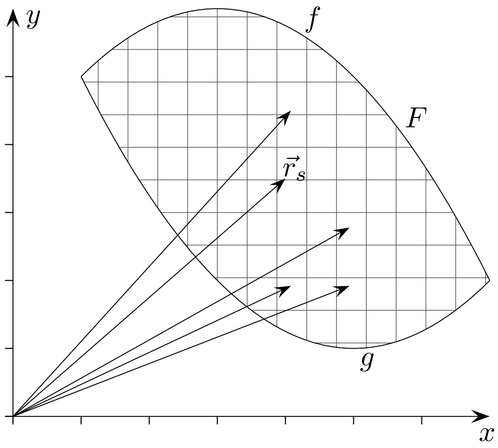
Schwerpunkt

↑ Schwerpunkt



$$\vec{r}_s = \frac{1}{A}\int_F \vec{r}\,\mathrm{d}A$$

Der Flächenschwerpunkt ist das mit den Flächenelementen gewichtete Mittel der Ortsvektoren. Entsprechendes gilt für Massen-, Volumen und Linienschwerpunkte. Hier liegt eine Definition vor und wir fragen uns, ob diese Berechnung mit unserer Vorstellung vom Schwerpunkt übereinstimmt.

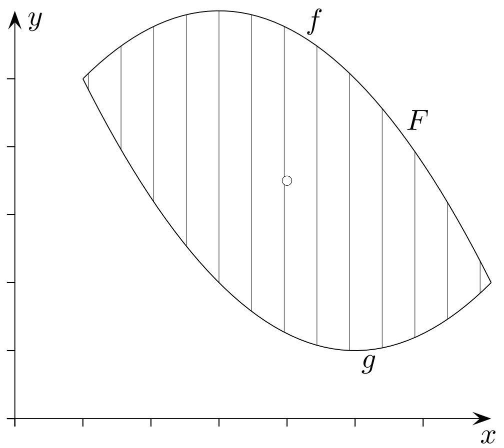
Für die Koordinaten des Schwerpunkts folgt:

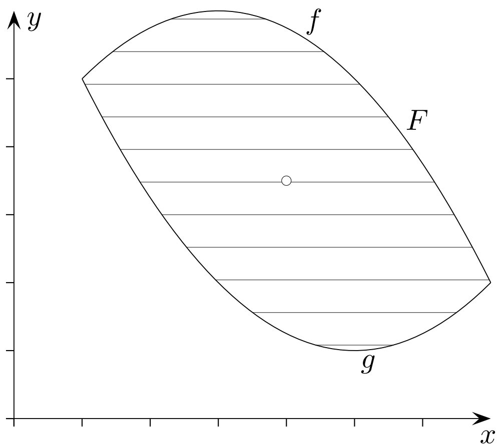
$$x_s = \frac{1}{A}\int_F x\,\mathrm{d}A, \quad y_s = \frac{1}{A}\int_F y\,\mathrm{d}A \qquad \text{mit} \quad A = \int_F \mathrm{d}A.$$

Das Integralzeichen lese man als Summation. $\vec{r}_s = \frac{1}{A}\int_F \vec{r}\,\mathrm{d}A = \frac{1}{A}\int_F \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mathrm{d}A = \frac{1}{A}\begin{pmatrix} \int_F x\,\mathrm{d}A \\ \int_F y\,\mathrm{d}A \end{pmatrix}$

Wird die Fläche von zwei Funktionen eingeschlossen, erhalten wir mit den Grenzen a und b:

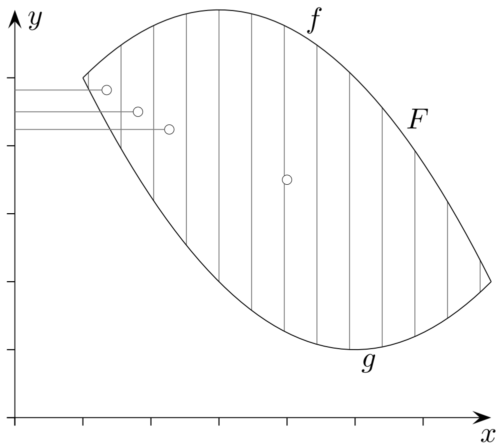
$$x_s = \frac{1}{A}\int_a^b x[f(x) - g(x)]\,\mathrm{d}x, \quad y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2]\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$$





y_s ließe sich, falls die Umkehrfunktionen existierten, analog zu x_s durch Integration über y ermitteln. Die angegebene Formel für y_s bedarf einer Erläuterung.

↑ y-Koordinate des Schwerpunkts



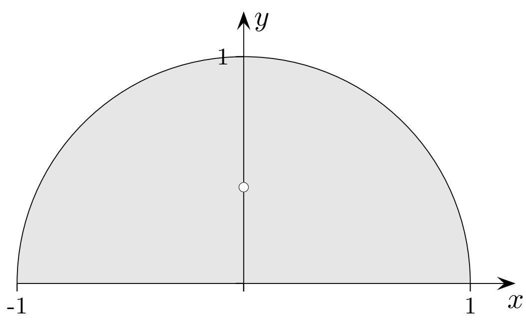
$$y_s = \frac{1}{A}\int_F y\,\mathrm{d}A$$

$$y\,\mathrm{d}A = \underbrace{\frac{1}{2}[f(x)+g(x)]}_{y}\,\underbrace{[f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}A} = \frac{1}{2}[(f(x))^2-(g(x))^2]\,\mathrm{d}x \qquad \text{3. bin. Formel}$$

Es wird ausgenutzt, dass die Schwerpunkte der Flächenelemente mittig liegen.

$$y_s = \frac{1}{2A}\int_a^b [(f(x))^2-(g(x))^2]\,\mathrm{d}x$$

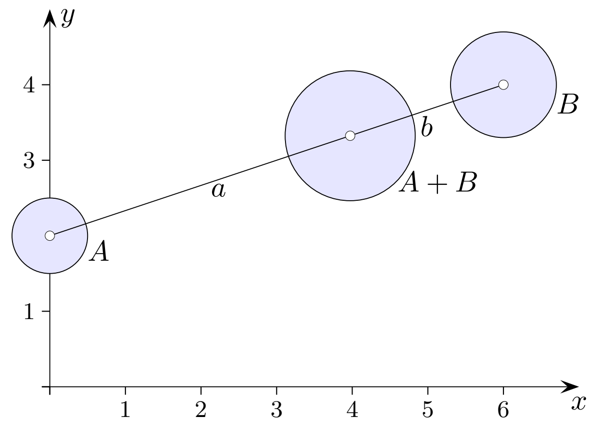
Schwerpunkt des Halbkreises



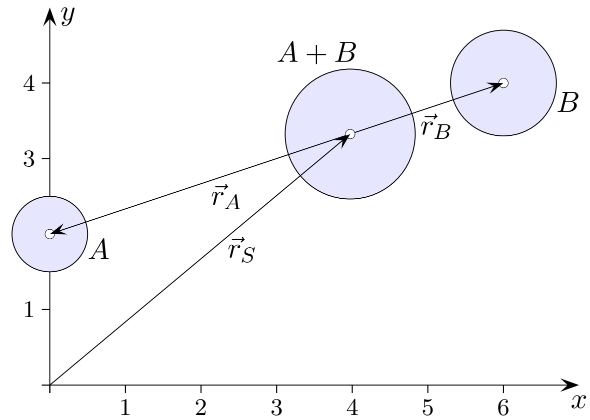
$$x_s = 0 \qquad \text{Symmetrie}$$

$$\begin{aligned} y_s &= \frac{1}{2A}\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^1(1-x^2)\,\mathrm{d}x \qquad \text{beachte} \quad x^2+y^2=1 \\ &= \ldots = \frac{4}{3\pi} \end{aligned}$$

↑ Schwerpunkt zweier Elemente



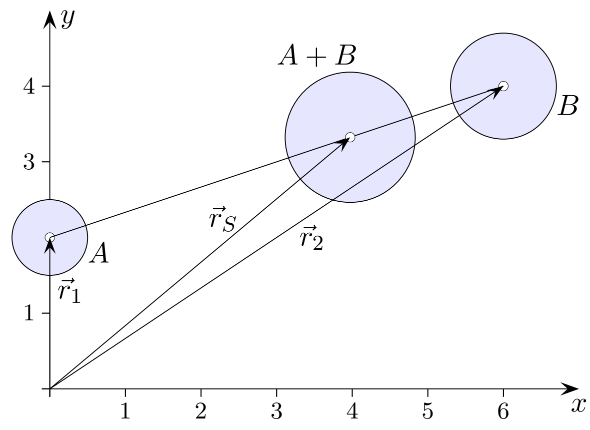
Die Schwerkraft wirkt senkrecht zur xy-Ebene.
Dann gilt nach dem Hebelgesetz $aA = bB$
und damit $\vec{r}_A A + \vec{r}_B B = 0$.
$|\vec{r}_A A| = |\vec{r}_B B|$
Die kollinearen Vektoren haben
entgegengesetzte Richtung.



$\vec{r}_S(A+B) = \vec{r}_S A + \vec{r}_S B$
Addition von $\vec{r}_A A + \vec{r}_B B = 0$ ergibt:

$$\vec{r}_S(A+B) = \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_A)}_{\vec{r}_1} A + \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_B)}_{\vec{r}_2} B$$

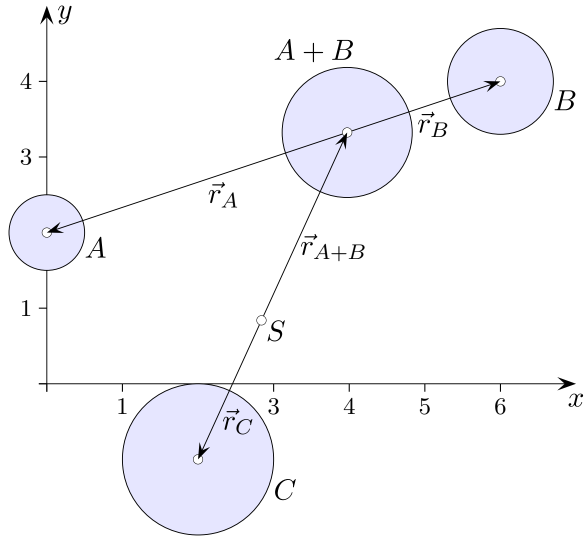
$$\Longrightarrow \quad \vec{r}_S = \frac{1}{A+B}\,(\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B)$$



$$\vec{r}_S = \frac{A}{A+B}\,\vec{r}_1 + \frac{B}{A+B}\,\vec{r}_2$$

Die Ortsvektoren $\vec{r}_1$ und $\vec{r}_2$ werden mit den entsprechenden
Anteilen gewichtet. Da deren Summe 1 beträgt,
liegen die Endpunkte von $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ und $\vec{r}_S$ auf einer Linie.

↑ Schwerpunkt dreier Elemente

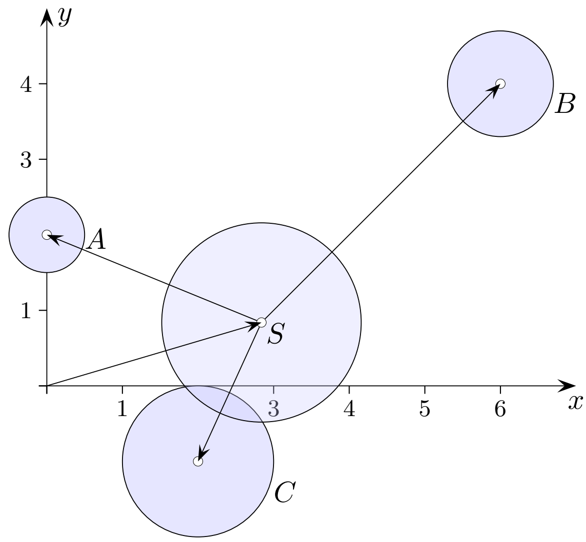


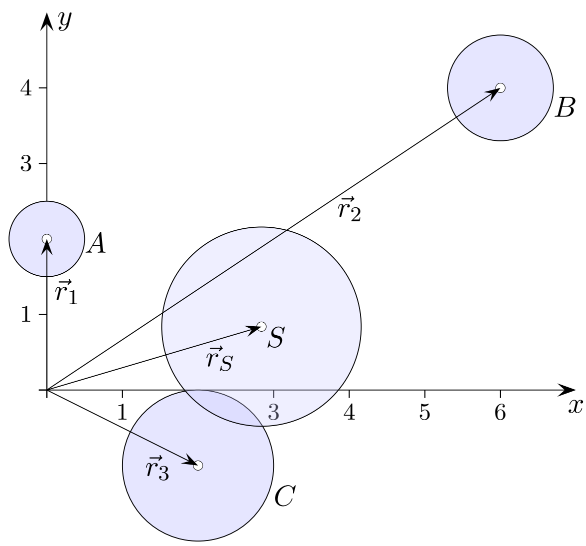
Wir wenden das Hebelgesetz für C erneut an.
$\vec{r}_{A+B}(A+B) + \vec{r}_C C = 0$
$\vec{r}_{A+B} A + \vec{r}_{A+B} B + \vec{r}_C C = 0$
Addition von $\vec{r}_A A + \vec{r}_B B = 0$ ergibt:
$(\vec{r}_{A+B} + \vec{r}_A)A + (\vec{r}_{A+B} + \vec{r}_B)B + \vec{r}_C C = 0$

Dies addieren wir zu:
$\vec{r}_S(A+B+C) = \vec{r}_S A + \vec{r}_S B + \vec{r}_S C \quad \Longrightarrow$

$$\vec{r}_S(A+B+C) = \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_{A+B} + \vec{r}_A)}_{\vec{r}_1} A + \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_{A+B} + \vec{r}_B)}_{\vec{r}_2} B + \underbrace{(\vec{r}_S + \vec{r}_C)}_{\vec{r}_3} C$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{r}_S = \frac{1}{A+B+C}\,(\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B + \vec{r}_3 C)$$



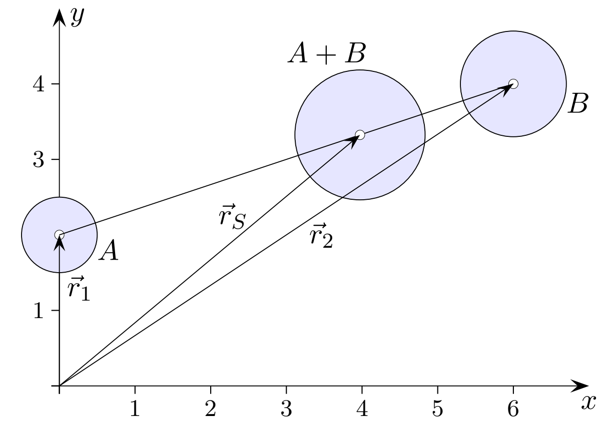


Und so geht es weiter.
Nun dürfte

$$\vec{r}_s = \frac{1}{A}\int_F \vec{r}\,\mathrm{d}A$$

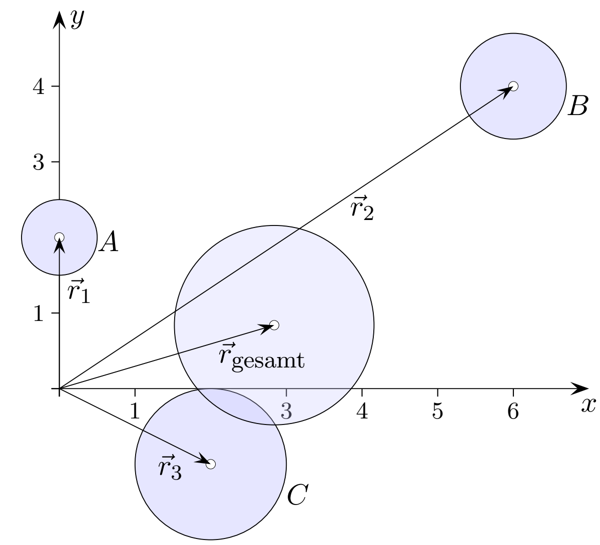
verständlich sein.

↑ Schwerpunkt dreier Elemente kurze Begündung



Für zwei Elemente war:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{A+B}\left(\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B\right)$$



Wir wenden die Überlegung für zwei Elemente für ein drittes Element C erneut an.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{\text{gesamt}} &= \frac{1}{(A+B)+C}\Big(\vec{r}_S(A+B) + \vec{r}_3 C\Big)\\ &= \frac{1}{A+B+C}\Big(\vec{r}_1 A + \vec{r}_2 B + \vec{r}_3 C\Big)\end{aligned}$$

Für beliebig viele Elemente gilt dann:

$$\vec{r}_{\text{gesamt}} = \frac{1}{\sum\limits_i A_i}\sum_i A_i \vec{r}_i$$

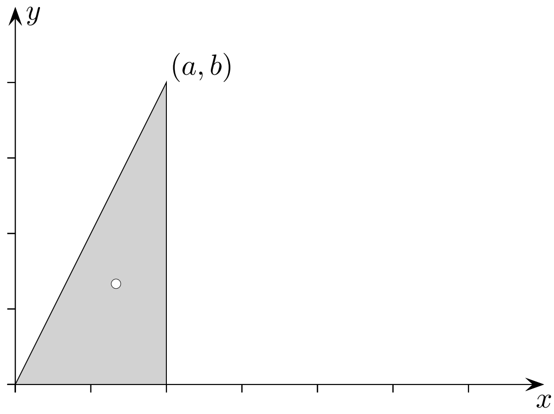
Die Koordinaten des Schwerpunkts $(\overline{x}, \overline{y})$ sind:

$$\overline{x} = \frac{1}{\sum\limits_i A_i}\sum_i A_i x_i, \quad \overline{y} = \frac{1}{\sum\limits_i A_i}\sum_i A_i y_i$$

Nun dürfte

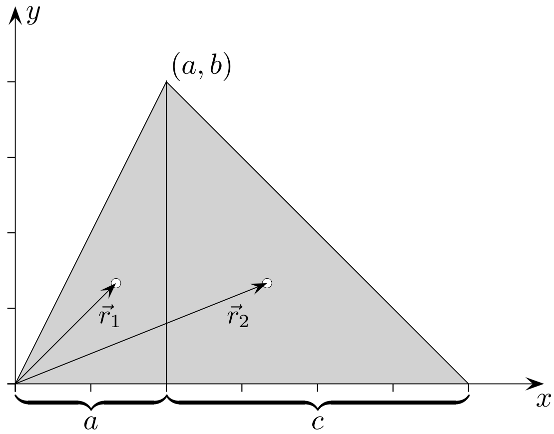
$$\vec{r}_s = \frac{1}{A}\int_F \vec{r}\,\mathrm{d}A$$ verständlich sein.

↑ Schwerpunkt eines Dreiecks



$$x_s = \frac{2}{ab}\int_0^a \frac{b}{a}x^2 \,\mathrm{d}x = \ldots = \frac{2}{3}a$$

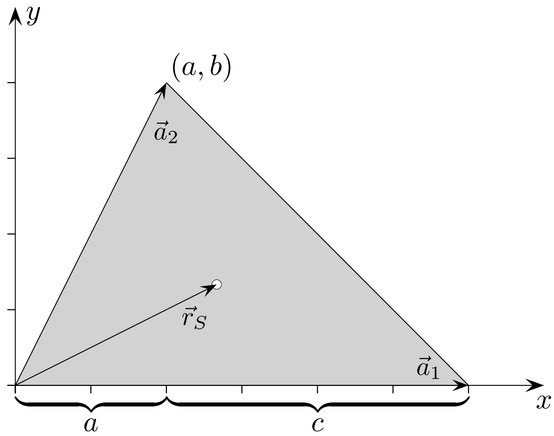
$$y_s = \frac{1}{3}b \qquad\qquad \frac{2}{3}b \text{ von } (a,b) \text{ betrachtet}$$



$$\vec{r}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2a\\ b\end{pmatrix}$$

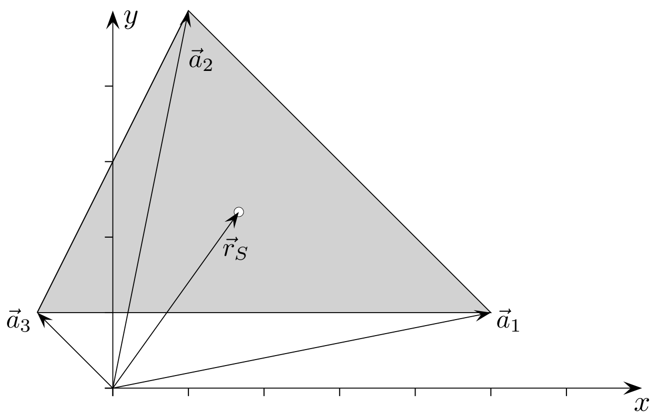
$$\vec{r}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}c\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_S &= \frac{2}{ab+cb}\left[\vec{r}_1\,\frac{ab}{2} + \vec{r}_2\,\frac{cb}{2}\right]\\ &= \ldots = \frac{1}{3}\left[\begin{pmatrix}a+c\\ 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\right]\\ &= \frac{1}{3}\left[\vec{a}_1 + \vec{a}_2\right]\end{aligned}$$

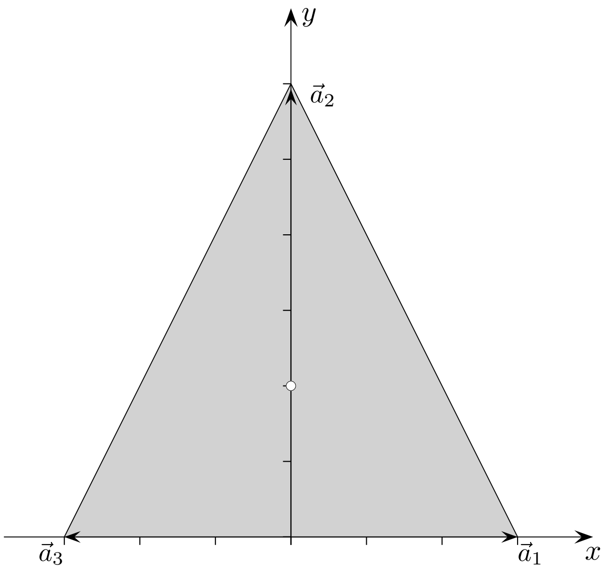


Das Dreieck kann mit $\vec{a}_3$ verschoben werden.

$$\begin{aligned}\vec{r}_S - \vec{a}_3 &= \frac{1}{3}\left[(\vec{a}_1 - \vec{a}_3) + (\vec{a}_2 - \vec{a}_3)\right]\\ &\ldots\\ \vec{r}_S &= \frac{1}{3}\left[\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\right]\end{aligned}$$



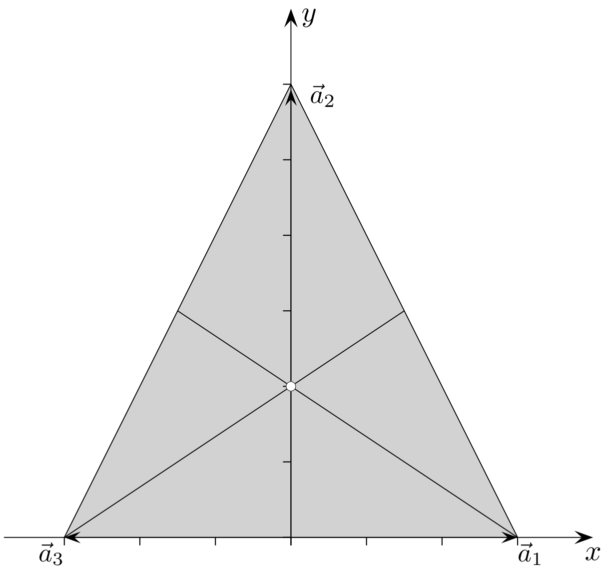
↑ Schwerpunkt eines gleichschenkligen Dreiecks



$$\vec{r}_S = \frac{1}{3}\left[\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3\right]$$

$$= \frac{1}{3}\vec{a}_2$$

Die Höhe wird im Verhältnis 1:2 geteilt.

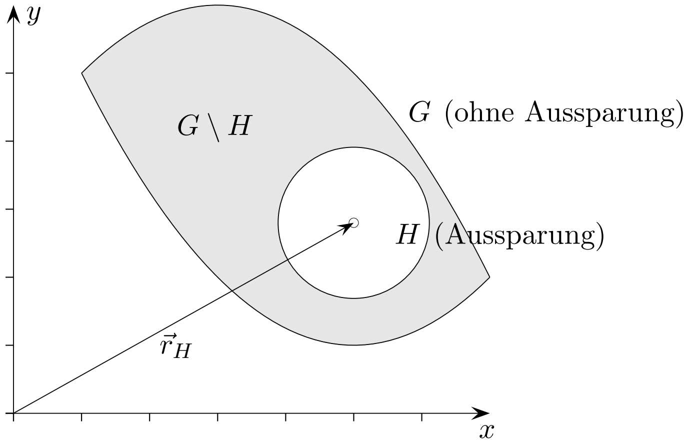


Bei jedem Dreieck ist der Schwerpunkt zugleich
der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden.
Diese werden im Verhältnis 1:2 geteilt,
siehe Lineare Unabhängigkeit.

↑ Fläche mit Aussparung

$$\vec{r}_s = \frac{1}{A_{G\setminus H}} \int_{G\setminus H} \vec{r}\,\mathrm{d}A$$

$$= \frac{1}{A_{G\setminus H}} \Big(\int_G \vec{r}\,\mathrm{d}A - \int_H \vec{r}\,\mathrm{d}A \Big)$$



In diesem Fall gilt:

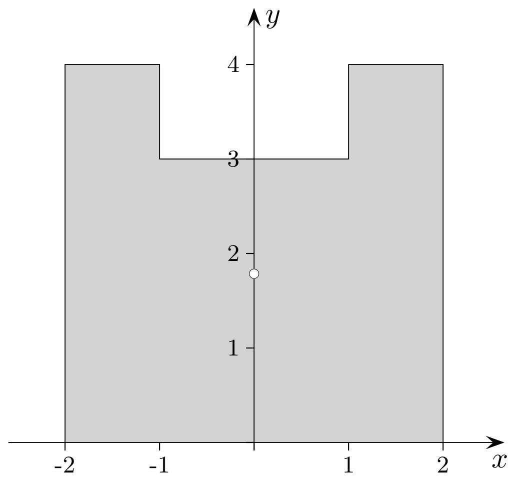
$$\int_H \vec{r}\,\mathrm{d}A = \vec{r}_H\,\pi r^2 \qquad \text{Kreisradius } r$$

Eine Aussparung geht einfach mit einem negativen Vorzeichen in die Rechnung ein.

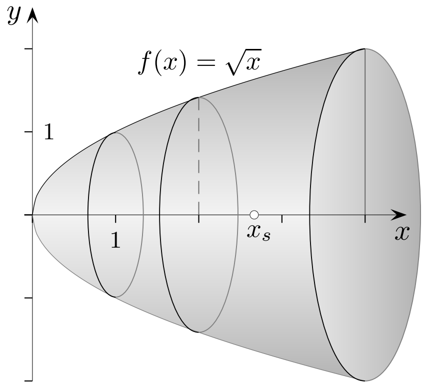
$$y_s = \frac{1}{A}(y_1 A_1 - y_2 A_2)$$

$$= \frac{1}{16-2}\,(2 \cdot 16 - \frac{7}{2} \cdot 2)$$

$$= \frac{25}{14}$$



↑ Schwerpunkt bei Rotation um die x-Achse



Die Begründung der Formel $\vec{r}_s = \dfrac{1}{A}\displaystyle\int_F \vec{r}\,\mathrm{d}A$ kann für Körper K angepasst werden.

$$\vec{r}_s = \frac{1}{V}\int_K \vec{r}\,\mathrm{d}V$$

$$x_s = \frac{1}{V}\int_a^b x\,\mathrm{d}V \qquad \text{mit} \quad V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}V = \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{für Rotationskörper mit Rotation um die } x\text{-Achse}$$

$$x_s = \frac{\pi}{V}\int_a^b x\,(f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

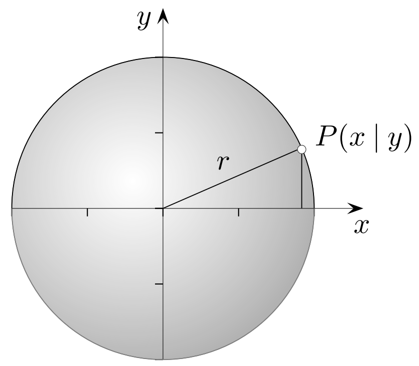
Beispiel

$$V = \pi\int_0^4 (\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = 8\pi$$

$$x_s = \frac{\pi}{V}\int_0^4 x\,(\sqrt{x})^2\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3}$$

↑ Schwerpunkt einer Halbkugel

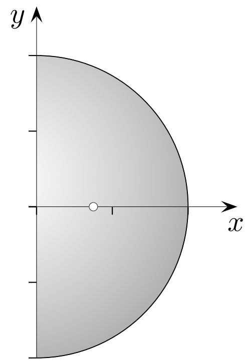
Für einen Punkt $P(x \mid y)$ auf dem Kreis mit dem Radius r gilt:
$x^2 + y^2 = r^2$ (Pythagoras).



Nach y aufgelöst, ergibt sich: $\quad y = \sqrt{r^2 - x^2}$

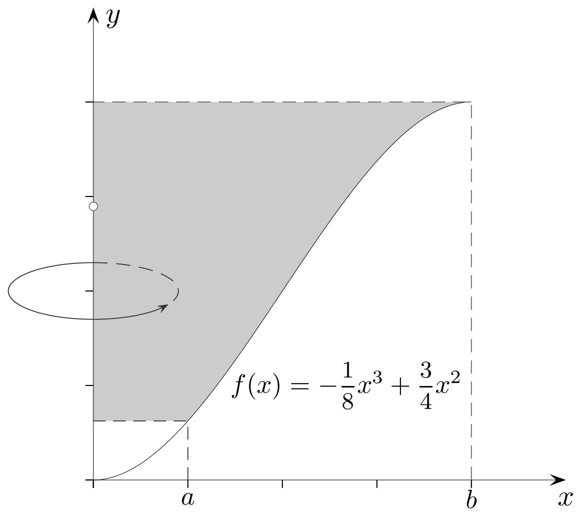
d. h. $\quad f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$V = \pi \int_{-r}^{r} (\sqrt{r^2 - x^2})^2 \, \mathrm{d}x$$
$$= 2\,\pi \int_{0}^{r} (r^2 - x^2) \, \mathrm{d}x \; = \; ... \; = \; \frac{4}{3}\pi r^3$$



$$x_s \;=\; \frac{\pi}{V} \int_a^b x\,(f(x))^2 \mathrm{d}x$$
$$=\; \frac{3}{2r^3} \int_0^r x(r^2 - x^2) \mathrm{d}x$$
$$=\; \ldots = \frac{3}{8} r$$

↑ Schwerpunkt bei Rotation um die y-Achse   ohne Umkehrfunktion



Der Körper wird durch horizontale Zylinder unterteilt.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Volumenelement.

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi x^2 \cdot \underbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y}$$

Das ergibt die Volumenformel

$$V_y \;=\; \pi \int_a^b x^2 \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{genauer wäre } \;|f'(x)|\; \text{ statt } f'(x)$$

Der Schwerpunkt eines infinitesimalen Zylinders liegt auf der y-Achse in Höhe $f(x)$.
Damit erhalten wir für den Schwerpunkt:

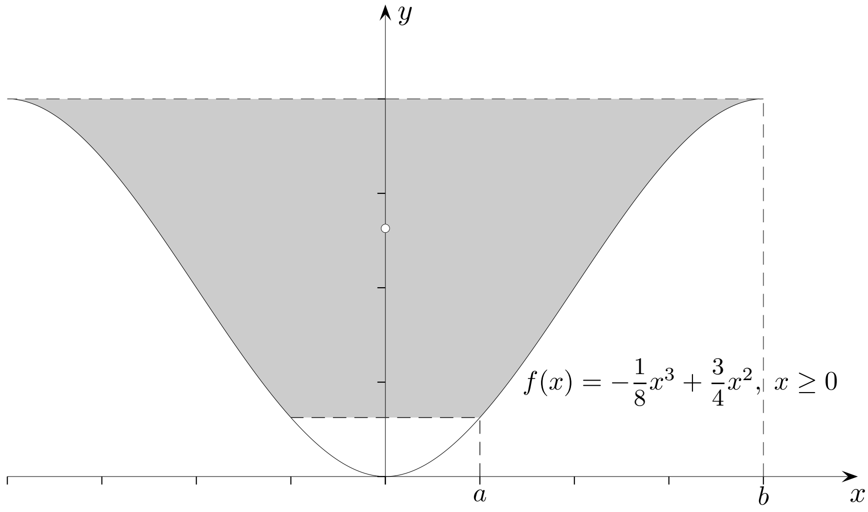
$$y_s \;=\; \frac{\pi}{V_y} \int_a^b x^2 \cdot f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

Für das Beispiel mit $a = 1$ und $b = 4$:

$V_y \approx 59{,}376$
$y_s \approx 2{,}896$

Möglicherweise hätte man y_s etwas niedriger vermutet.
Jedoch ist die Fläche oberhalb der horizontal durch y_s verlaufenden Schwerelinie um ca. 10 % größer als die unterhalb liegende Fläche. Das entsprechende Rotationsvolumen oberhalb ist um ca. 34 % größer als das Untere.

↑ Flächenschwerpunkt mit gespiegelter Fläche ohne Umkehrfunktion



Die Fläche wird durch horizontale Rechtecke unterteilt.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Flächenelement.

$$A_{\text{Rechteck}} = 2x \cdot \underbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y}$$

Das ergibt die Flächenformel

$$A = \int_a^b 2x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{genauer wäre } |f'(x)| \text{ statt } f'(x)$$

Der Schwerpunkt eines infinitesimalen Rechtecks liegt auf der y-Achse in Höhe $f(x)$.
Damit erhalten wir für den Schwerpunkt:

$$y_s = \frac{1}{A}\int_a^b 2x \cdot f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

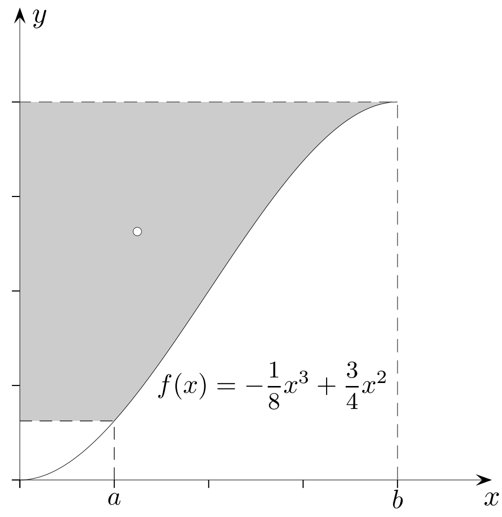
Die 2 fällt heraus. Die Spiegelung ist für y_s ohne Belang, siehe nächste Seite.

Für das Beispiel mit $a = 1$ und $b = 4$:

$A \approx 15{,}188$

$y_s \approx 2{,}629$

↑ Flächenschwerpunkt ohne Umkehrfunktion



Die Fläche wird durch horizontale Rechtecke unterteilt.
Betrachte hierzu ein infinitesimales Flächenelement.

$$A_{\text{Rechteck}} = x \cdot \underbrace{f'(x)\,\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}y}$$

Das ergibt die Flächenformel

$$A = \int_a^b x \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{genauer wäre } |f'(x)| \text{ statt } f'(x)$$

Damit erhalten wir für den Schwerpunkt (f monoton steigend):

$$y_s = \frac{1}{A}\int_a^b x \cdot f(x) \cdot f'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$x_s = \frac{1}{A}\Big[\frac{a^2}{2} \cdot [f(b) - f(a)] + \int_a^b x[f(b) - f(x)]\,\mathrm{d}x\Big]$$

Für das Beispiel mit $a = 1$ und $b = 4$:

$A \approx 7{,}594$
$y_s \approx 2{,}629$
$x_s \approx 1{,}244$

Startseite

Schwerpunkt eines Dreiecks

Erläuterungen   Stefan Gössner

Aufgaben   Stefan Gössner

Doppelintegral Schwerpunkt   Walter Farkas

Schwerpunkt ebener Flächen   Lubov Vassilevskaya   Teil 1   Teil 2   Teil 3

Schwerpunkt Rotationskörper   Lubov Vassilevskaya