus der ϵ-Umgebung entweichen.
Um eine mögliche δ-Umgebung ausfindig zu machen, muss eine Beziehung zwischen $|\,f(x) - 4\,|$ und $|\,x - 3\,|$ hergestellt werden, z. B. in der Form:

$$|\,f(x) - 4\,| < \ldots < 2 \cdot |\,x - 3\,|$$

Wenn nun für x gilt: $|\,x - 3\,| < \frac{\epsilon}{2}$, dann ist $|\,f(x) - 4\,| < \epsilon$ sichergestellt, damit ist $\delta = \frac{\epsilon}{2}$.
Umformung:

$$2 \cdot \underbrace{|\,x - 3\,|}_{\delta} < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = \frac{\epsilon}{2}$$

Die Ungleichungskette

$$|\, f(x) - f(a)\, | < \ldots < C \cdot |\, x - a\, |$$

führt zu $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.

Betrachten wir die Funktion $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = a$.

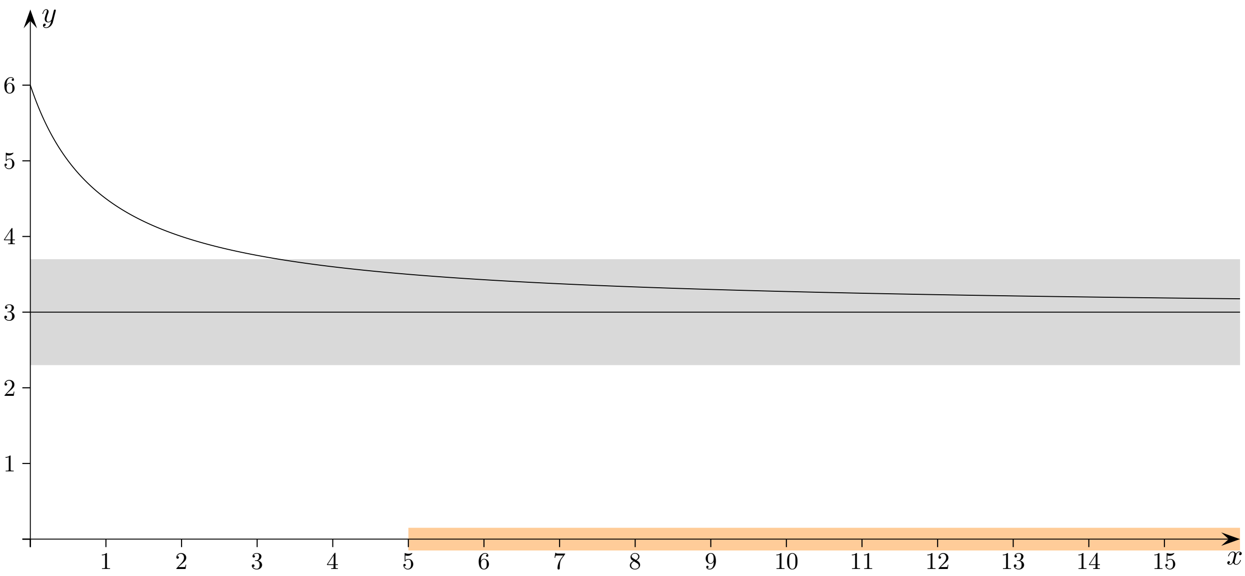
$$|\, f(x) - f(a)\, | \;=\; |\, x^2 - a^2\, | \;=\; |\, (x+a) \cdot (x-a)\, | \;\leq\; |\, \underbrace{x+a}_{g(x)}\, | \cdot |\, x - a\, |$$

$g(x)$ muss auf einem Intervall, z. B. $[a-1, a+1]$, nach oben abgeschätzt werden.

Dies führt zu $C = 2a + 1$ und $\delta = \frac{\epsilon}{C}$.

Es muss noch erwähnt werden, dass das δ der δ-Umgebung hier höchstens 1 sein darf.

Grenzwert einer Funktion



Die Funktionswerte scheinen gegen den Wert 3 zu streben.
Zum Nachweis ist zu jeder Umgebung von 3 (ϵ-Umgebung) nachzuweisen, dass die Funktionswerte schließlich, also für alle $x > x_0$, in der ϵ-Umgebung liegen.
Die Existenz von x_0 (abhängig von ϵ) muss nachgewiesen werden.
Hierbei muss x_0 nicht minimal sein.

Um ein mögliches x_0 ausfindig zu machen, muss eine Ungleichungskette der Form

$$|\, f(x) - 3\,| < \ldots < \frac{C}{x} \ < \epsilon$$

erstellt werden.

Umformung:

$$\frac{C}{x} \ < \epsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{C}{\epsilon} \ < x$$

Für $x > \dfrac{C}{\epsilon}$ ist dann $|\, f(x) - 3\,| < \epsilon$ sichergestellt.

$x_0 = \dfrac{C}{\epsilon}$

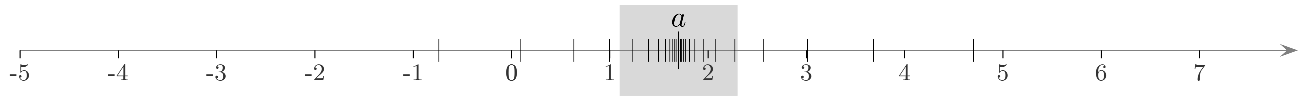
einfaches Beispiel:

$\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

$$|\, \frac{1}{x} - 0\,| = |\, \frac{1}{x}\,| = \ \frac{1}{x} < \epsilon \qquad \text{für} \quad \frac{1}{\epsilon} < x$$

Grenzwert einer Folge

Der Grenzwert der Zahlenfolge $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4, ...$ sei a.



Zu jeder Umgebung von a muss es eine Stelle in der Folge geben, von der ab alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung liegen.

Zu beliebig vorgegebener Ungenauigkeit ε (erinnert an error) muss es jeweils eine Stelle n_0 geben, von der ab $|\ a_n - a\ | < \varepsilon$ ist, d. h. dass die Abweichungen der weiteren Folgenglieder, also für $n > n_0$, von a kleiner als ε sind.

einfaches Beispiel:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$|\ \frac{1}{n} - 0\ | = |\ \frac{1}{n}\ | = \frac{1}{n} < \epsilon \qquad \text{für} \quad \frac{1}{\epsilon} < n$$

$$n_0 = \frac{1}{\epsilon}$$