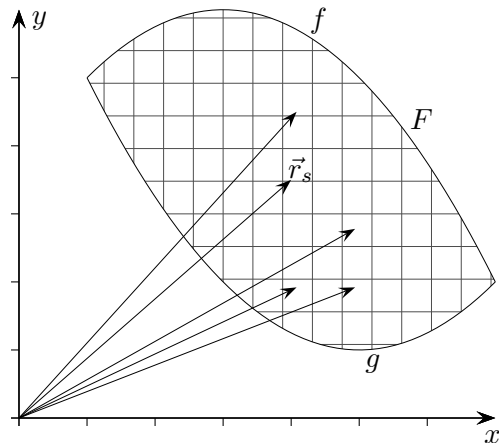


Schwerpunkt

1. Schwerpunkt
2. y -Koordinate des Schwerpunkts
3. Schwerpunkt zweier Elemente
4. Schwerpunkt dreier Elemente
5. Schwerpunkt dreier Elemente kurze Begründung
6. Schwerpunkt eines Dreiecks ohne Seitenhalbierende
7. Schwerpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks
8. Fläche mit Aussparung
9. Schwerpunkt bei Rotation um die x -Achse
10. Schwerpunkt einer Halbkugel
11. Schwerpunkt bei Rotation um die y -Achse ohne Umkehrfunktion
12. Flächenschwerpunkt mit gespiegelter Fläche ohne Umkehrfunktion
13. Flächenschwerpunkt ohne Umkehrfunktion
14. Links

↑ Schwerpunkt



$$\vec{r}_s = \frac{1}{A} \int_F \vec{r} \, dA$$

Der Flächenschwerpunkt ist das mit den Flächenelementen gewichtete Mittel der Ortsvektoren. Entsprechendes gilt für Massen-, Volumen- und Linienschwerpunkte. Hier liegt eine Definition vor und wir fragen uns, ob diese Berechnung mit unserer Vorstellung vom Schwerpunkt übereinstimmt.

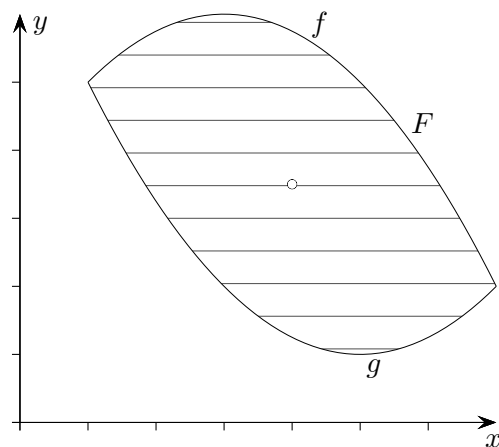
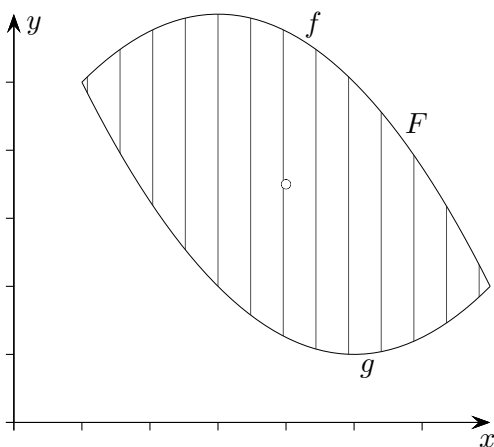
Für die Koordinaten des Schwerpunkts folgt:

$$x_s = \frac{1}{A} \int_F x \, dA, \quad y_s = \frac{1}{A} \int_F y \, dA \quad \text{mit} \quad A = \int_F dA.$$

Das Integralzeichen lese man als Summation. $\vec{r}_s = \frac{1}{A} \int_F \vec{r} \, dA = \frac{1}{A} \int_F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} dA = \frac{1}{A} \begin{pmatrix} \int_F x \, dA \\ \int_F y \, dA \end{pmatrix}$

Wird die Fläche von zwei Funktionen eingeschlossen, erhalten wir mit den Grenzen a und b :

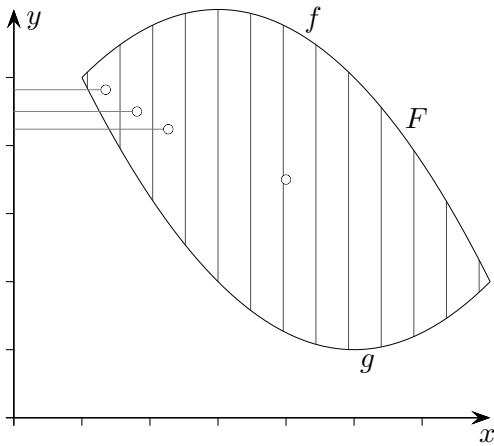
$$x_s = \frac{1}{A} \int_a^b x[f(x) - g(x)] \, dx, \quad y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] \, dx \quad \text{mit} \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)] \, dx$$



y_s ließe sich, falls die Umkehrfunktionen existierten, analog zu x_s durch Integration über y ermitteln. Die angegebene Formel für y_s bedarf einer Erläuterung.

↑

↑ y -Koordinate des Schwerpunkts



$$y_s = \frac{1}{A} \int_F y \, dA$$

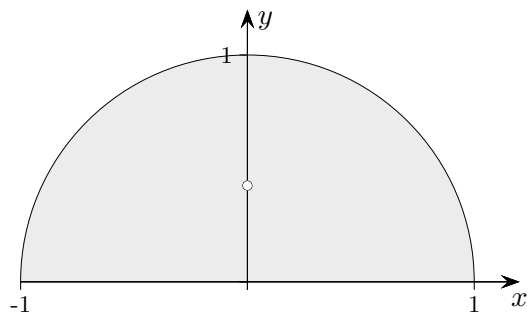
$$y \, dA = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x) + g(x)]}_y \underbrace{[f(x) - g(x)] \, dx}_{dA} = \frac{1}{2}[(f(x))^2 - (g(x))^2] \, dx$$

3. bin. Formel

Es wird ausgenutzt, dass die Schwerpunkte der Flächenelemente mittig liegen.

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] \, dx$$

Schwerpunkt des Halbkreises



$$x_s = 0 \quad \text{Symmetrie}$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1 - x^2) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1 - x^2) \, dx$$

beachte $x^2 + y^2 = 1$

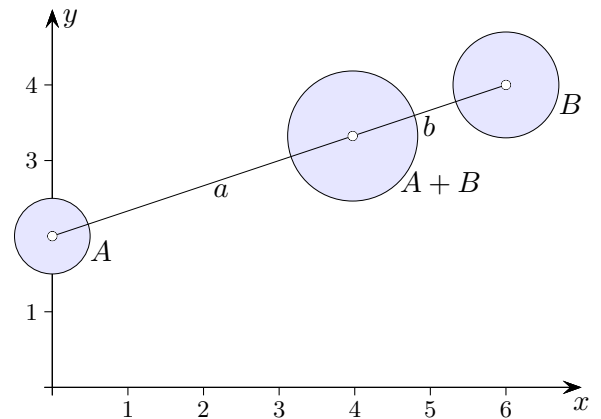
$$= \dots = \frac{4}{3\pi}$$

↑

© Roelfs

↑ Schwerpunkt zweier Elemente

Die Schwerkraft wirkt senkrecht zur xy -Ebene.
 Dann gilt nach dem Hebelgesetz $aA = bB$
 und damit $\vec{r}_A A + \vec{r}_B B = 0$.
 $|\vec{r}_A A| = |\vec{r}_B B|$
 Die kollinearen Vektoren haben
 entgegengesetzte Richtung.

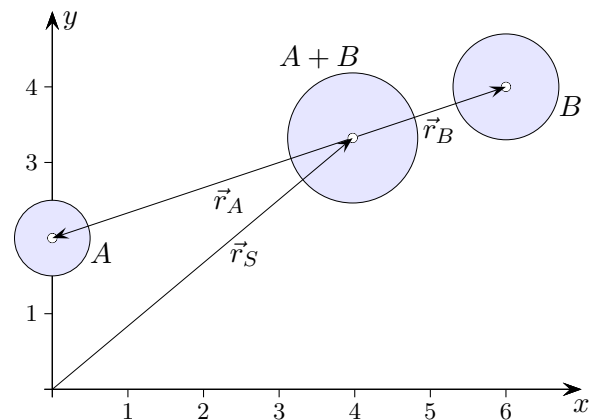


$$\vec{r}_S(A+B) = \vec{r}_S A + \vec{r}_S B$$

Addition von $\vec{r}_A A + \vec{r}_B B = 0$ ergibt:

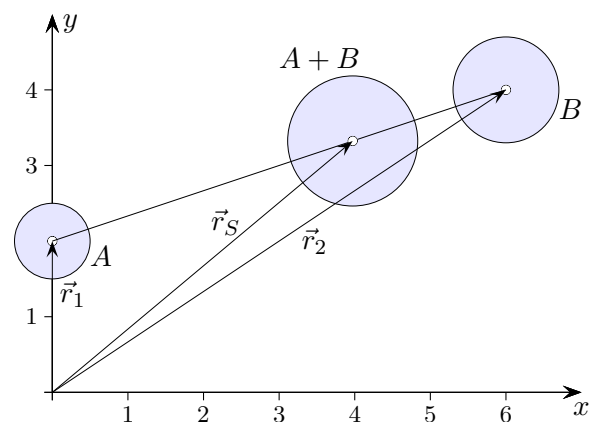
$$\vec{r}_S(A+B) = \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_A)}_{\vec{r}_1} A + \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_B)}_{\vec{r}_2} B$$

$$\implies \vec{r}_S = \frac{1}{A+B} (\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B)$$

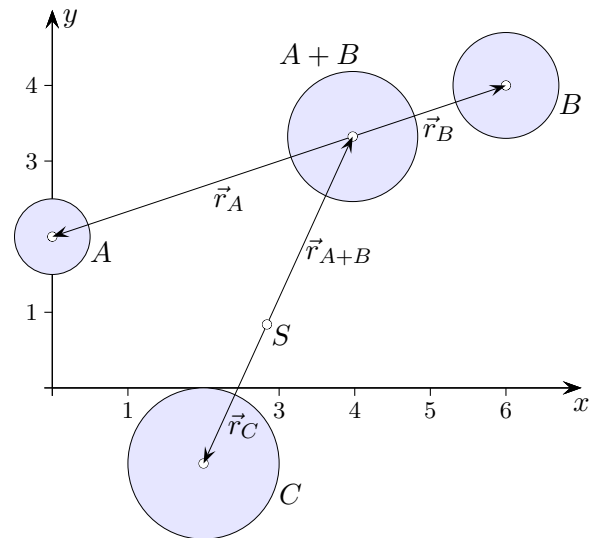


$$\vec{r}_S = \frac{A}{A+B} \vec{r}_1 + \frac{B}{A+B} \vec{r}_2$$

Die Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 werden mit den entsprechenden
 Anteilen gewichtet. Da deren Summe 1 beträgt,
 liegen die Endpunkte von \vec{r}_1 , \vec{r}_2 und \vec{r}_S auf einer Linie.



↑ Schwerpunkt dreier Elemente



Wir wenden das Hebelgesetz für C erneut an.

$$\vec{r}_{A+B}(A+B) + \vec{r}_C C = 0$$

$$\vec{r}_{A+B}A + \vec{r}_{A+B}B + \vec{r}_C C = 0$$

Addition von $\vec{r}_A A + \vec{r}_B B = 0$ ergibt:

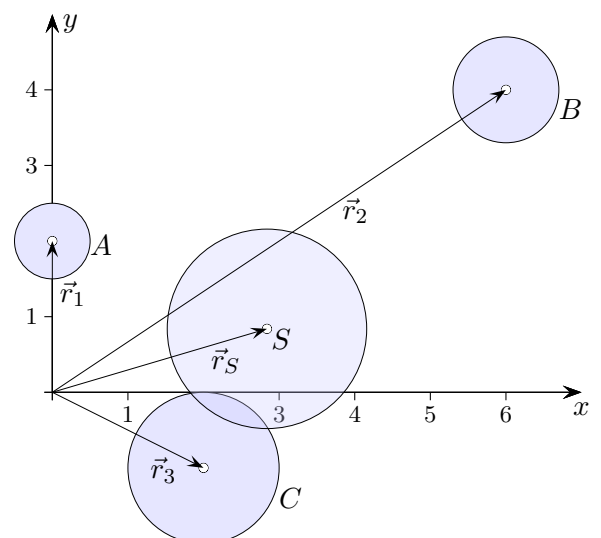
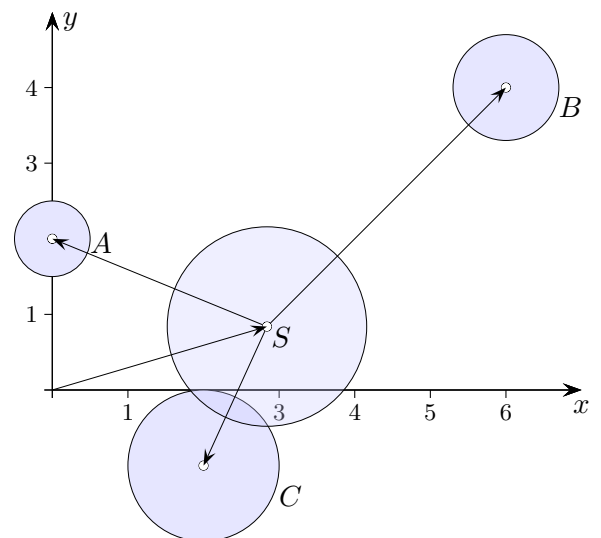
$$(\vec{r}_{A+B} + \vec{r}_A)A + (\vec{r}_{A+B} + \vec{r}_B)B + \vec{r}_C C = 0$$

Dies addieren wir zu:

$$\vec{r}_S(A+B+C) = \vec{r}_S A + \vec{r}_S B + \vec{r}_S C \implies$$

$$\vec{r}_S(A+B+C) = \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_{A+B} + \vec{r}_A)}_{\vec{r}_1} A + \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_{A+B} + \vec{r}_B)}_{\vec{r}_2} B + \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_C)}_{\vec{r}_3} C$$

$$\implies \vec{r}_S = \frac{1}{A+B+C} (\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B + \vec{r}_3 C)$$



Und so geht es weiter.

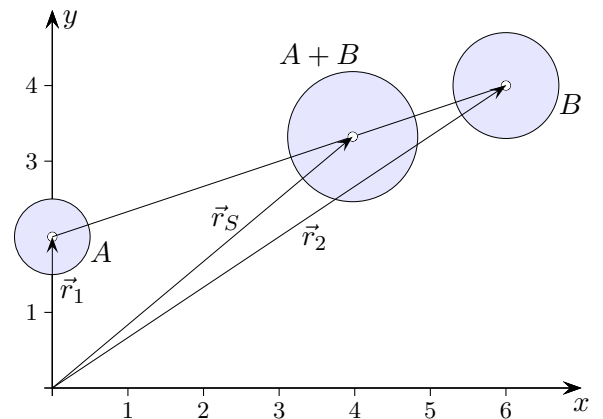
Nun dürfte

$$\vec{r}_s = \frac{1}{A} \int_F \vec{r} dA$$

verständlich sein.

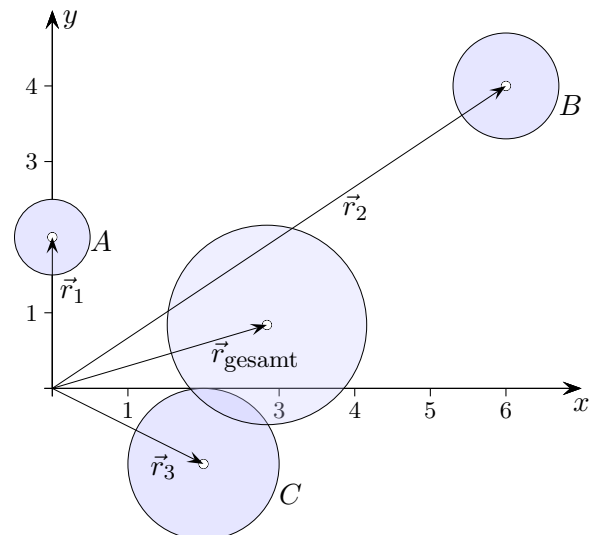
↑

↑ Schwerpunkt dreier Elemente kurze Begründung



Für zwei Elemente war:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{A+B} (\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B)$$



Wir wenden die Überlegung für zwei Elemente für ein drittes Element C erneut an.

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\text{gesamt}} &= \frac{1}{(A+B)+C} (\vec{r}_S(A+B) + \vec{r}_3 C) \\ &= \frac{1}{A+B+C} (\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B + \vec{r}_3 C) \end{aligned}$$

Für beliebig viele Elemente gilt dann:

$$\vec{r}_{\text{gesamt}} = \frac{1}{\sum_i A_i} \sum_i A_i \vec{r}_i$$

Die Koordinaten des Schwerpunkts (\bar{x}, \bar{y}) sind:

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_i A_i} \sum_i A_i x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{\sum_i A_i} \sum_i A_i y_i$$

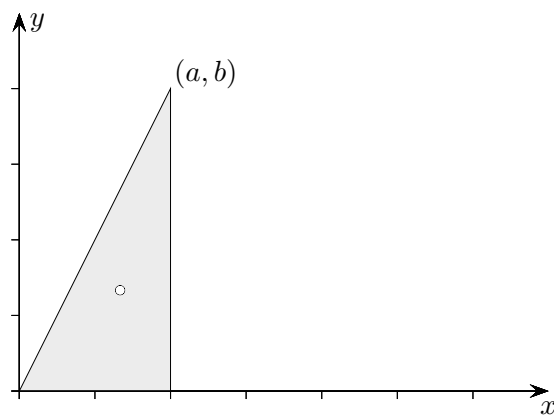
Nun dürfte

$$\vec{r}_s = \frac{1}{A} \int_F \vec{r} \, dA \quad \text{verständlich sein.}$$

↑ Schwerpunkt eines Dreiecks

$$x_s = \frac{2}{ab} \int_0^a \frac{b}{a} x^2 dx = \dots = \frac{2}{3}a$$

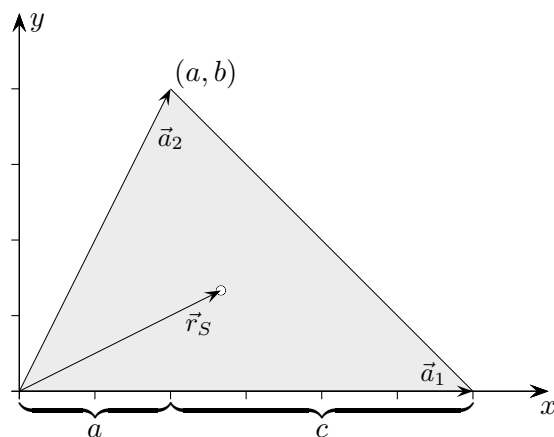
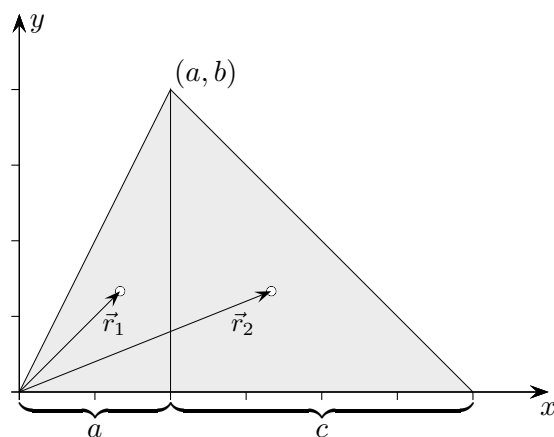
$$y_s = \frac{1}{3}b \quad \frac{2}{3}b \text{ von } (a, b) \text{ betrachtet}$$



$$\vec{r}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}_S &= \frac{2}{ab+cb} \left[\vec{r}_1 \frac{ab}{2} + \vec{r}_2 \frac{cb}{2} \right] \\ &= \dots = \frac{1}{3} \left[\begin{pmatrix} a+c \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{3} [\vec{a}_1 + \vec{a}_2] \end{aligned}$$

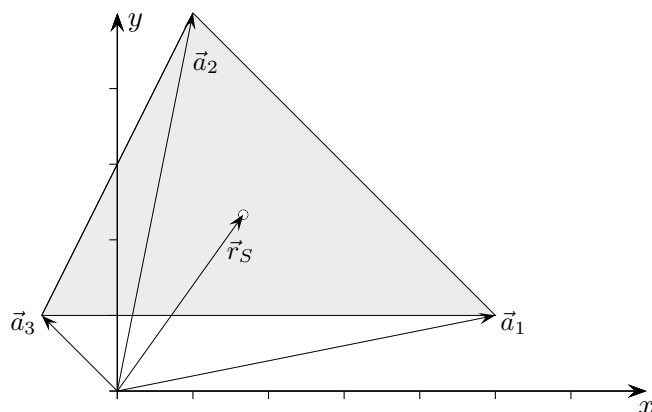


Das Dreieck kann mit \vec{a}_3 verschoben werden.

$$\vec{r}_S - \vec{a}_3 = \frac{1}{3} [(\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)]$$

...

$$\vec{r}_S = \frac{1}{3} [\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3]$$

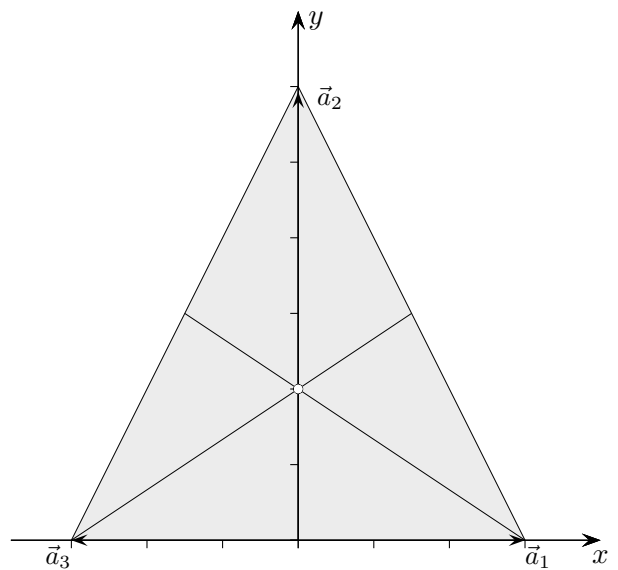
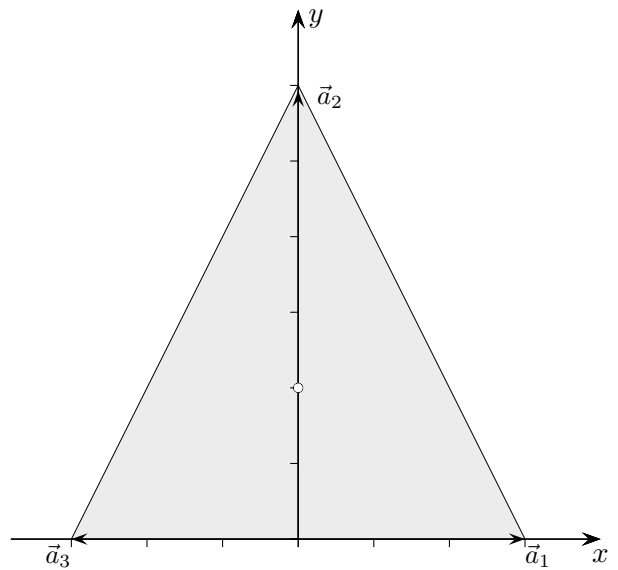


↑

↑ Schwerpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks

$$\begin{aligned}\vec{r}_S &= \frac{1}{3} [\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3] \\ &= \frac{1}{3} \vec{a}_2\end{aligned}$$

Die Höhe wird im Verhältnis 1:2 geteilt.



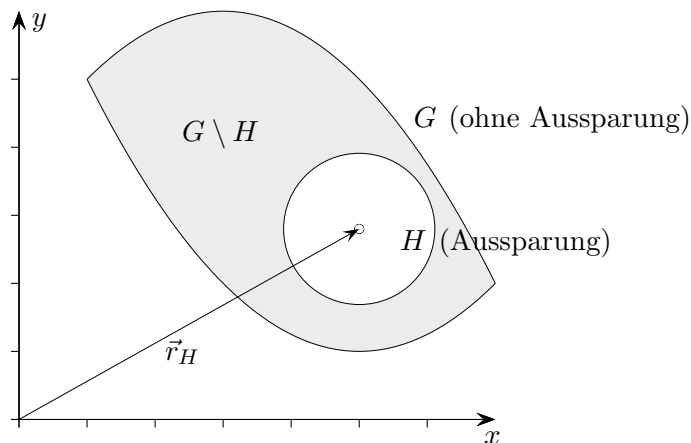
Bei jedem Dreieck ist der Schwerpunkt zugleich der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Diese werden im Verhältnis 1:2 geteilt, siehe [Lineare Unabhängigkeit](#).

↑ Fläche mit Aussparung

$$\begin{aligned}\vec{r}_s &= \frac{1}{A_{G \setminus H}} \int_{G \setminus H} \vec{r} \, dA \\ &= \frac{1}{A_{G \setminus H}} \left(\int_G \vec{r} \, dA - \int_H \vec{r} \, dA \right)\end{aligned}$$

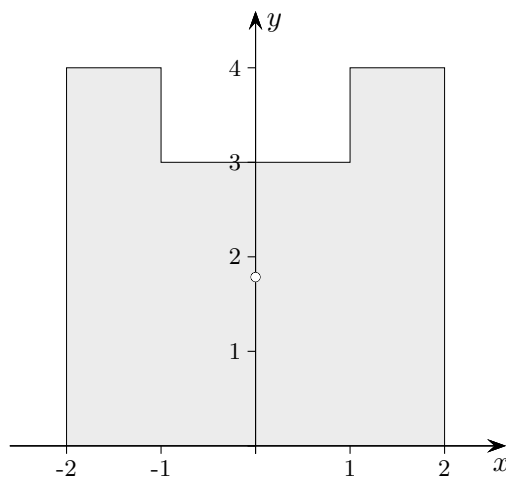
In diesem Fall gilt:

$$\int_H \vec{r} \, dA = \vec{r}_H \pi r^2 \quad \text{Kreisradius } r$$

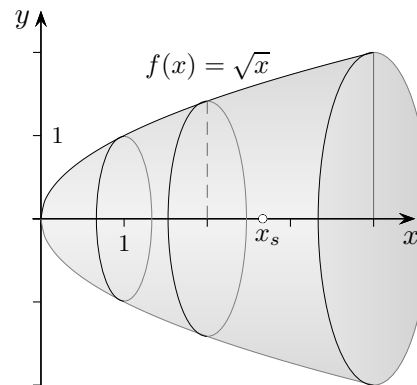


Eine Aussparung geht einfach mit einem negativen Vorzeichen in die Rechnung ein.

$$\begin{aligned}y_s &= \frac{1}{A} (y_1 A_1 - y_2 A_2) \\ &= \frac{1}{16 - 2} \left(2 \cdot 16 - \frac{7}{2} \cdot 2 \right) \\ &= \frac{25}{14}\end{aligned}$$



↑ Schwerpunkt bei Rotation um die x -Achse



Die Begründung der Formel $\vec{r}_s = \frac{1}{A} \int_F \vec{r} dA$ kann für Körper K angepasst werden.

$$\vec{r}_s = \frac{1}{V} \int_K \vec{r} dV$$

$$x_s = \frac{1}{V} \int_a^b x dV \quad \text{mit} \quad V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

$$dV = \pi (f(x))^2 dx \quad \text{für Rotationskörper mit Rotation um die } x\text{-Achse}$$

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_a^b x (f(x))^2 dx$$

Beispiel

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = 8\pi$$

$$x_s = \frac{\pi}{V} \int_0^4 x (\sqrt{x})^2 dx = \frac{8}{3}$$

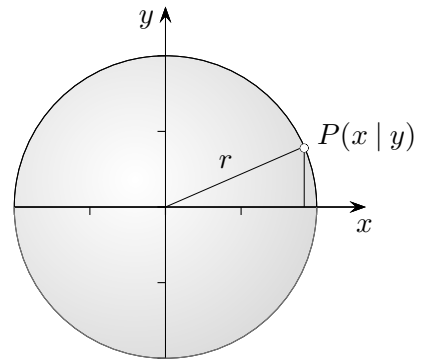
↑ Schwerpunkt einer Halbkugel

Für einen Punkt $P(x | y)$ auf dem Kreis mit dem Radius r gilt:
 $x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras).

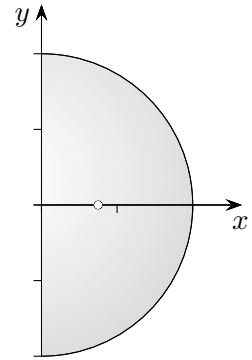
Nach y aufgelöst, ergibt sich: $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

d. h. $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-r}^r (\sqrt{r^2 - x^2})^2 dx \\ &= 2\pi \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \dots = \frac{4}{3}\pi r^3 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x_s &= \frac{\pi}{V} \int_a^b x (f(x))^2 dx \\ &= \frac{3}{2r^3} \int_0^r x (r^2 - x^2) dx \\ &= \dots = \frac{3}{8}r \end{aligned}$$



↑ Schwerpunkt bei Rotation um die y -Achse ohne Umkehrfunktion

Der Körper wird durch horizontale Zylinder unterteilt. Betrachte hierzu ein infinitesimales Volumenelement.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

Das ergibt die Volumenformel

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 \cdot f'(x) dx \quad \text{genauer wäre } |f'(x)| \text{ statt } f'(x)$$

Der Schwerpunkt eines infinitesimalen Zylinders liegt auf der y -Achse in Höhe $f(x)$. Damit erhalten wir für den Schwerpunkt:

$$y_s = \frac{\pi}{V_y} \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$$

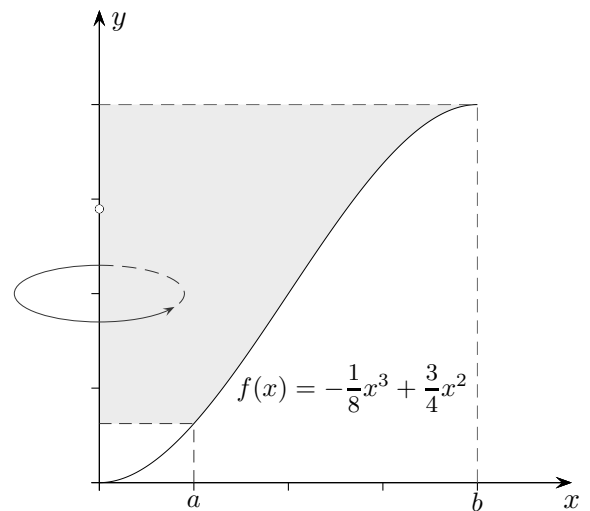
Für das Beispiel mit $a = 1$ und $b = 4$:

$$V_y \approx 59,376$$

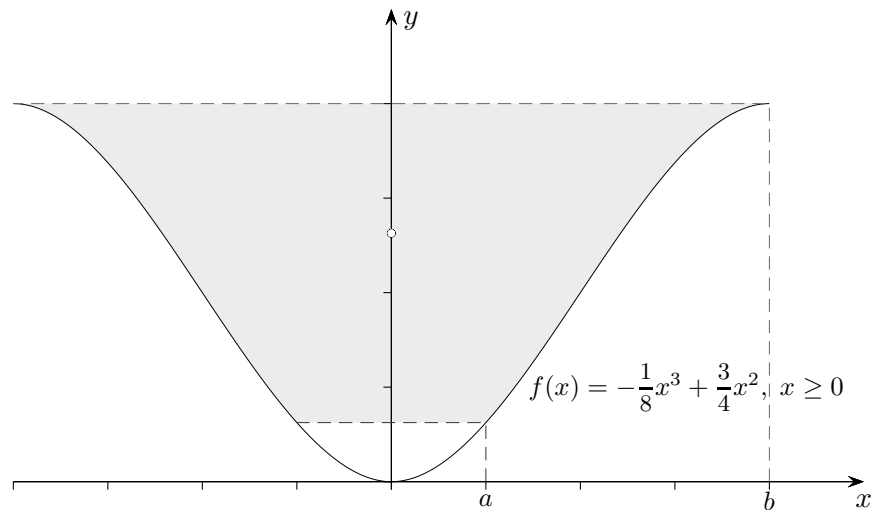
$$y_s \approx 2,896$$

Möglicherweise hätte man y_s etwas niedriger vermutet.

Jedoch ist die Fläche oberhalb der horizontal durch y_s verlaufenden Schwerelinie um ca. 10% größer als die unterhalb liegende Fläche. Das entsprechende Rotationsvolumen oberhalb ist um ca. 34% größer als das Untere.



↑ Flächenschwerpunkt mit gespiegelter Fläche ohne Umkehrfunktion



Die Fläche wird durch horizontale Rechtecke unterteilt.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Flächenelement.

$$A_{\text{Rechteck}} = 2x \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

Das ergibt die Flächenformel

$$A = \int_a^b 2x \cdot f'(x) dx \quad \text{genauer wäre } |f'(x)| \text{ statt } f'(x)$$

Der Schwerpunkt eines infinitesimalen Rechtecks liegt auf der y -Achse in Höhe $f(x)$.
Damit erhalten wir für den Schwerpunkt:

$$y_s = \frac{1}{A} \int_a^b 2x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$$

Die 2 fällt heraus. Die Spiegelung ist für y_s ohne Belang, siehe nächste Seite.

Für das Beispiel mit $a = 1$ und $b = 4$:

$$A \approx 15,188$$

$$y_s \approx 2,629$$

↑

↑ Flächenschwerpunkt ohne Umkehrfunktion

Die Fläche wird durch horizontale Rechtecke unterteilt.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Flächenelement.

$$A_{\text{Rechteck}} = x \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}$$

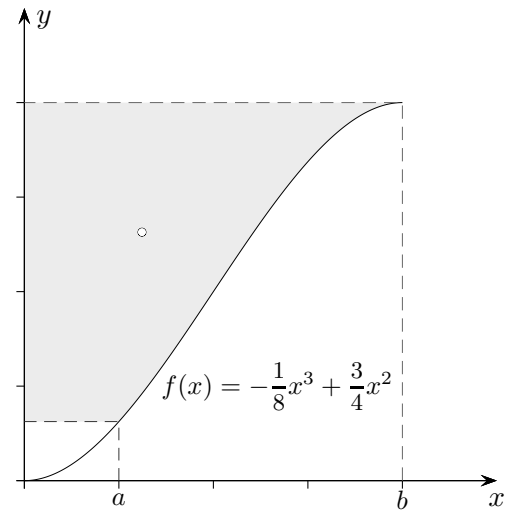
Das ergibt die Flächenformel

$$A = \int_a^b x \cdot f'(x) dx \quad \text{genauer wäre } |f'(x)| \text{ statt } f'(x)$$

Damit erhalten wir für den Schwerpunkt (f monoton steigend):

$$y_s = \frac{1}{A} \int_a^b x \cdot f(x) \cdot f'(x) dx$$

$$x_s = \frac{1}{A} \left[\frac{a^2}{2} \cdot [f(b) - f(a)] + \int_a^b x [f(b) - f(x)] dx \right]$$



Für das Beispiel mit $a = 1$ und $b = 4$:

$$A \approx 7,594$$

$$y_s \approx 2,629$$

$$x_s \approx 1,244$$

Startseite

Schwerpunkt eines Dreiecks

Erläuterungen Stefan Gössner

Aufgaben Stefan Gössner

Doppelintegral Schwerpunkt Walter Farkas

Schwerpunkt ebener Flächen Lubov Vassilevskaya Teil 1 Teil 2 Teil 3

Schwerpunkt Rotationskörper Lubov Vassilevskaya