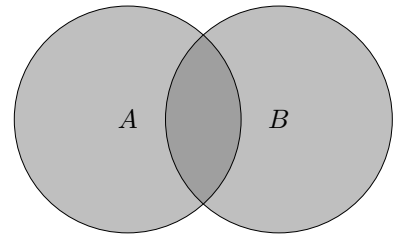
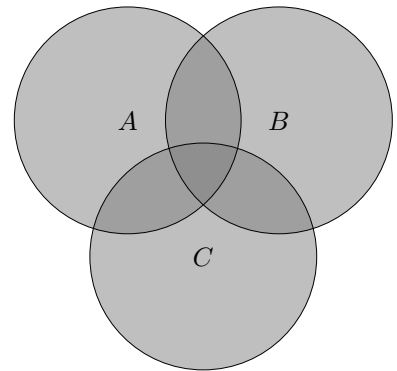


Siebformel von Sylvester

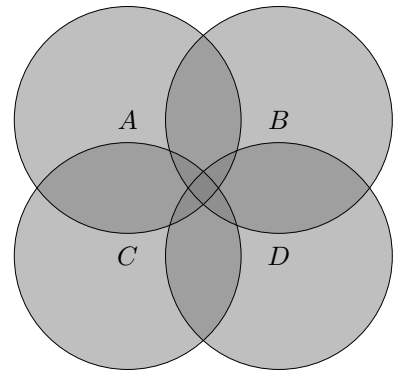
1) $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



2) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$
 $- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
 $+ |A \cap B \cap C|$



3) $|A \cup B \cup C \cup D| = |A| + |B| + |C| + |D|$
 $- |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$
 $+ |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$
 $- |A \cap B \cap C \cap D|$

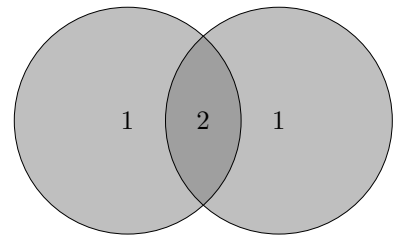


4) $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n|$
 $- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - \dots \quad (i < j)$
 $+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots \quad (i < j < k)$
 $- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots \quad (i < j < k < l)$
 $+ \dots$
 $+ (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|$

Siebformel von Sylvester, Idee

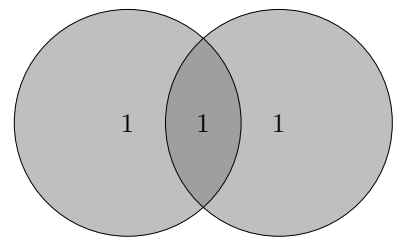
$$1) \quad |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$|A \cup B| \leq |A| + |B|$$



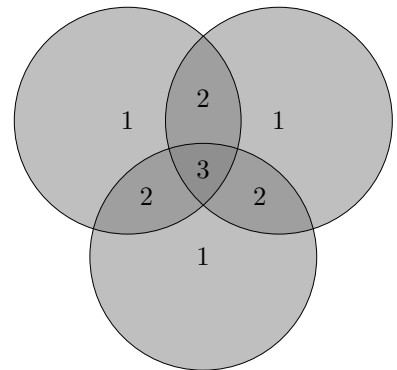
Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft ein Element mit $|A| + |B|$ gezählt wird.

– $|A \cap B|$ führt zum korrekten Ergebnis:

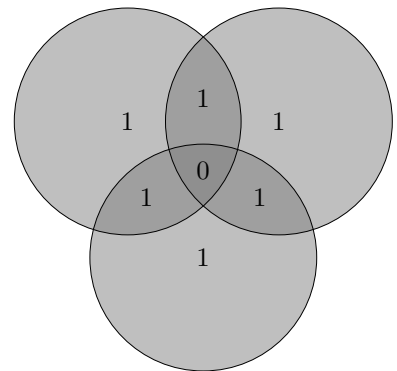


Siebformel von Sylvester, Inklusion und Exklusion

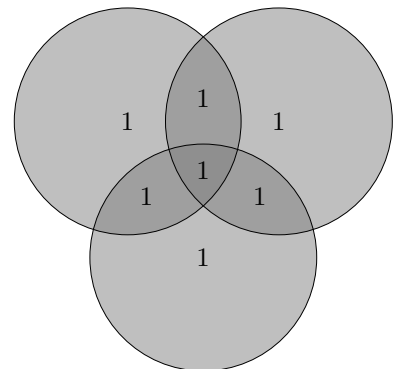
$$\begin{aligned}
 2) \quad |A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\
 &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\
 &\quad + |A \cap B \cap C| \\
 |A \cup B \cup C| &\leq |A| + |B| + |C|
 \end{aligned}$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft ein Element mit $|A| + |B| + |C|$ gezählt wird.
 $- |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$ führt zu einem zu kleinen Ergebnis:



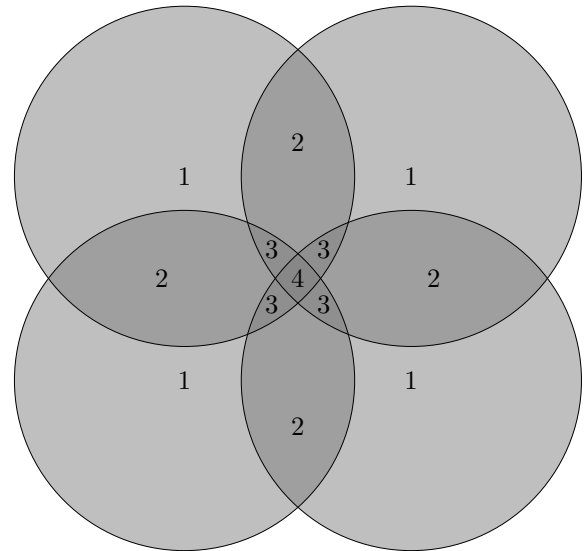
Die Korrektur erfolgt mit $+ |A \cap B \cap C|$.



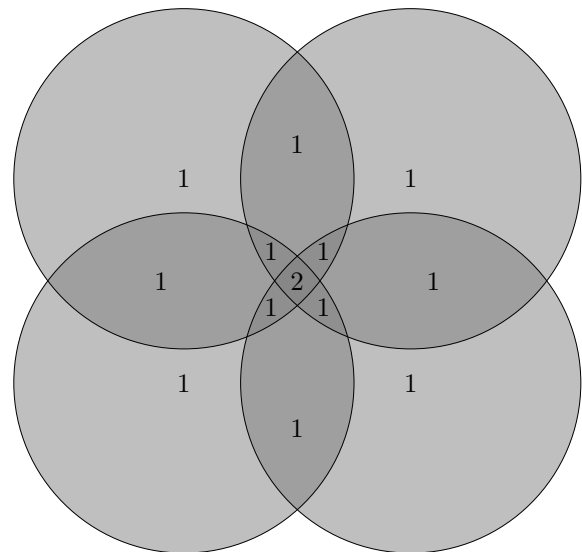
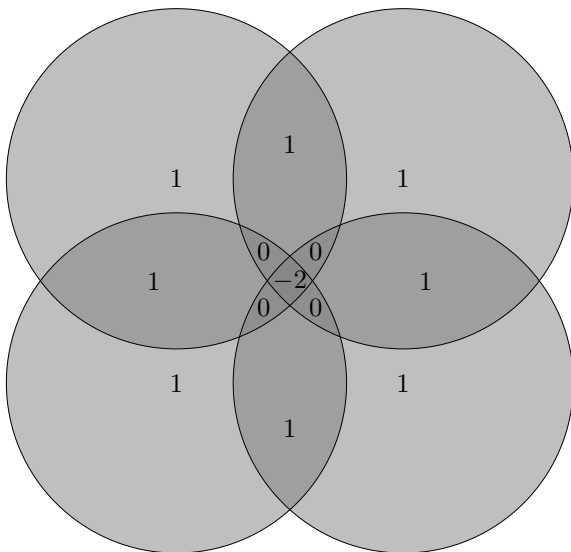
Siebformel von Sylvester, Ein- und Ausschluss

$$\begin{aligned}
 3) \quad |A \cup B \cup C \cup D| &= |A| + |B| + |C| + |D| \\
 &\quad - |A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D| \\
 &\quad + |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D| \\
 &\quad - |A \cap B \cap C \cap D|
 \end{aligned}$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| \leq |A| + |B| + |C| + |D|$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft ein Element mit $|A| + |B| + |C| + |D|$ gezählt wird. $-|A \cap B| - |A \cap C| - |A \cap D| - |B \cap C| - |B \cap D| - |C \cap D|$ führt zu einem zu kleinen Ergebnis,



$+|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|$ zu einem zu großen. Die abschließende Korrektur ist offensichtlich.

Siebformel Schreibweisen

$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - \dots \quad (i < j) \\
 &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots \quad (i < j < k) \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots \quad (i < j < k < l) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|
 \end{aligned}$$

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{k=1}^n |A_k| - \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|$$

Mit der Abkürzung für die Summation über alle r -elementigen Teilmengen $\{i_1, \dots, i_r\}$ von $\{1, \dots, n\}$

$$S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|$$

gilt:

$$\left| \bigcup_{k=1}^n A_k \right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \cdot S_r$$

Beweis der Siebformel

$$\left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \cdot S_r \quad \text{mit} \quad S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über n .
Hierzu schauen wir uns den Übergang von $n = 2$ auf $n = 3$ an.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$\text{z.z. } |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| \\ &= |A \cup B| + |C| - \underbrace{|(A \cup B) \cap C|}_{(A \cap C) \cup (B \cap C)} \end{aligned}$$

Wird nun erneut die Voraussetzung ($n = 2$) auf den ersten und letzten Term der rechten Seite angewandt, so ist die Formel für $n = 3$ zu erkennen.

Der Induktionsschluss von n auf $n + 1$ erfolgt ähnlich.
Der Anfang ist naheliegend, A_{n+1} wird abgespalten.

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \right| &= \left| \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) \cup A_{n+1} \right| \\ &= \left| \bigcup_{j=1}^n A_j \right| + |A_{n+1}| + \underbrace{\left| \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) \cap A_{n+1} \right|}_{\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A_{n+1})} \end{aligned}$$

Die Induktionsvoraussetzung kann auf den ersten und letzten Term der rechten Seite angewandt werden.

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \right| = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \cdot S_r + |A_{n+1}| + \sum_{m=1}^n (-1)^m \cdot S_m^* \quad \text{mit} \quad S_m^* := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m} \cap A_{n+1}|$$

Wir ordnen um und fassen zusammen:

$$\left| \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j \right| = \underbrace{S_1 + |A_{n+1}|}_{\text{Summand für } r=1} + \sum_{r=2}^n (-1)^{r-1} \cdot (S_r + S_{r-1}^*) + (-1)^n \cdot S_n^* \quad \text{Der letzte Term fehlt in der Summe.}$$

Mit

$$S_r + S_{r-1}^* = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n+1} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}| \quad (2 \leq r \leq n) \quad \text{folgt die Behauptung.}$$

In S_r werden die Teilmengen ohne A_{n+1} berücksichtigt, in S_m^* die mit A_{n+1} .

Siebformel Stochastik

Mit der Siebformel können auch Wahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \cdot S_r \quad \text{mit} \quad S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r})$$

Ein wichtiger Spezialfall ergibt sich, wenn für jedes r die Summanden in S_r gleich sind, die Wahrscheinlichkeiten der Durchschnitte $A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}$ also nur von der Anzahl r , nicht aber von der speziellen Wahl der Ereignisse abhängen.

Die Siebformel nimmt dann die folgende Form an:

$$P\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r-1} \cdot \binom{n}{r} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_r)$$

Siebformel Beweis mit Indikatorfunktionen

Sei A ein Ereignis (Teilmenge) in Ω .

Die Funktion auf Ω , die jedem Element von A den Wert 1 und jedem Element von \bar{A} den Wert 0 zuordnet, heißt Indikator von A und wird mit 1_A bezeichnet.

Für den Erwartungswert gilt: $E(1_A) = 1 \cdot P(A) + 0 \cdot P(\bar{A}) = P(A)$

Weiteres:

- 1) $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$
- 2) $1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n} = 1_{A_1} \cdot 1_{A_2} \cdot \dots \cdot 1_{A_n}$
- 3) $1_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = 1 - (1 - 1_{A_1})(1 - 1_{A_2}) \cdot \dots \cdot (1 - 1_{A_n})$

Erläuterung zu 3):

Liegt ω in mindestens einer der Mengen A_i , z.B. $\omega \in A_2$, dann ist $(1 - 1_{A_2}) = 0$ und die rechte Seite ist 1.

Liegt ω in keiner der Mengen A_i , dann sind alle Klammern gleich 1 und die rechte Seite ist 0.

Insbesondere gilt:

$$1_{A \cup B} = 1 - (1 - 1_A)(1 - 1_B)$$

Wir lösen die Klammern auf und beachten 2):

$$1_{A \cup B} = 1_A + 1_B - 1_{A \cap B}$$

Die Erwartungswerte beider Seiten müssen übereinstimmen:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ebenso beweist man:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Lösen wir in 3) die Klammern auf, so ergibt sich:

$$1_{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \sum_{i=1}^n 1_{A_i} - \sum_{i < j} 1_{A_i \cap A_j} + \sum_{i < j < k} 1_{A_i \cap A_j \cap A_k} - \dots \\ (-1)^{n+1} \cdot 1_{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n}$$

Wir bilden wieder die Erwartungswerte und erhalten die Siebformel:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots \\ (-1)^{n+1} \cdot P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)$$

Anzahl der Elemente, die in keiner Teilmenge enthalten sind

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Seien A , B und C Teilmengen von M , dann gilt:

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| &= |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| \\ &= |M \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)| \\ &= |M| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| \\ &= |M| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \end{aligned}$$

mögliche Interpretation:

Auf der Menge M sind drei *Eigenschaften* E_i definiert, so dass für jedes Element feststeht, ob es die Eigenschaft hat oder nicht.

Die Mengen A_i kennzeichnen die Eigenschaften, es soll gelten:

$$A_i = \{m \in M \mid m \text{ hat die Eigenschaft } E_i\}$$

Genau die Elemente der Menge

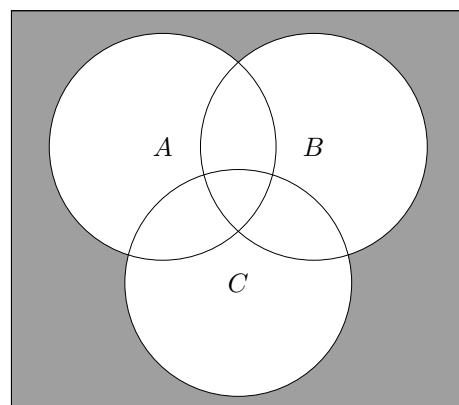
$$\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$$

erfüllen dann keine einzige Eigenschaft.

allgemein:

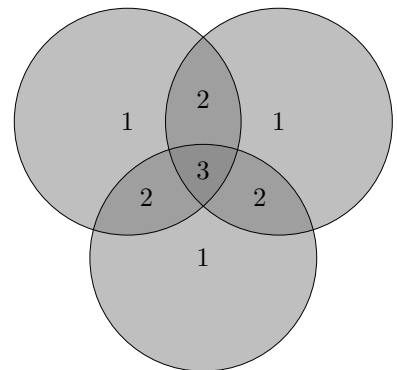
$$\left| \bigcap_{j=1}^n \overline{A_j} \right| = |M| - \sum_{k=1}^n |A_k| + \sum_{i < j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i < j < k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots + (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|$$

$$\left| \bigcap_{j=1}^n \overline{A_j} \right| = |M| + \sum_{r=1}^n (-1)^r \cdot S_r \quad \text{mit} \quad S_r := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|$$

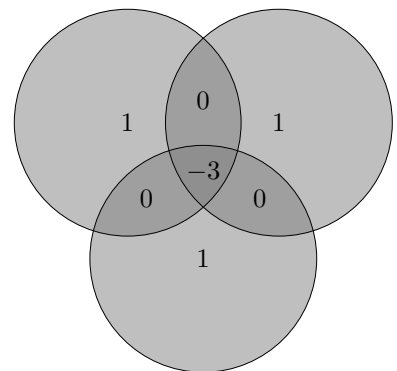


Anzahl $E(1)$ der Elemente, die in genau einer Teilmenge enthalten sind,
bzw. genau eine Eigenschaft erfüllen

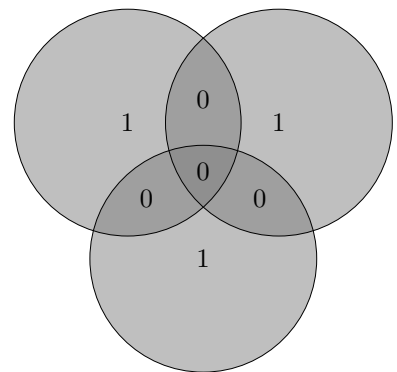
$$E(1) = |A| + |B| + |C| - 2 \cdot (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + 3 \cdot |A \cap B \cap C|$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft ein Element mit $|A| + |B| + |C|$ gezählt wird.
 $- 2 \cdot (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|)$ führt zu einem zu kleinen Ergebnis:

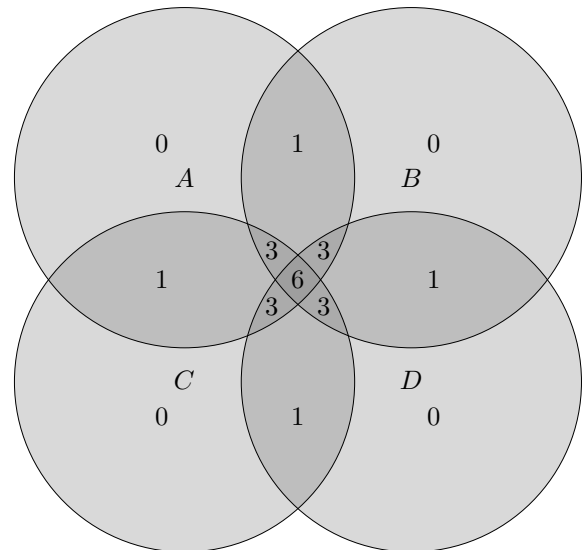


Die Korrektur erfolgt mit $+ 3 \cdot |A \cap B \cap C|$.

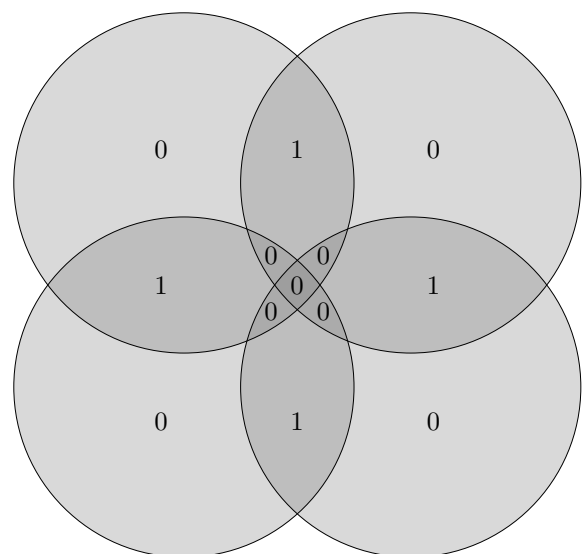
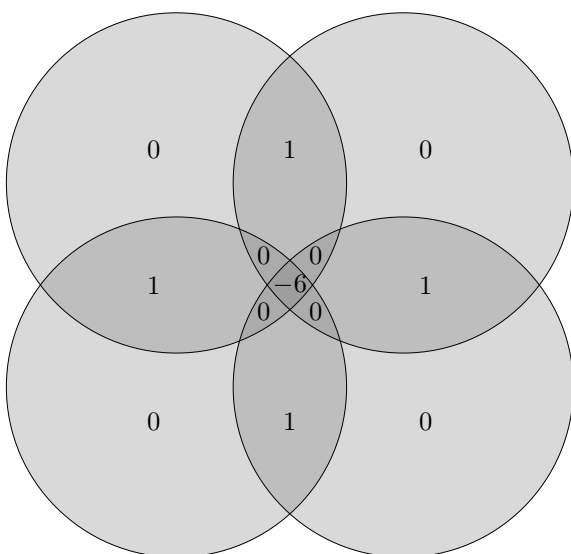


Anzahl $E(2)$ der Elemente, die in genau zwei Teilmengen enthalten sind,
bzw. genau zwei der Eigenschaften erfüllen

$$E(2) = |A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D| \\ - 3 \cdot (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|) \\ + 6 \cdot |A \cap B \cap C \cap D|$$



Die Zahlen in der Grafik geben an, wie oft eine Element mit $|A \cap B| + |A \cap C| + |A \cap D| + |B \cap C| + |B \cap D| + |C \cap D|$ gezählt wird (Tipp Strichliste).



$-3 \cdot (|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap D| + |A \cap C \cap D| + |B \cap C \cap D|)$ führt zur linken Grafik,
 $+6 \cdot |A \cap B \cap C \cap D|$ zur rechten Grafik.

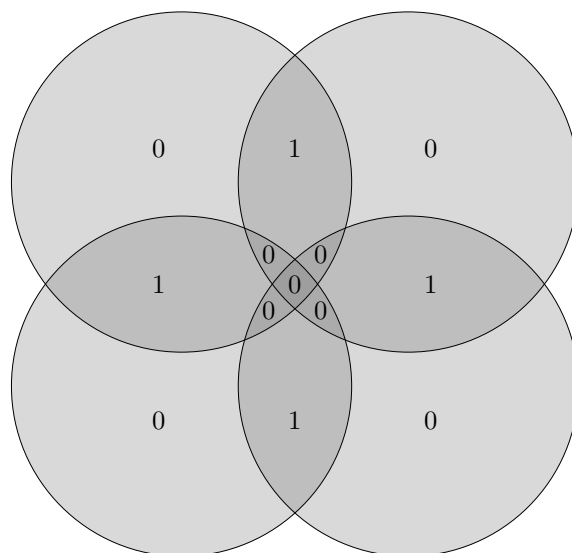
Anzahl $E(m)$ der Elemente, die in genau (d.h. maximal) m Teilmengen enthalten sind, oder genau m der Eigenschaften erfüllen

$$E(m) = W(m) - \binom{m+1}{m} W(m+1) + \binom{m+2}{m} W(m+2) - \dots + (-1)^{n-m} \binom{n}{m} W(n)$$

Für eine Menge A haben wir n Teilmengen A_1, A_2, \dots, A_n gegeben, bzw. alternativ n Eigenschaften.

$$W(r) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} |A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_r}|$$

$W(r)$ ist die Anzahl der Elemente, die in (mindestens) r Teilmengen enthalten sind, bzw. die (mindestens) r Eigenschaften erfüllen.



Beweis

Sei $a \in A$ und sei a in maximal t Teilmengen A_{i_1}, \dots, A_{i_t} , $t \geq 0$, enthalten, d.h. $a \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_t}$. Für $t < m$ wird a auf keiner Seite mitgezählt.

Wenn a in genau $t = m$ Teilmengen enthalten ist, wird es auf jeder Seite genau einmal mitgezählt.

Wenn jedoch $t > m$ ist, wird es in $W(m)$ $\binom{t}{m}$ -fach mitgezählt, in $W(m+1)$ $\binom{t}{m+1}$ -fach usw, insgesamt auf der rechten Seite also

$$\binom{t}{m} - \binom{m+1}{m} \binom{t}{m+1} + \binom{m+2}{m} \binom{t}{m+2} - \dots (-1)^{t-m} \binom{t}{m} \binom{t}{t} \text{ -fach.}$$

Nach einigen Umformungen ist zu erkennen, dass dieser Term Null ist. Mit (überprüfe dies)

$$\binom{k}{m} \binom{t}{k} = \binom{t}{m} \binom{t-m}{t-k}, \quad m \leq k \leq t, \quad \text{kann zunächst } \binom{t}{m} \text{ ausgeklammert werden.}$$

$$\binom{t}{m} \left[\binom{t-m}{t-m} - \binom{t-m}{t-(m+1)} + \binom{t-m}{t-(m+2)} - \dots + (-1)^{t-m} \binom{t-m}{t-t} \right]$$

Um zu sehen, dass die eckige Klammer Null ergibt, wird das Folgende ($n = t - m$) benötigt:

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n} b^n$$

Mit $a = 1$, $b = -1$ folgt:

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

$n = 6$

$$1 - 6 + 15 - 20 + 15 - 6 + 1 = 0$$

$n = 7$

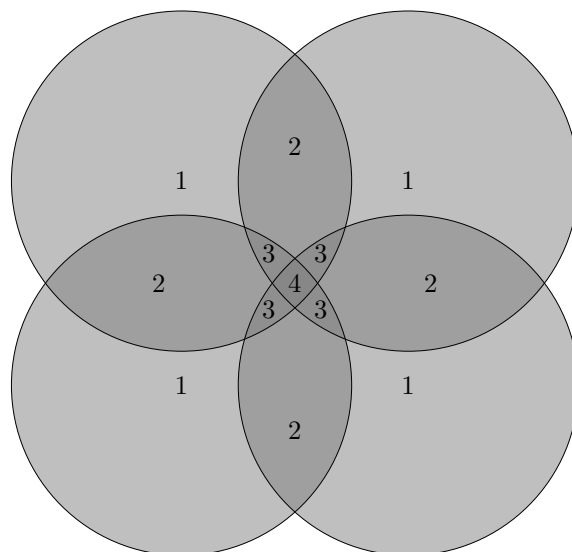
$$1 - 7 + 21 - 35 + 35 - 21 + 7 - 1 = 0$$

$n = 8$

$$1 - 8 + 28 - 56 + 70 - 56 + 28 - 8 + 1 = 0$$

Der vorige Satz von der Inklusion und Exklusion kann noch ein wenig verallgemeinert werden. Hierzu betrachten wir eine Funktion w auf A . Statt die Elemente der jeweiligen Mengen zu zählen, werden die zugehörigen Funktionswerte der Elemente addiert. Im Beweis ändern sich die Schreibweisen geringfügig.

Siebformel einfacher Beweis



$$\begin{aligned}
 |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + |A_3| + \dots + |A_n| \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - \dots \quad (i < j) \\
 &\quad + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots \quad (i < j < k) \\
 &\quad - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \dots \quad (i < j < k < l) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n|
 \end{aligned}$$

Angenommen, $a \in A$ komme nur in genau einer Teilmenge A_i vor, dann wird a auch nur in der 1. Zeile genau 1-mal gezählt.

Nehmen wir nun an, a komme in genau zwei Teilmengen vor, z. B. $a \in A_1 \cap A_2$.

Dann wird es in der 1. Zeile 2-mal gezählt, in der 2. Zeile 1-mal abgezogen.

In allen weiteren Zeilen kommt es nicht mehr vor. Dieses Element wird also ebenfalls genau 1-mal gezählt.

Und nun der allgemeine Fall:

a sei in genau k Teilmengen A_{i_1}, \dots, A_{i_k} , $k \geq 0$, enthalten, d. h. $a \in A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}$. Dann wird es

$$\binom{k}{1} \text{(1. Zeile)} - \binom{k}{2} \text{(2. Zeile)} + \binom{k}{3} \text{(3. Zeile)} - \dots - (-1)^{k+1} \binom{k}{k} \text{(k. Zeile)} \text{ -fach gezählt.}$$

Dieser Term ist gleich 1. Das ist mit (siehe vorige Seite):

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

zu erkennen.