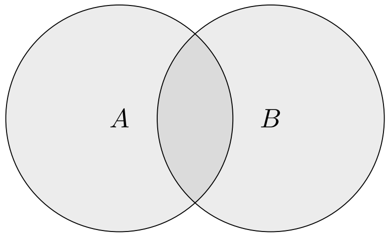
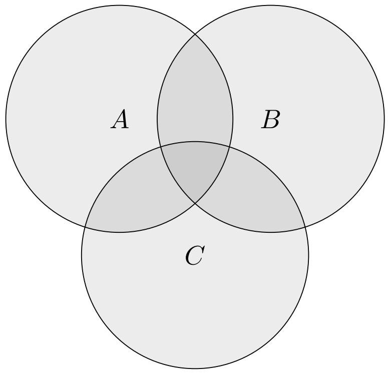
Siebformel von Sylvester

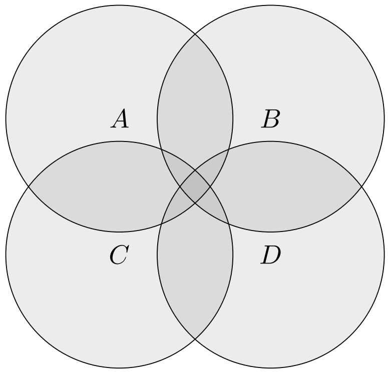
1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



2) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
$+ |A \cap B \cap C|$



3) $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$
$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$
$- |A \cap B \cap C \cap D|$

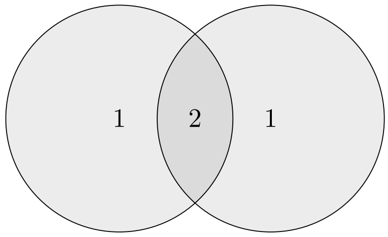


4) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \ldots + |A_n|$
$- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \ldots - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - \ldots \qquad (i < j)$
$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \ldots (i < j < k)$
$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \ldots \qquad (i < j < k < l)$
$+ \ \ldots$
$+ \ (-1)^{n-1} \, |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$

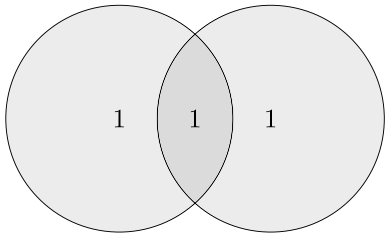
Siebformel von Sylvester, Idee

1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \cup B| \leq |A| + |B|$



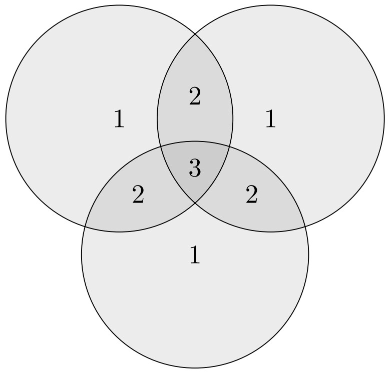
Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft eine Element mit $|A| + |B|$ gezählt wird.
$-|A \cap B|$ führt zum korrekten Ergebnis:



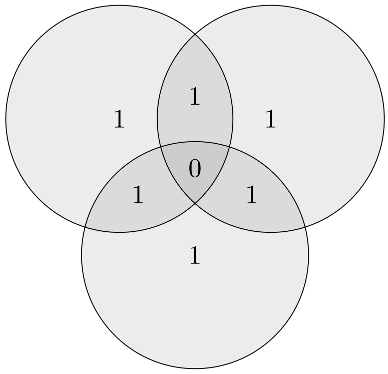
Siebformel von Sylvester, Inklusion und Exklusion

2) $$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

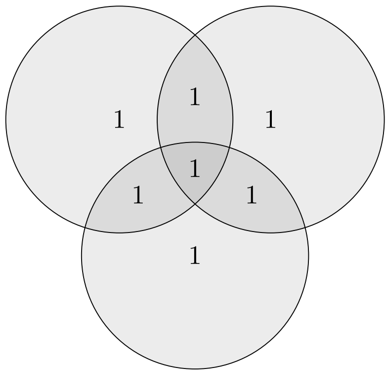
$$|A \cup B \cup C| \le |A| + |B| + |C|$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft eine Element mit $|A| + |B| + |C|$ gezählt wird.
$-|A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ führt zu einem zu kleinen Ergebnis:



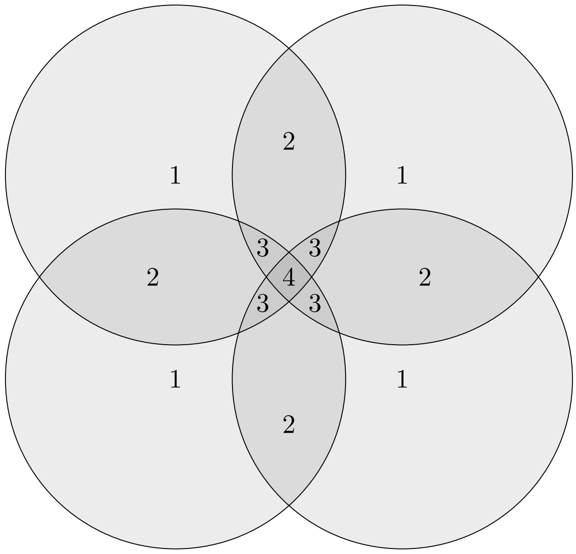
Die Korrektur erfolgt mit $+|A \cap B \cap C|$.



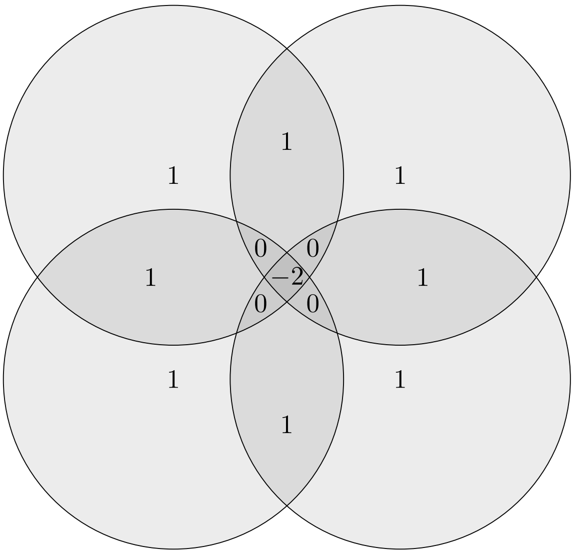
Siebformel von Sylvester, Ein- und Ausschluss

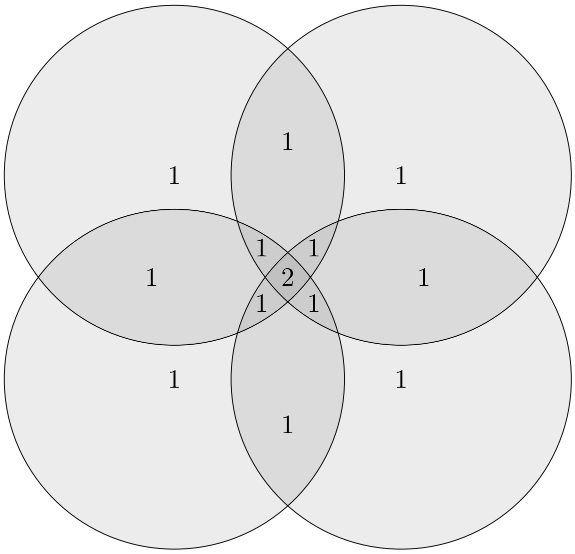
3) $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$
$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$
$- |A \cap B \cap C \cap D|$

$|A \cup B \cup C \cup D| \leq |A| + |B| + |C| + |D|$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft eine Element mit $|A| + |B| + |C| + |D|$ gezählt wird.
$- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$ führt zu einem zu kleinen Ergebnis,





$+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$ zu einem zu großen.
Die abschließende Korrektur ist offensichtlich.

Siebformel Schreibweisen

$$
\begin{aligned}
|\,A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n\,| = {} & |\,A_1\,| + |\,A_2\,| + |\,A_3\,| + \ldots + |\,A_n\,| \\
& - |\,A_1 \cap A_2\,| - |\,A_1 \cap A_3\,| - \ldots - |\,A_2 \cap A_3\,| - |\,A_2 \cap A_4\,| - \ldots \qquad (i < j) \\
& + |\,A_1 \cap A_2 \cap A_3\,| + |\,A_1 \cap A_2 \cap A_4\,| + |\,A_2 \cap A_3 \cap A_4\,| + \ldots \quad (i < j < k) \\
& - |\,A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\,| + \ldots \qquad (i < j < k < l) \\
& + \ \ldots \\
& + \ (-1)^{n-1}\,|\,A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n\,|
\end{aligned}
$$

$$
|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\,| = \sum_{k=1}^{n} |\,A_k\,| - \sum_{i<j} |\,A_i \cap A_j\,| + \sum_{i<j<k} |\,A_i \cap A_j \cap A_k\,| + \ldots + (-1)^{n-1}\,|\,A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n\,|
$$

Mit der Abkürzung für die Summation über alle r-elementigen Teilmengen $\{i_1, \ldots, i_r\}$ von $\{1, \ldots, n\}$

$$
S_r := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} |\,A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}\,|
$$

gilt:

$$
|\bigcup_{k=1}^{n} A_k\,| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot S_r
$$

Beweis der Siebformel

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot S_r \qquad \text{mit} \quad S_r := \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}|$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n.
Hierzu schauen wir uns den Übergang von $n = 2$ auf $n = 3$ an.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

z.z. $\quad |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - |\underbrace{(A \cup B) \cap C}_{(A \cap C) \cup (B \cap C)}| \end{aligned}$$

Wird nun erneut die Voraussetzung ($n = 2$) auf den ersten und letzten Term der rechten Seite angewandt, so ist die Formel für $n = 3$ zu erkennen.

Der Induktionsschluss von n auf $n + 1$ erfolgt ähnlich.
Der Anfang ist naheliegend, A_{n+1} wird abgespalten.

$$\begin{aligned} \left|\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right| &= \left|\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cup A_{n+1}\right| \\ &= \left|\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right| + |A_{n+1}| + |\underbrace{\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cap A_{n+1}}_{\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A_{n+1})}| \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung kann auf den ersten und letzten Term der rechten Seite angewandt werden.

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot S_r + |A_{n+1}| + \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m} \cdot S_m^* \qquad \text{mit} \quad S_m^* := \sum_{1\le i_1<\ldots<i_m\le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_m} \cap A_{n+1}|$$

Wir ordnen um und fassen zusammen:

$$\left|\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j\right| = \underbrace{S_1 + |A_{n+1}|}_{\text{Summand für } r=1} + \sum_{r=2}^{n} (-1)^{r-1} \cdot (S_r + S_{r-1}^*) + (-1)^n \cdot S_n^* \qquad \text{Der letzte Term fehlt in der Summe.}$$

Mit

$$S_r + S_{r-1}^* = \sum_{1\le i_1<\ldots<i_r\le n+1} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}| \qquad (2 \le r \le n) \qquad \text{folgt die Behauptung.}$$

In S_r werden die Teilmengen ohne A_{n+1} berücksichtigt, in S_m^* die mit A_{n+1}.

Siebformel Stochastik

Mit der Siebformel können auch Wahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot S_r \qquad \text{mit} \quad S_r := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r})$$

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn für jedes r die Summanden in S_r gleich sind,
die Wahrscheinlichkeiten der Durchschnitte $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}$ also nur von der Anzahl r, nicht aber von der speziellen Wahl der Ereignisse abhängen.

Die Siebformel nimmt dann die folgende Form an:

$$P\Big(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \cdot \binom{n}{r} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_r)$$

Siebformel Beweis mit Indikatorfunktionen

Sei A ein Ereignis (Teilmenge) in Ω.
Die Funktion auf Ω, die jedem Element von A den Wert 1 und jedem Element von $\overline{A}$ den Wert 0 zuordnet, heißt Indikator von A und wird mit 1_A bezeichnet.

Für den Erwartungswert gilt: $E(1_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\overline{A}) = P(A)$

Weiteres:

1) $1_{\overline{A}} = 1 - 1_A$
2) $1_{A_1 \cap A_2 \cap \, \dots \, \cap A_n} = 1_{A_1} \cdot 1_{A_2} \cdot \, \dots \, \cdot 1_{A_n}$
3) $1_{A_1 \cup A_2 \cup \, \dots \, \cup A_n} = 1 - (1 - 1_{A_1})(1 - 1_{A_2}) \cdot \, \dots \, \cdot (1 - 1_{A_n})$

Erläuterung zu 3):

Liegt ω in mindestens einer der Mengen A_i, z. B. $\omega \in A_2$, dann ist $(1 - 1_{A_2}) = 0$ und die rechte Seite ist 1.
Liegt ω in keiner der Mengen A_i, dann sind alle Klammern gleich 1 und die rechte Seite ist 0.

Insbesondere gilt:

$$1_{A \cup B} = 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B)$$

Wir lösen die Klammern auf und beachten 2):

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$$

Die Erwartungswerte beider Seiten müssen übereinstimmen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ebenso beweist man:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Lösen wir in 3) die Klammern auf, so ergibt sich:

$$1_{A_1 \cup A_2 \cup \, \dots \, \cup A_n} = \sum_{i=1}^{n} 1_{A_i} - \sum_{i<j} 1_{A_i \cap A_j} + \sum_{i<j<k} 1_{A_i \cap A_j \cap A_k} - \, \dots \, (-1)^{n+1} \cdot 1_{A_1 \cap A_2 \cap \, \dots \, \cap A_n}$$

Wir bilden wieder die Erwartungswerte und erhalten die Siebformel:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \, \dots \, \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \, \dots \, (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \, \dots \, \cap A_n)$$

Anzahl der Elemente, die in keiner Teilmenge enthalten sind

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Seien A, B und C Teilmengen von M, dann gilt:

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| \\
&= |M \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| \\
&= |M| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\
&= |M| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|
\end{aligned}$$

mögliche Interpretation:

Auf der Menge M sind drei *Eigenschaften* E_i definiert, so dass für jedes Element feststeht, ob es die Eigenschaft hat oder nicht.

Die Mengen A_i kennzeichnen die Eigenschaften, es soll gelten:

$$A_i = \{m \in M \mid \ m \text{ hat die Eigenschaft } E_i\}$$

Genau die Elemente der Menge

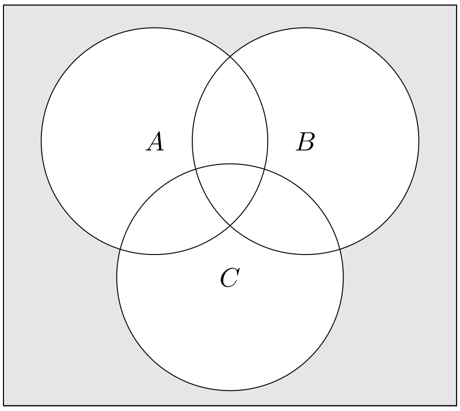
$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$$

erfüllen dann keine einzige Eigenschaft.

allgemein:

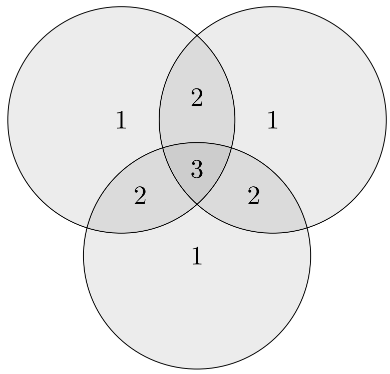
$$|\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}| = |M| - \sum_{k=1}^{n} |A_k| + \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \ldots + (-1)^n \, |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n|$$

$$|\bigcap_{j=1}^{n} \overline{A_j}| = |M| + \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \cdot S_r \qquad \text{mit} \quad S_r := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}|$$

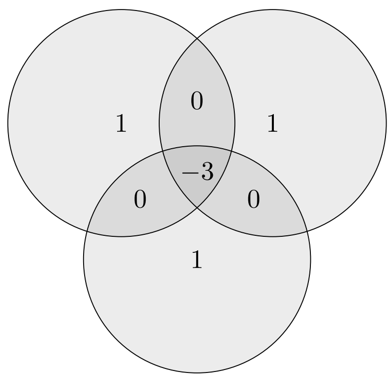


Anzahl $E(1)$ der Elemente, die in genau einer Teilmenge enthalten sind, bzw. genau eine Eigenschaft erfüllen

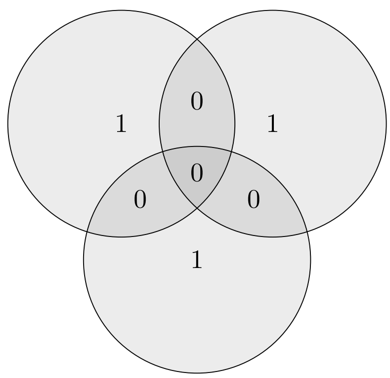
$$E(1) = |A| + |B| + |C| \\ -2\cdot\big(|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|\big) \\ +3\cdot|A\cap B\cap C|$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft eine Element mit $|A| + |B| + |C|$ gezählt wird.
$-2\cdot\big(|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|\big)$ führt zu einem zu kleinen Ergebnis:

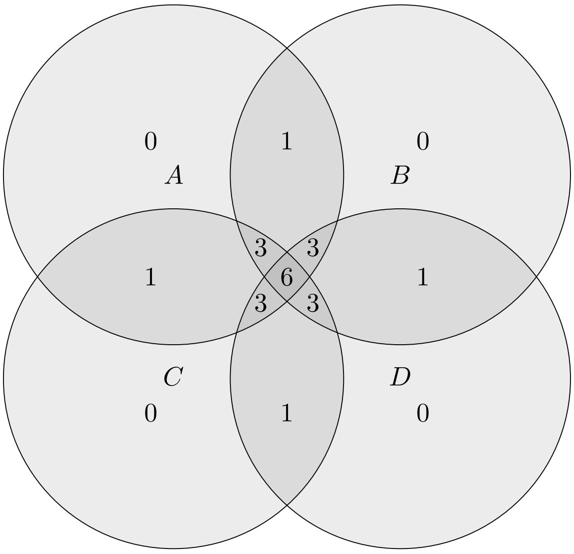


Die Korrektur erfolgt mit $+3\cdot|A\cap B\cap C|$.

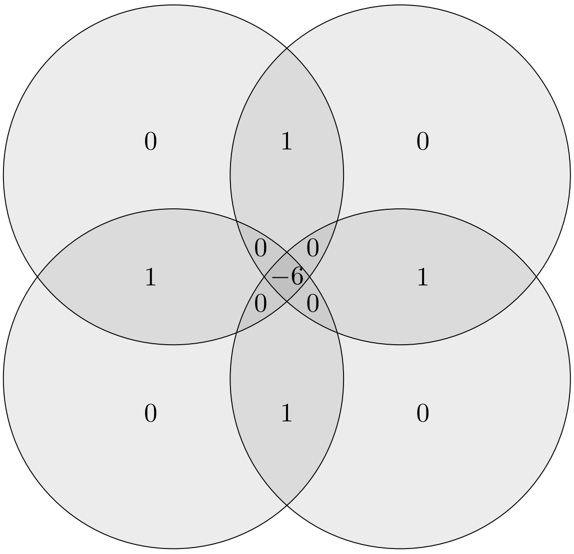


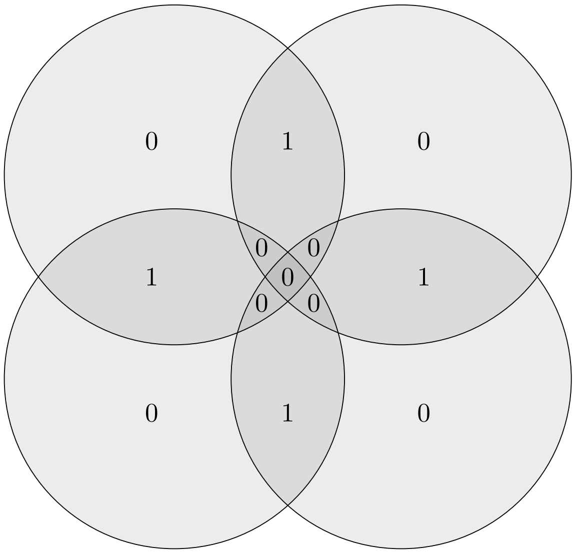
Anzahl $E(2)$ der Elemente, die in genau zwei Teilmengen enthalten sind,
bzw. genau zwei der Eigenschaften erfüllen

$$\begin{aligned} E(2) = & |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| \\ & - 3 \cdot \big(|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \big) \\ & + 6 \cdot |A \cap B \cap C \cap D| \end{aligned}$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft eine Element mit
$|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$ gezählt wird (Tipp Strichliste).





$-3 \cdot \big(|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \big)$ führt zur linken Grafik,
$+6 \cdot |A \cap B \cap C \cap D|$ zur rechten Grafik.

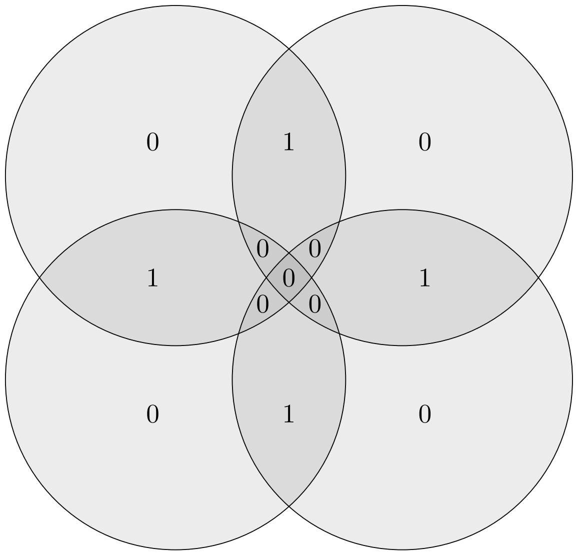
Anzahl $E(m)$ der Elemente, die in genau (d. h. maximal) m Teilmengen enthalten sind, oder genau m der Eigenschaften erfüllen

$$E(m) = W(m) - \binom{m+1}{m} W(m+1) + \binom{m+2}{m} W(m+2) - \ldots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} W(n)$$

Für eine Menge A haben wir n Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegeben, bzw. alternativ n Eigenschaften.

$$W(r) := \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_r \le n} |\, A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r} \,|$$

$W(r)$ ist die Anzahl der Elemente, die in (mindestens) r Teilmengen enthalten sind,
bzw. die (mindestens) r Eigenschaften erfüllen.



Beweis

Sei $a \in A$ und sei a in maximal t Teilmengen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_t}$, $t \ge 0$, enthalten, d. h. $a \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_t}$.
Für $t < m$ wird a auf keiner Seite mitgezählt.

Wenn a in genau $t = m$ Teilmengen enthalten ist, wird es auf jeder Seite genau einmal mitgezählt.

Wenn jedoch $t > m$ ist, wird es in $W(m)$ $\binom{t}{m}$-fach mitgezählt, in $W(m+1)$ $\binom{t}{m+1}$-fach usw, insgesamt auf der rechten Seite also

$$\binom{t}{m} - \binom{m+1}{m}\binom{t}{m+1} + \binom{m+2}{m}\binom{t}{m+2} - \ldots (-1)^{t-m} \binom{t}{m}\binom{t}{t} \quad \text{-fach.}$$

Nach einigen Umformungen ist zu erkennen, dass dieser Term Null ist. Mit (überprüfe dies)

$$\binom{k}{m}\binom{t}{k} = \binom{t}{m}\binom{t-m}{t-k}, \quad m \le k \le t, \quad \text{kann zunächst } \binom{t}{m} \text{ ausgeklammert werden.}$$

$$\binom{t}{m}\Big[\binom{t-m}{t-m} - \binom{t-m}{t-(m+1)} + \binom{t-m}{t-(m+2)} - \ldots + (-1)^{t-m}\binom{t-m}{t-t}\Big]$$

Um zu sehen, dass die eckige Klammer Null ergibt, wird das Folgende ($n = t - m$) benötigt:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n}b^n$$

Mit $a = 1$, $b = -1$ folgt:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0$$

$n = 6$

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

$n = 7$

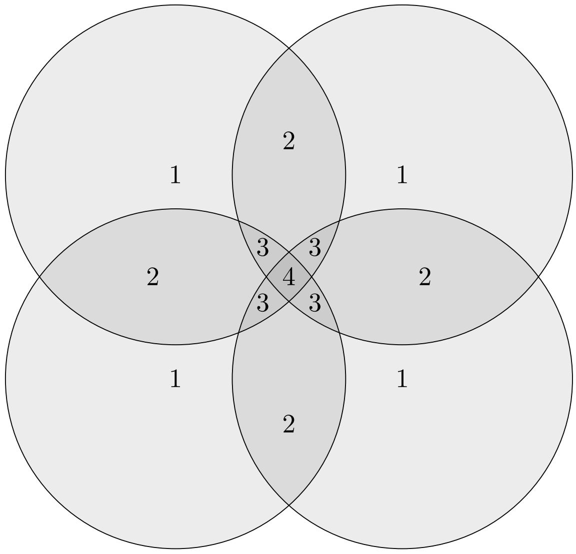
$$1 - 7 + 21 - 35 + 35 - 21 + 7 - 1 = 0$$

$n = 8$

$$1 - 8 + 28 - 56 + 70 - 56 + 28 - 8 + 1 = 0$$

Der vorige Satz von der Inklusion und Exklusion kann noch ein wenig verallgemeinert werden.
Hierzu betrachten wir eine Funktion w auf A.
Statt die Elemente der jeweiligen Mengen zu zählen, werden die zugehörigen Funktionswerte der Elemente addiert. Im Beweis ändern sich die Schreibweisen geringfügig.

Siebformel einfacher Beweis



$$
\begin{aligned}
|\,A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n\,| = &\,|\,A_1\,| + |\,A_2\,| + |\,A_3\,| + \ldots + |\,A_n\,| \\
&- |\,A_1 \cap A_2\,| - |\,A_1 \cap A_3\,| - \ldots - |\,A_2 \cap A_3\,| - |\,A_2 \cap A_4\,| - \ldots \qquad (i < j) \\
&+ |\,A_1 \cap A_2 \cap A_3\,| + |\,A_1 \cap A_2 \cap A_4\,| + |\,A_2 \cap A_3 \cap A_4\,| + \ldots \, (i < j < k) \\
&- |\,A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\,| + \ldots \qquad (i < j < k < l) \\
&+ \ \ldots \\
&+ \ (-1)^{n+1}\,|\,A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n\,|
\end{aligned}
$$

Angenommen, $a \in A$ komme nur in genau einer Teilmenge A_i vor, dann wird a auch nur in der 1. Zeile genau 1-mal gezählt.

Nehmen wir nun an, a komme in genau zwei Teilmengen vor, z. B. $a \in A_1 \cap A_2$.
Dann wird es in der 1. Zeile 2-mal gezählt, in der 2. Zeile 1-mal abgezogen.
In allen weiteren Zeilen kommt es nicht mehr vor. Dieses Element wird also ebenfalls genau 1-mal gezählt.

Und nun der allgemeine Fall:
a sei in genau k Teilmengen $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$, $k \geq 0$, enthalten, d. h. $a \in A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$. Dann wird es

$$\binom{k}{1}\,(1.\ \text{Zeile}) - \binom{k}{2}\,(2.\ \text{Zeile}) + \binom{k}{3}\,(3.\ \text{Zeile}) - \ldots (-1)^{k+1}\binom{k}{k}\,(k.\ \text{Zeile}) \quad \text{-fach gezählt.}$$

Dieser Term ist gleich 1. Das ist mit (siehe vorige Seite):

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

zu erkennen.