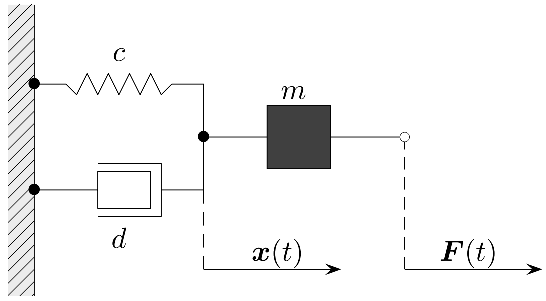
Signalverarbeitung



Variablen:

- Eingangsgröße: Kraft $\boldsymbol{F}$
- Ausgangsgröße: Weg $\boldsymbol{x}$

Parameter:

- Feder mit Federkonstante c
- Dämpfer mit Dämpfungskonstante d
- Masse m

Die Kräftebilanz in x-Richtung $\quad F(t) - m\ddot{x}(t) - cx(t) - d\dot{x}(t) = 0$

führt zur DGL $\quad \ddot{x}(t) + \frac{d}{m}\dot{x}(t) + \frac{c}{m}x(t) = \frac{1}{m}F(t).$

Ein dynamisches System wird durch eine Differentialgleichung beschrieben,
im einfachsten Fall durch $\dot{y} + 2y = b(t)$.
Von Interesse ist der Zusammenhang von Eingangsfunktion $b(t)$, z. B. $b(t) = e^t$, und Ausgangsfunktion $y(t)$. Die lineare DGL 1. Ordnung $\dot{y} + ay = b(t),\ y(0) = y_0$, ($a$ konstant) kann auf verschiedene Arten gelöst werden, auch mit der Formel:

$$y(t) = e^{-at}y_0 + \int_0^t e^{-a(t-u)}b(u)\,\mathrm{d}u$$

Für $\dot{y} + 2y = e^t$, $y_0 = 0$, erhalten wir $y(t) = \int_0^t \underbrace{e^{-2(t-u)}e^u}_{e^{-2t+3u}}\,\mathrm{d}u = e^{-2t}\int_0^t e^{3u}\,\mathrm{d}u = \ldots = \frac{1}{3}\left(e^t - e^{-2t}\right)$

Das Integral $\int_0^t e^{-a(t-u)}b(u)\,\mathrm{d}u$ ist von der Art

$$\underbrace{\int_0^t g(t-u)b(u)\,\mathrm{d}u}_{g(t)*b(t)} \quad \text{mit der } \textit{Gewichtsfunktion} \quad g(t) = e^{-at}.$$

Die im allgemeinen aufwendige Berechnung des *Faltungsintegrals* $g(t) * b(t)$ kann mit der Laplace-Transformation vermieden werden. Hierbei geht das Integral in das Produkt $Y(s) = G(s) \cdot B(s)$ über. Die Laplace-Transformierte der Gewichtsfunktion $g(t)$ ist die *Übertragungsfunktion* $G(s)$.

Laplace-Transformation

Der gewünschte Zusammenhang von Eingangs- und Ausgangsfunktion
wird durch $Y(s) = G(s) \cdot B(s)$ im Bildbereich der Laplace-Transformation hergestellt.

$$g(t) = e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(s) = \frac{1}{s+2} \qquad \text{alternative Schreibweise } \mathcal{L}\{g\}(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$b(t) = e^{t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ B(s) = \frac{1}{s-1}$$

$$y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(s)B(s) = \frac{1}{(s+2)(s-1)}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t} \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{(s+2)(s-1)} \qquad \text{Die Rücktransformation ergibt } y(t).$$

Mit WolframAlpha und den Anweisungen
Laplace transform exp(-2t)
Laplace transform exp(t)
inverse Laplace transform 1/((s-1)*(s+2))   kann $y(t)$ ermittelt werden.

$$\underbrace{\int_0^t g(t-u)b(u)\,\mathrm{d}u}_{g(t)*b(t)} \circ\!\!-\!\!\bullet\ G(s)B(s)$$

`Laplace transform  int_0^t exp(-2(t-u))exp(u) du`

Ausgabe: $\frac{1}{(s+2)(s-1)}$

$\dot{y} + 2y = e^t$, $y(0) = 0$, ist mit einer Tabelle zur Laplace-Transformation zu lösen.

DGL transformiert:

$$\begin{aligned} \underbrace{s \cdot F(s) + 2F(s)}_{F(s)(s+2)} &= \frac{1}{s-1} \\ F(s) &= \frac{1}{(s-1)(s+2)} \\ &= -\frac{1}{3(s+2)} + \frac{1}{3(s-1)} \qquad \text{Partialbruchzerlegung} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt $y(t) = \frac{1}{3}e^{t} - \frac{1}{3}e^{-2t}$.

WolframAlpha, nützliche Anweisungen:
partial fractions 1/((s-1)(s+2))
dy/dt+2y=exp(t), y(0)=0
y'+2y=exp(t), y(0)=0

Gewichtsfunktion

Die Gewichtsfunktion (Impuls-, Stoßantwort) ist das Ausgangssignal eines Systems, dem am Eingang ein Dirac-Impuls $\delta(x)$ zugeführt wird.

Für $\dot{y} + ay = \delta(x)$, $y(0) = 0$, erhalten wir als Lösung die Gewichtsfunktion $g(t) = e^{-at}$, $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} \underbrace{s \cdot F(s) + aF(s)}_{F(s)(s+a)} &= 1 & \qquad \delta(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ 1 \\ F(s) &= \frac{1}{(s+a)} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt $\quad y(t) = e^{-at}$.

Aus der charakteristischen Beziehung $\dot{g}(t) + ag(t) = \delta(t)$, $g(0) = 0$, folgt:

$$\dot{y} + ay = f(t),\ y(0) = 0,\ \text{besitzt die Lösung}\ y(t) = g(t) * f(t) = \int_0^t g(t-u)f(u)\mathrm{d}u.$$

Nachweis

$$\begin{aligned} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) + ag(t) &= \delta(t) \\ \Longrightarrow && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t-u) + ag(t-u) &= \delta(t-u) \qquad \Big| \cdot f(u),\ \int_0^t \\ \Longrightarrow && \int_0^t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t-u)f(u)\mathrm{d}u + \int_0^t ag(t-u)f(u)\mathrm{d}u &= \int_0^t \delta(t-u)f(u)\mathrm{d}u \\ \Longrightarrow && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\underbrace{\int_0^t g(t-u)f(u)\mathrm{d}u}_{y(t) = g(t)*f(t)} + a\underbrace{\int_0^t g(t-u)f(u)\mathrm{d}u}_{y(t) = g(t)*f(t)} &= \underbrace{\int_0^t \delta(t-u)f(u)\mathrm{d}u}_{f(t)} \end{aligned}$$

Die Gewichtsfunktion ist die Ableitung des Ausgangssignal eines Systems, dem am Eingang die Einheitssprungfunktion $\sigma(t)$ (springt bei $t = 0$ auf 1) zugeführt wird.

Für $\dot{y} + ay = \sigma(t)$, $y(0) = 0$, heißt das:

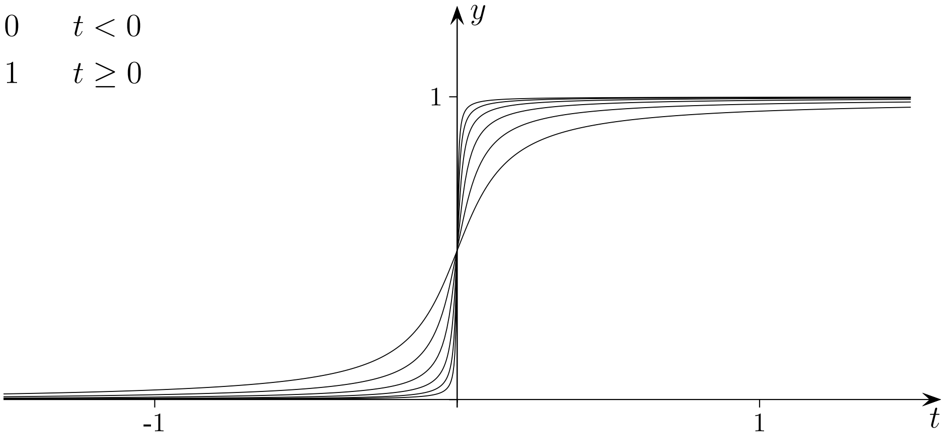
$$\begin{aligned} \underbrace{s \cdot F(s) + aF(s)}_{F(s)(s+a)} &= \frac{1}{s} & \qquad \sigma(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \frac{1}{s} \\ F(s) &= \frac{1}{s(s+a)} = \frac{1}{as} - \frac{1}{a(a+s)} \end{aligned}$$

Die Rücktransformation ergibt $\quad y(t) = \frac{1}{a} - \frac{e^{-at}}{a}, \qquad \dot{y}(t) = g(t) = e^{-at}$

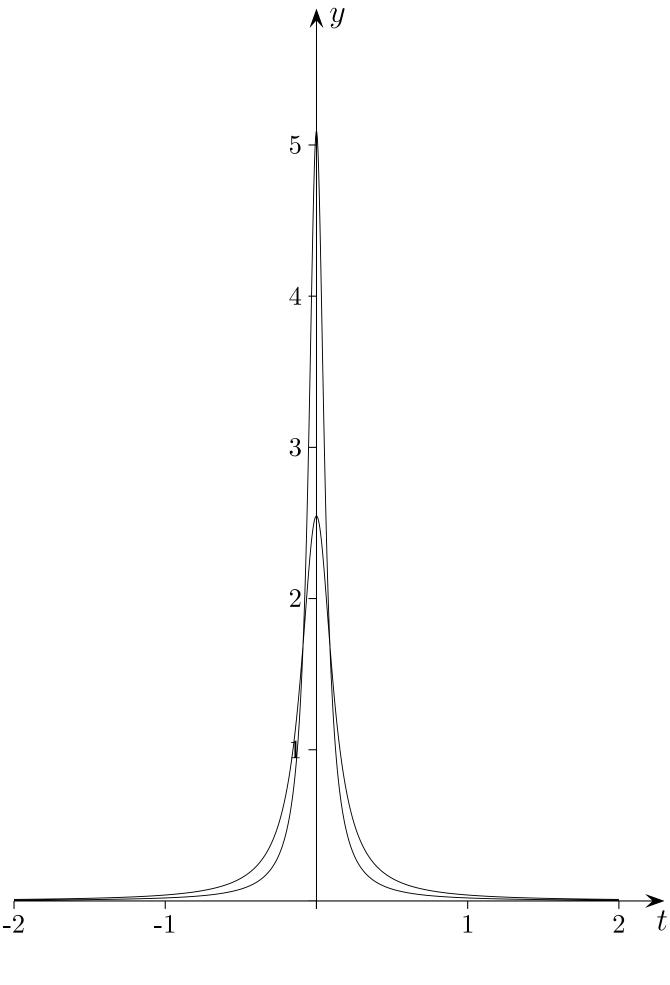
Ist y eine Lösung für $\dot{y} + ay = \sigma(t)$, so ist $\dot{y}$ wegen $\dot{\sigma}(t) = \delta(t)$ eine Lösung für $\dot{y} + ay = \delta(t)$. Die Überlegungen gelten auch für lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Einheitssprungfunktion

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$



Im approximativen Sinn streben die Ableitungen gegen eine δ-Funktion(enfolge).



Ausblendeigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) \, \mathrm{d}t = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(u-t) \, \mathrm{d}t = f(u)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t-u) \, \mathrm{d}t = f(u)$$