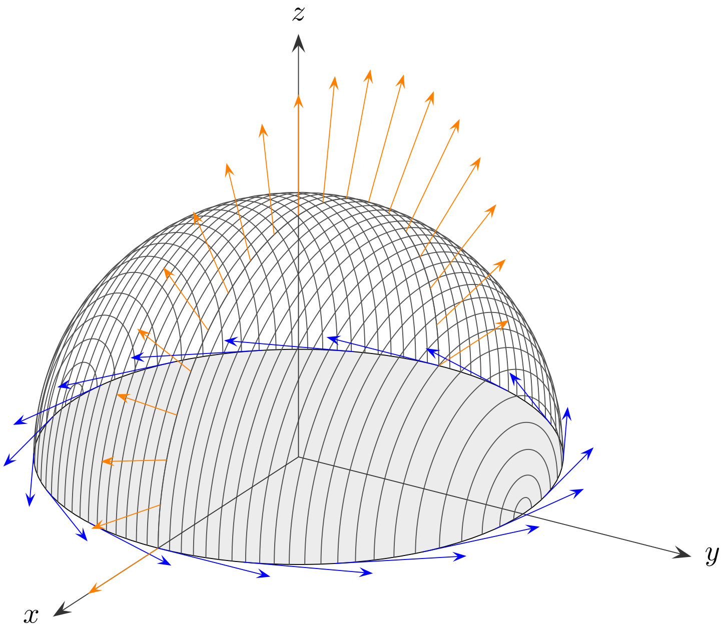
Satz von Stokes



$$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y), R(x,y))^{\mathrm{T}}$$

$$\iint_A \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot \vec{n}^{\circ}\, dA \;=\; \oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\,dz$$

$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \nabla\times\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix}\partial x\\ \partial y\\ \partial z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}P\\ Q\\ R\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\\ \frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\end{pmatrix}$$

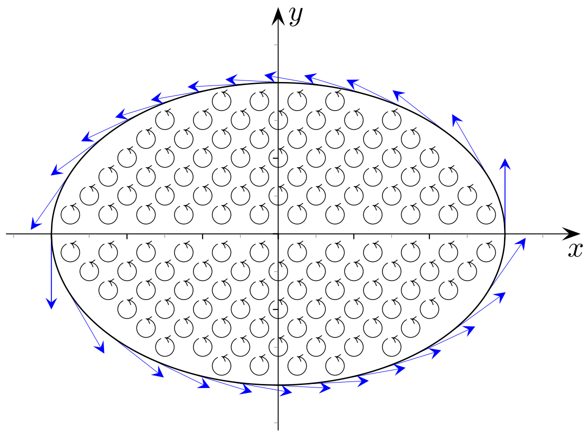
Links steht der Fluss des Vektorfeldes $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ durch die Fläche A (Oberflächenintegral),
rechts ein Wegintegral (Zirkulation) des Vektorfeldes $\overrightarrow{F}$ längs der geschlossenen Randkurve ∂A.
Plättet man den Satz von Stokes ($R = 0$), so ergibt sich der Satz von Green.

Sei $\vec{r} = (x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v))^{\mathrm{T}}$ eine Parameterdarstellung der Fläche A mit dem Parameterbereich D.
Der Fluss des Vektorfeldes $\operatorname{rot}\overrightarrow{F}$ durch die Fläche A ist

$$\iint_A \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\circ}\,dA = \iint_D \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot\frac{\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|}\cdot\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right|dudv = \iint_D \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot\left[\pm\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\vec{r}}{\partial v}\right]dudv$$

Das Vorzeichen des Vektorprodukts wird durch die Fließrichtung bestimmt. Bewegt man sich aufrecht in Richtung der Flächennormalen entlang der Randkurve, so muss die Fläche links liegen.

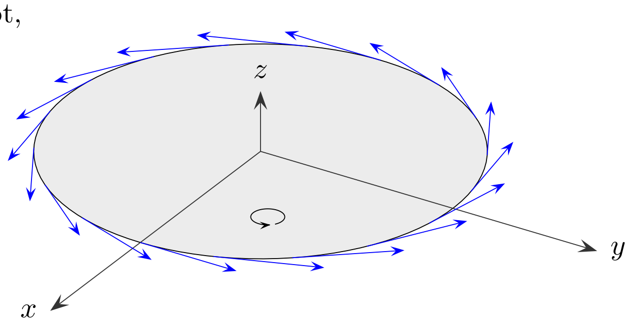
Anschauung



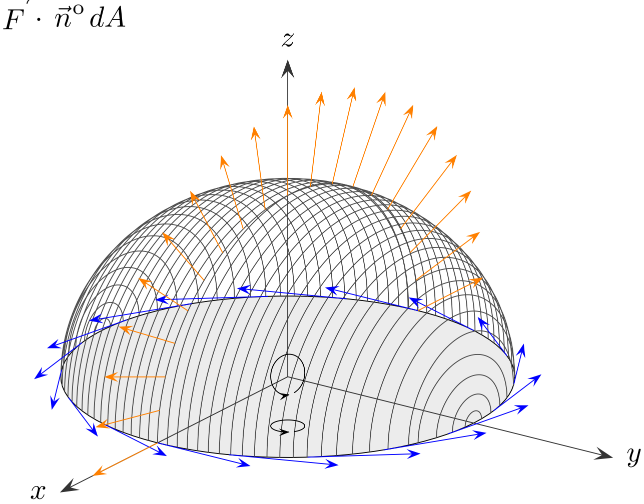
Wird im Satz von Green

$$\oint_L P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint \big(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\big)\;dx\,dy$$

der in der xy-Ebene liegende Bereich nach oben gewölbt,
so entsteht der Satz von Stokes:



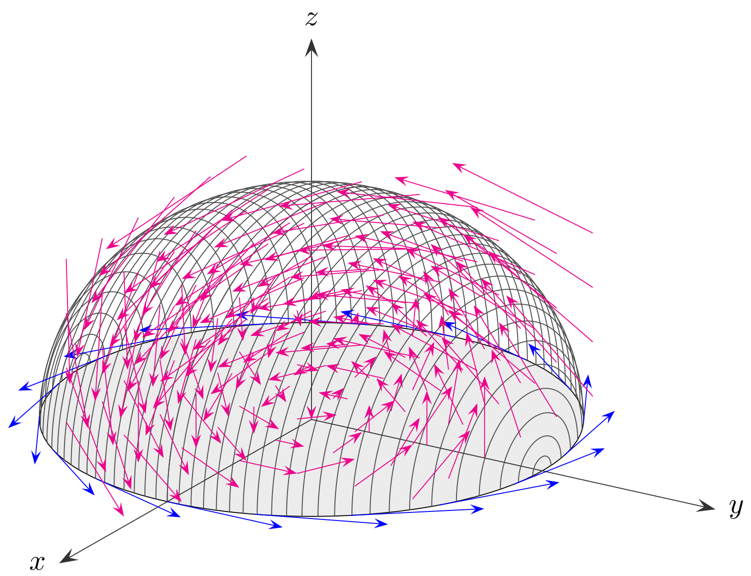
$$\oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\,dz \;=\; \iint_A \text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\text{o}}\,dA$$



Aus der Wirbeldichte $Q_x(x,y) - P_y(x,y)$
wird die der Fläche angepassten Dichte $\text{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\text{o}}$.

Bei der Summation (Integration) heben sich in beiden Fällen die Verwirbelungen innerhalb den Flächen auf. Übrig bleibt die Zirkulation über den Rand.

Satz von Stokes



$$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y), R(x,y))^{\mathrm{T}}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\circ}\, dA \;=\; \oint_{\partial A} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy + R(x,y)\, dz$$

Gegeben ist das Vektorfeld $\overrightarrow{F} = (z, x, y)^{\mathrm{T}}$.
Es soll der Fluss der Rotation durch die Halbkugelschale mit $R = 2$ berechnet werden.

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Parametrisierung der Schale:

$$2 \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad \vartheta \in [0; \pi/2], \qquad 4 \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\sin\vartheta \sin\varphi \\ \sin\vartheta \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \sin\vartheta \begin{pmatrix} \sin\vartheta \cos\varphi \\ \sin\vartheta \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

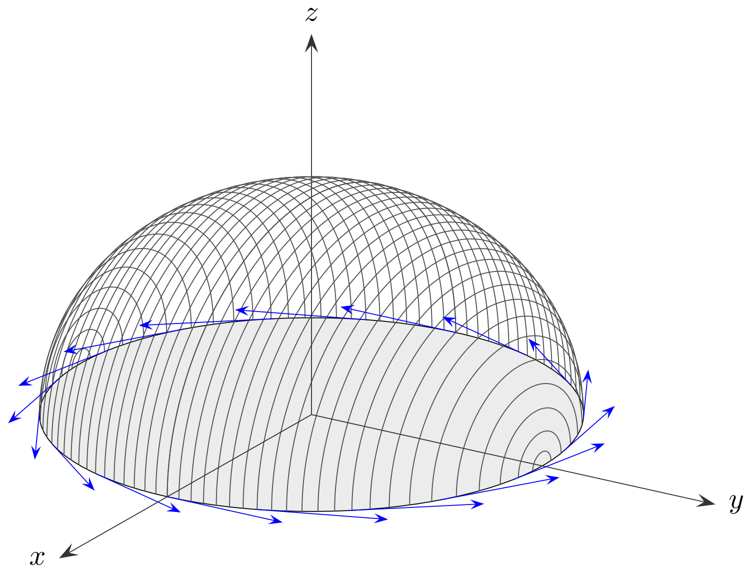
$$\iint_A \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\circ}\, dA \;=\; 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} [\sin^2\vartheta \cos\varphi + \sin^2\vartheta \sin\varphi + \sin\vartheta \cos\vartheta]\, d\varphi d\vartheta = \ldots = 4\pi$$

Andererseits betrachten wir die
Randkurve:

$$2 \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0; 2\pi]$$

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy + R(x,y)\, dz \;=\; 4 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt = 4 \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = 4\pi$$

Satz von Stokes



$$\overrightarrow{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y), R(x,y)\big)^{\mathrm{T}}$$

$$\iint_A \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\,\mathrm{o}}\,dA \;=\; \oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\,dz$$

Gegeben ist noch einmal das Vektorfeld $\overrightarrow{F} = (z, x, y)^{\mathrm{T}}$.
Es soll erneut der Fluss der Rotation durch die Halbkugelschale mit $R = 2$ berechnet werden.

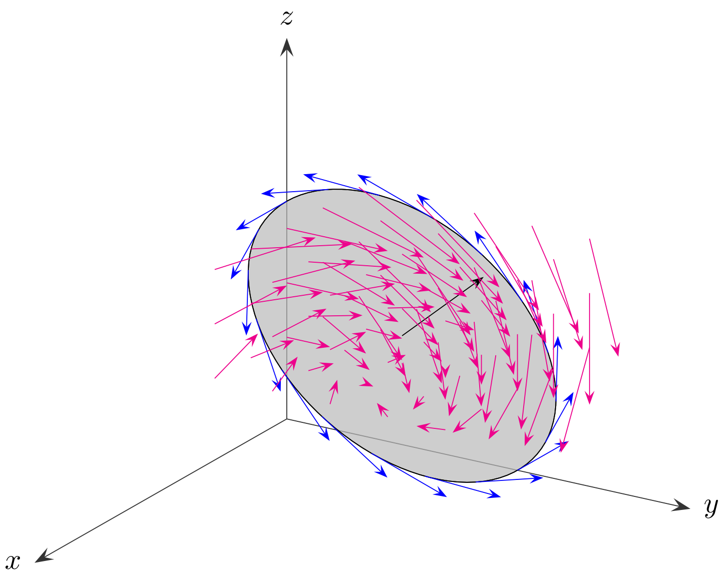
$$\operatorname{rot}\overrightarrow{F} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Da nach dem Satz von Stokes der Fluss der Rotation von der Flächenform unabhängig ist (es kommt nur auf den Rand an), nehmen wir die Kreisfläche K.

$$\vec{n}^{\,\mathrm{o}} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\iint_K \operatorname{rot}\overrightarrow{F}\cdot\vec{n}^{\,\mathrm{o}}\,dK \;=\; \iint_K 1\,dK = 4\pi$$

Vektorpotential



$$\overrightarrow{F}(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y), R(x,y)\big)^{\mathrm{T}}$$

$$\iint_A \operatorname{rot} \overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\,\mathrm{o}}\, dA \;=\; \oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\,dz$$

Gegeben ist das Vektorfeld $\overrightarrow{V} = (y, z, x)^{\mathrm{T}}$.
Es soll der Fluss von $\overrightarrow{V}$ durch die Kreisfläche mit $R = \sqrt{2}$, dem Mittelpunkt $M(0\,|\,1\,|\,1)$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ berechnet werden.

Sei $\vec{r} = (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} + (t\sqrt{2}\sin\varphi,\, -t\cos\varphi,\, t\cos\varphi)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad t \in [0; 1]$
eine Parameterdarstellung der Kreisfläche mit dem Rand für $t = 1$.
Beachte: Die Summanden stehen senkrecht aufeinander.

Um den Satz von Stokes anwenden zu können,
ist zunächst das Vektorfeld (Vektorpotential) $\overrightarrow{F}$ zu bestimmen, für das gilt:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{F} \;=\; \overrightarrow{V}$$

$$\overrightarrow{F} \;=\; \begin{pmatrix} \frac{z^2}{2} - xy \\ -yz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Maple

```
with(VectorCalculus):
with(LinearAlgebra):
V:= VectorField(<y,z,x>, 'cartesian'[x,y,z]);
Divergence(V);        # notw. Bed. div V = 0
F:=VectorPotential(V);
Curl(F);        # Kontrolle
```

Vektorpotential

Randkurve

$$L = \left(\sqrt{2}\sin\varphi, 1-\cos\varphi, 1+\cos\varphi\right)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\,dz = \sqrt{2}\pi$$

```
L:=<sqrt(2)*sin(phi), 1−cos(phi), 1+cos(phi)>;
L1:=map(diff, L, phi);

F:=<z∧2/2−x*y, −y*z, 0>;
x:=sqrt(2)*sin(phi);
y:=1−cos(phi);
z:=1+cos(phi);

DotProduct(F, L1) assuming t:: real;
int(%,phi=0..2*Pi);
```

$$\iint_A \operatorname{rot}\overrightarrow{F} \cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA = \sqrt{2}\pi$$

Kreisfläche

$$A = \left(t\sqrt{2}\sin\varphi, 1-t\cos\varphi, 1+t\cos\varphi\right)^{\mathrm{T}}, \quad \varphi \in [0; 2\pi], \quad t \in [0; 1]$$

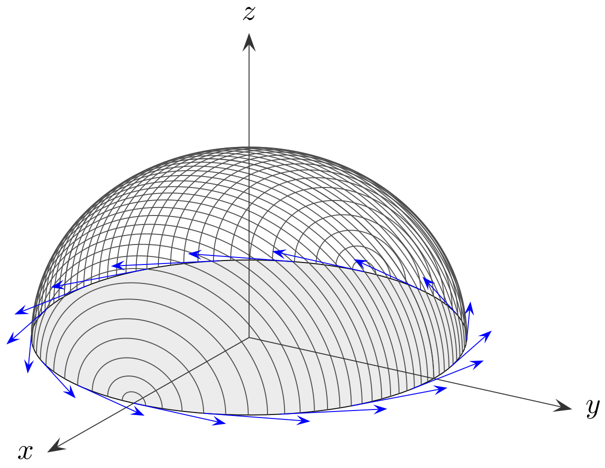
```
V:=<y, z, x>;
K:=subs(x=t*sin(phi), y=1−t*cos(phi),z=1+t*cos(phi),V);

A:=<t*sqrt(2)*sin(phi), 1−t*cos(phi), 1+t*cos(phi)>;

K1:=map(diff, A, t);
K2:=map(diff, A, phi);
P:=CrossProduct(K1, K2);
simplify(P);

DotProduct(P,K) assuming t:: real assuming phi:: real;
int(int(%, phi=0..2*Pi), t=0..1);
```

Satz von Stokes Ergänzungen



$$\overrightarrow{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y), R(x,y))^{\mathrm{T}}$$

$$\iint_A \mathrm{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA \;=\; \oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy + R(x,y)\,dz$$

a) Nehmen wir an, dass zum Vektorfeld eine Potentialfunktion existiert, $\overrightarrow{F} = \mathrm{grad}\,\phi$.
Dann ist das rechte Wegintegral null und aus der linken Seite wird

$$\iint_A [\mathrm{rot\ grad}\,\phi]\cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA = 0.$$

Da dieses für alle gleich berandeten Flächen gilt, liegt $\mathrm{rot\ grad}\,\phi = \vec{0}$ nahe.
Dies kann durch Nachrechnen bestätigt werden.

b) Ziehen wir nun die Randkurve im Satz von Stokes auf null zusammen.
Wir erhalten für die Oberfläche A:

$$\iint_A \mathrm{rot}\,\overrightarrow{F}\cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA \;=\; 0$$

Mit dem Satz von Gauss (A ist die Oberfläche des Volumes V)

$$\iint_A \overrightarrow{F}\cdot \vec{n}^{\mathrm{o}}\,dA = \iiint_V \mathrm{div}\,\overrightarrow{F}\,dV.$$

ergibt sich daraus:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{F}\,dV = 0.$$

Die naheliegende Vermutung $\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\overrightarrow{F} = 0$ kann durch Nachrechnen bestätigt werden.