Resultante

Die Bestimmung von Schnittpunkten zweier Kurven führt auf die Berechnung von Nullstellen von Polynomen. Mit der Resultante können zwei Polynome auf gemeinsame Faktoren (Nullstellen) geprüft werden. Wir betrachten zwei Polynome von Grad $m = 3$ und $n = 4$. Die Verallgemeinerung liegt auf der Hand.

$$\begin{aligned} f(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 & \qquad a_i, b_j \in \mathbb{C} \\ g(x) &= b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + ab_1x + b_0 \end{aligned}$$

f und g haben genau dann eine gemeinsame Nullstelle, wenn sie einen gemeinsamen Faktor $h(x)$ von mindestens Grad 1 besitzen. Dies folgt aus dem Fundamentalsatz der Algebra, nach dem jedes Polynom in Linearfaktoren zerfällt. Sei also

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) \cdot h(x) \\ g(x) &= v(x) \cdot h(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= c_2x^2 + c_1x + c_0 & \qquad \operatorname{grad} u < m \\ v(x) &= d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0 & \qquad \operatorname{grad} v < n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad 0 &= v(x) \cdot f(x) - u(x) \cdot g(x) \\ &= (d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0)(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0) - \\ &\qquad (c_2x^2 + c_1x + c_0)(b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + ab_1x + b_0) \\ &= (a_3d_3 + b_4c_2)x^6 + \\ &\quad (a_3d_2 + a_2d_3 - b_4c_1 - b_3c_2)x^5 + \\ &\quad (a_3d_1 + a_2d_2 + a_1d_3 - b_4c_0 - b_3c_1 - b_2c_2)x^4 + \\ &\quad (a_3d_0 + a_2d_1 + a_1d_2 + a_0d_3 - b_1c_2 - b_2c_1 - b_3c_0)x^3 + \\ &\quad (a_0d_2 + a_1d_1 + a_2d_0 - b_0c_2 - b_1c_1 - b_2c_0)x^2 + \\ &\quad (a_0d_1 + a_1d_0 - b_0c_1 - b_1c_0)x + \\ &\quad (a_0d_0 - b_0c_0) \qquad \text{Die Koeffizienten müssen null sein. Das ergibt ein LGS für die } d_i \text{ und } c_j. \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} a_3 & \square & \square & \square & b_4 & \square & \square \\ a_2 & a_3 & \square & \square & b_3 & b_4 & \square \\ a_1 & a_2 & a_3 & \square & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \square & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ \square & \square & a_0 & a_1 & \square & b_0 & b_1 \\ \square & \square & \square & a_0 & \square & \square & b_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_3 \\ d_2 \\ d_1 \\ d_0 \\ -c_2 \\ -c_1 \\ -c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante der Matrix oder ihrer Transponierten $\operatorname{Res}(f, g)$ verschwindet. $\operatorname{Res}(f, g)$ heißt Resultante von f und g.

Resultante, anderer Einstieg

Mit der Resultante können zwei Polynome auf gemeinsame Faktoren (Nullstellen) geprüft werden.

$$
\begin{array}{rcl@{\qquad}l@{\qquad}l}
f &=& a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 & \mathrm{grad}\, f = m = 3 & a_i, b_j \in \mathbb{Z} \\
g &=& b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + ab_1x + b_0 & \mathrm{grad}\, g = n = 4 &
\end{array}
$$

$$
\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix}
a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \square & \square & \square \\
\square & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \square & \square \\
\square & \square & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \square \\
\square & \square & \square & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\
b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \square & \square \\
\square & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \square \\
\square & \square & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0
\end{vmatrix}
\qquad
\mathrm{Res}(f,g)^\top = \begin{array}{l}
\begin{vmatrix}
a_3 & \square & \square & \square & b_4 & \square & \square \\
a_2 & a_3 & \square & \square & b_3 & b_4 & \square \\
a_1 & a_2 & a_3 & \square & b_2 & b_3 & b_4 \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\square & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\
\square & \square & a_0 & a_1 & \square & b_0 & b_1 \\
\square & \square & \square & a_0 & \square & \square & b_0
\end{vmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
\mid \cdot x^6 \\
\mid \cdot x^5 \\
\mid \cdot x^4 \\
\mid \cdot x^3 \\
\mid \cdot x^2 \\
\mid \cdot x \\

\end{array}
$$

Die Resultante ist die Determinante einer $(m+n) \times (m+n)$ Matrix (Sylvestermatrix).
In den ersten n Zeilen stehen die Koeffizienten von f, in jeder Zeile jeweils um eine Stelle nach rechts versetzt, analog sind die letzten m Zeilen gebildet. Alle übrigen Stellen werden mit Nullen aufgefüllt.

Jeweils die i-te Zeile von $\mathrm{Res}(f,g)^\top$ wird mit x^{m+n+i} multipliziert und zur letzten Zeile addiert.
Dies verändert also nur die letzte Zeile.

$$
\begin{vmatrix}
a_3 & \square & \square & \square & b_4 & \square & \square \\
a_2 & a_3 & \square & \square & b_3 & b_4 & \square \\
a_1 & a_2 & a_3 & \square & b_2 & b_3 & b_4 \\
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\square & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\
\square & \square & a_0 & a_1 & \square & b_0 & b_1 \\
x^3 \cdot f & x^2 \cdot f & x \cdot f & f & x^2 \cdot g & x \cdot g & g
\end{vmatrix}
$$

Die Determinante wird nach Laplace entwickelt.

$$\mathrm{Res}(f,g) = f(d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0) + g(c_2x^2 + c_1x + c_0) \qquad \text{Unterdeterminanten} \quad d_i, c_j \in \mathbb{Z}$$

allgemein:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,g) &= f(d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \ldots + d_0) + g(c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \ldots + c_0) \\
&= fF + gG
\end{aligned}
$$

$\mathrm{Res}(f,g)$ ist von x unabhängig. Dann folgt:
Wenn f und g eine gemeinsame Nullstelle haben, $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, dann ist $\mathrm{Res}(f,g) = 0$.

Sei umgekehrt $\mathrm{Res}(f,g)=0$.

$$\begin{aligned} 0 &= fF+gG \qquad\qquad \mathrm{grad}\, F = n-1,\ \ \mathrm{grad}\, G = m-1 \\ -fF &= gG \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{grad}\, G < \mathrm{grad}\, f$ muss mindestens ein unzerlegbarer Faktor von f in g enthalten sein, in $\mathbb{C}$ gibt es dann eine gemeinsame Nullstelle α, $f(\alpha)=g(\alpha)=0$.

In $\mathbb{C}$ gilt damit:
$\mathrm{Res}(f,g)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ und g haben eine gemeinsame Nullstelle.

$$\begin{aligned} f &= 2x^2+x-1 \\ g &= 3x^4-x^3+4x^2+x-2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -35$$

Die Resultante lässt sich auch durch die Nullstellen α_i von f und β_j von g angeben. Sei (z.B. in $\mathbb{C}$):
$f(x) = a\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)$ und $g(x) = b\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_j)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,g) &= a^n \prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) \\ &= (-1)^{mn} b^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j) \\ &= a^n b^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j) \end{aligned}$$

Beachte: Der Produktterm ist genau dann null, wenn eine gemeinsame Nullstelle vorliegt.
Der Faktor $a^n b^m$ erscheint aufgrund der Determinantenregeln plausibel. a ist in den Elementen von n Spalten enthalten, b in den Elementen von m Spalten.
Es gilt: $\mathrm{Res}(f,g) = (-1)^{mn}\mathrm{Res}(g,f)$
Mit mn Vertauschungen werden in der transponierten Sylvestermatrix die g-Spalten vor die f-Spalten platziert.

Schauen wir uns die Zusammenhänge in einfachen Fällen an.

$m = 1,\, n = 1$

$f(x) = a(x-\alpha), \quad g(x) = b(x-\beta)$

$$\operatorname{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a & -a\alpha \\ b & -b\beta \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & -\alpha \\ 1 & -\beta \end{vmatrix} = ab(\alpha-\beta) = ag(\alpha) = -bf(\beta)$$

$m = 2,\, n = 1$

$f(x) = a(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = a(x^2 + (-\alpha_1-\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2), \quad g(x) = b(x-\beta)$

$$\operatorname{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a & -a\alpha_1 - a\alpha_2 & a\alpha_1\alpha_2 \\ b & -b\beta & 0 \\ 0 & b & -b\beta \end{vmatrix} = ab^2 \begin{vmatrix} 1 & -\alpha_1-\alpha_2 & \alpha_1\alpha_2 \\ 1 & -\beta & 0 \\ 0 & 1 & -\beta \end{vmatrix} = ab^2(\alpha_1-\beta)(\alpha_2-\beta)$$

$$= ag(\alpha_1)g(\alpha_1) = b^2 f(\beta)$$

Sei $\deg\, f = m < \deg\, g = n$.
$g = qf + r$ mit $\deg\, r = k < \deg\, f$ und $\operatorname{Res}(f,g) = a^{n-k}\operatorname{Res}(f,r)$ legen einen Beweis durch Induktion nach $m+n$ nahe. Das Folgende enthält die Idee.

$$\begin{aligned} f &= 2x^2 + x - 1 & &\text{Nullstellen } \alpha_1, \alpha_1 & &m = 2,\ a = 2 \\ g &= 8x^4 - 4x^3 + 4x^2 + x - 2 & &\text{Nullstellen } \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4 & &n = 4 \\ &= (4x^2 - 4x + 6)f + (-9x + 4) = qf + r & &g(\alpha_1) = r(\alpha_1),\ g(\alpha_2) = r(\alpha_2) & &k = 1 \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 8 & -4 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 8 & -4 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 8 & -4 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -9 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{Res}(f,g) = 2^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -9 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 \operatorname{Res}(f,r) = -104$$

Die letzte Zeile wird gemäß $r = g - qf = g - (4x^2 - 4x + 6)f = g - \big(4x^2 f - 4xf + 6f\big)$ durch (6. Zeile $-$ 2. Zeile $\times$ 4 $+$ 3. Zeile $\times$ 4 $-$ 4. Zeile $\times$ 6) ersetzt und die vorletzte Zeile mit dem Ergebnis angepasst, die Umformungen hätten analog vorgenommen werden können.

Induktionsschritt

$$\operatorname{Res}(f,g) = a^{n-k}\operatorname{Res}(f,r) \overset{*}{=} a^{n-k}a^k\prod_{i=1}^{m} r(\alpha_i) = a^n\prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) \qquad * \text{ nach Induktionsvoraussetzung}$$

Diskriminante

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}$

Die Diskriminante von f ist $\Delta(f) = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f sind.

Offensichtlich: $\Delta(f) = 0 \iff f$ hat eine mindestens doppelte Nullstelle.

Eine doppelte Nullstelle von $f(x)$ ist auch eine Nullstelle von $f'(x)$.

$$f(x) = (x-\alpha)^2 \cdot g(x),\ f'(x) = 2(x-\alpha)\cdot g(x) + (x-\alpha)^2 \cdot g'(x)$$

Wir stellen den Zusammenhang von $\Delta(f)$ und $\mathrm{Res}(f, f')$ her, zunächst für $n = 4$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_4(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) \\
& \qquad (uvwz)' = u'vwz + uv'wz + uvw'z + uvwz' \\
f'(x)/a_4 &= (x-\alpha_2)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) + \\
& \qquad (x-\alpha_1)(x-\alpha_3)(x-\alpha_4) + \\
& \qquad\qquad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_4) + \\
& \qquad\qquad\qquad (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(\alpha_1) &= a_4(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_1-\alpha_4) \\
f'(\alpha_2) &= a_4(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_2-\alpha_4) \\
f'(\alpha_3) &= a_4(\alpha_3-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_4) \\
f'(\alpha_4) &= a_4(\alpha_4-\alpha_1)(\alpha_4-\alpha_2)(\alpha_4-\alpha_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(\alpha_1)f'(\alpha_2)f'(\alpha_3)f'(\alpha_4) &= a_4^4(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_2-\alpha_1)\cdot \\
& \qquad (\alpha_1-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_1)\cdot \\
& \qquad\quad (\alpha_1-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_1)\cdot \\
& \qquad\qquad (\alpha_2-\alpha_3)(\alpha_3-\alpha_2)\cdot \\
& \qquad\qquad\quad (\alpha_2-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_2)\cdot \\
& \qquad\qquad\qquad (\alpha_3-\alpha_4)(\alpha_4-\alpha_3) \\
&= a_n^n(-1)^6(\alpha_1-\alpha_2)^2(\alpha_1-\alpha_3)^2(\alpha_1-\alpha_4)^2(\alpha_2-\alpha_3)^2(\alpha_2-\alpha_4)^2(\alpha_3-\alpha_4)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}(f,f')/a_n^{n-1} &= a_n^n(-1)^6\Delta(f) && \text{beachte: } \mathrm{Res}(f,g) = a^n\prod_{i=1}^m g(\alpha_i) \\
\mathrm{Res}(f,f') &= a_n^{2n-1}(-1)^6\Delta(f) && g = f',\ \mathrm{grad}\, f' = n-1 \\
& && 6 = \binom{n}{2}
\end{aligned}$$

allgemein

$$f(x) = a_n\prod_{i=1}^n (x-\alpha_i),\ \text{somit}\quad f'(\alpha_i) = a_n\prod_{j\ne i}(\alpha_i-\alpha_j)$$

$$\mathrm{Res}(f,f') = a_n^{n-1}\prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = a_n^{2n-1}\prod_{i=1}^n\prod_{j\ne i}(\alpha_i-\alpha_j) = \prod_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)(\alpha_j-\alpha_i) = a_n^{2n-1}(-1)^{\binom{n}{2}}\Delta(f)$$

Diskriminante Beispiele

$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}$

Die Diskriminante von f ist $\Delta(f) = \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = a_n^{-(2n-1)} (-1)^{\binom{n}{2}} \operatorname{Res}(f, f'),$

wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die Nullstellen von f sind.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c,\ n = 2$

$$\Delta(f) = -a^{-3} \operatorname{Res}(f, f') = -a^{-3} \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & b & 0 \\ 0 & 2a & b \end{vmatrix} = -a^{-3}(4a^2c - ab^2) = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}$$

b) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ n = 3$

$$\Delta(f) = -a^{-5} \operatorname{Res}(f, f') = -a^{-5} \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 \\ 0 & a & b & c & d \\ 3a & 2b & c & 0 & 0 \\ 0 & 3a & 2b & c & 0 \\ 0 & 0 & 3a & 2b & c \end{vmatrix} = a^{-4}(b^2c^2 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4ac^3 - 4b^3d)$$

c) $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$

$\Delta(f) = b^2c^2 - 27d^2 + 18bcd - 4c^3 - 4b^3d$

d) $f(x) = x^3 + px + q$

$\Delta(f) = -4p^3 - 27q^2$

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \in \mathbb{R}[x]$

$\Delta(f) > 0 \iff f$ hat zwei verschiedene reelle Nullstellen.

$\Delta(f) < 0 \iff f$ hat (nur) zwei konjugiert komplexe Nullstellen. Mit α ist auch $\overline{\alpha}$ eine Nullstelle.

$\Delta(f) = 0 \iff f$ hat eine doppelte reelle Nullstelle.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \in \mathbb{R}[x]$

$\Delta(f) > 0 \iff f$ hat drei verschiedene reelle Nullstellen.

$\Delta(f) < 0 \iff f$ hat eine reelle und zwei konjugiert komplexe Nullstellen.

$\Delta(f) = 0 \iff f$ hat entweder eine dreifache reelle Nullstelle oder eine doppelte reelle und eine einfache reelle Nullstelle.

Resultante Ergänzung

$$
\begin{aligned}
f(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 & \qquad\qquad a_i, b_j \in \mathbb{C} \\
g(\alpha) &= b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2 + +b_3\alpha^3 + b_4\alpha^4
\end{aligned}
$$

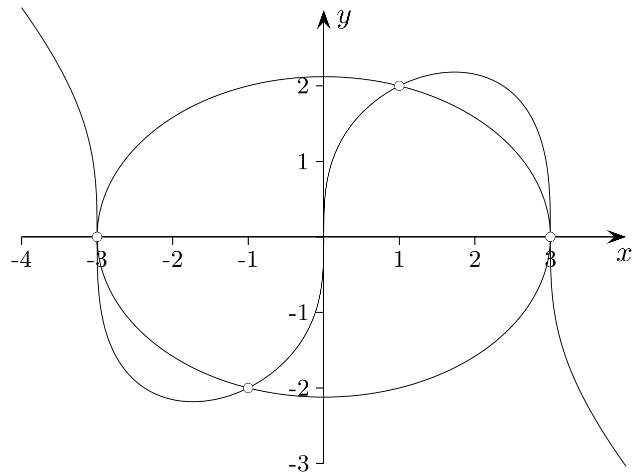
Für eine gemeinsame Nullstelle α von f und g erhalten wir weitere Gleichungen, indem wir $f(\alpha)$ mit α, α^2 bzw. α^3 multiplizieren, sowie $g(\alpha)$ mit α bzw. α^2. Das ergibt:

$$
\begin{pmatrix}
a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \square & \square & \square \\
\square & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \square & \square \\
\square & \square & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \square \\
\square & \square & \square & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\
b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \square & \square \\
\square & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \square \\
\square & \square & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^2 \\ \alpha^3 \\ \alpha^4 \\ \alpha^5 \\ \alpha^6 \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Die Spaltenvektoren sind dann linear abhängig, die Determinante der Matrix somit null.
Man beachte, dass die Reihenfolge der Koeffizienten in der Matrix gegenüber $\mathrm{Res}(f, g)$ verändert wurde.
Der Determinantenwert bleibt erhalten.

Schnitt von Kurven

$$\begin{aligned} x^3 - 9x + y^3 &= 0 \\ x^2 + 2y^2 - 9 &= 0 \quad \text{Ellipse} \end{aligned}$$



Mit Hilfe von Resultanten können polynomiale Gleichungssysteme in mehreren Variablen gelöst werden. Man interpretiert die linken Seiten als Polynome in x mit von y abhängigen Koeffizienten,

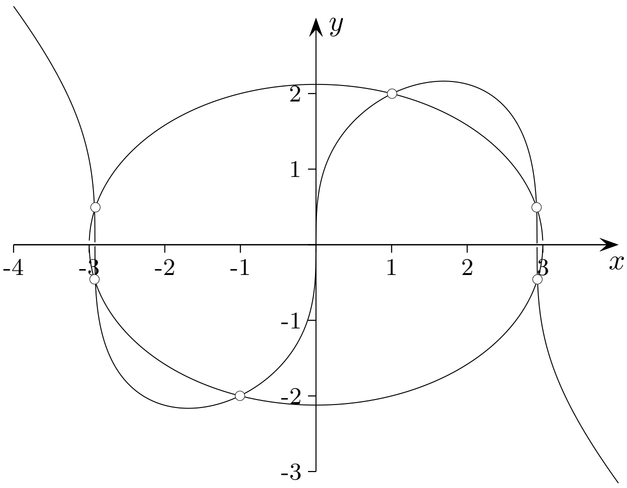
$a_0 = y^3$, $a_1 = -9$, $a_2 = 0$, $a_3 = 1$, $\quad b_0 = 2y^2 - 9$, $b_1 = 0$, $b_2 = 1$.

$$\det \begin{pmatrix} y^3 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & y^3 & -9 & 0 & 1 \\ y^2-9 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y^2-9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y^2-9 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 9y^4(y^2-4)$$

Die Resultante wird 0 für die y-Werte $0, \pm 2$. Diese setzt man nun in das polynomiale System ein und kann so die zugehörigen x-Werte bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass für eine Nullstelle y die Nullstellenmengen (bezüglich x) der beiden Polynome nicht übereinstimmen müssen. Der Durchschnitt beider Mengen liefert jeweils Lösungen des Systems, $(\pm 3, 0)$, $(1, 2)$, $(-1, -2)$.

Nach dem Satz von Bézout ist die Anzahl der Schnittpunkte zweier Kurven gleich dem Produkt ihrer Grade, hier daher 6.
Bei der Berechnung der Anzahl muss die Schnitt-Vielfachheit jedes Schnittpunkts beachtet werden.
Eine erste Formulierung gab 1687 Isaac Newton.

Satz von Bézout

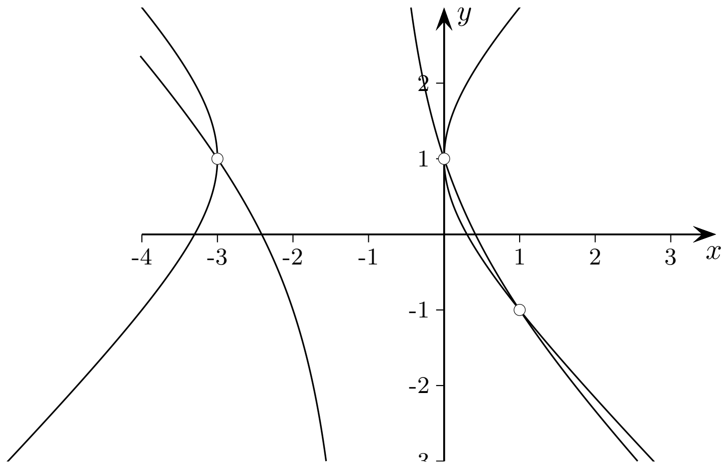


Die Schnitt-Vielfachheit wird erkennbar, wenn die Situation ein wenig verwackelt wird.
Jean-Pierre Serre gab um 1960 eine exakte Definition an.
Die Schnitt-Vielfachheit eines Berührpunkts einer Tangente im Maximum (Minimum) ist 2, im Wendepunkt 3.

Der Satz von Bézout setzt weiter eine projektive Ebene voraus.
Für die projektive Ebene wird die xy-Ebene samt geometrischem Inhalt um 1 in z-Richtung verschoben und vom Ursprung aus betrachtet. Es entsteht ein Bild, bei dem parallele Geraden einen Schnittpunkt im Unendlichen besitzen.

Schnitt von Kurven

$$
\begin{aligned}
x^2 + xy + 2x + y - 1 &= 0 \\
x^2 - y^2 + 3x + 2y - 1 &= 0 \quad \text{Hyperbel}
\end{aligned}
$$



Die linken Seiten werden als Polynome in y mit von x abhängigen Koeffizienten interpretiert.

$$
\det \begin{pmatrix} x+1 & x^2+2x-1 & 0 \\ 0 & x+1 & x^2+2x-1 \\ -1 & 2 & x^2+3x-1 \end{pmatrix} = -x^3 - 2x^2 + 3x
$$

Die Resultante wird 0 für die x-Werte 0, -3 und 1.
Diese setzt man nun in das polynomiale System ein und kann so die zugehörigen y-Werte bestimmen.
Das ergibt die Lösungen $(-3, 1)$, $(0, 1)$, $(1, -1)$.

Beachte: $x = 1$ in die 1. Gleichung eingesetzt ergibt $2 + 2y = 0$ mit $y = -1$.
$x = 1$ in die 2. Gleichung eingesetzt ergibt $-y^2 + 2y + 3 = 0$ mit $y_1 = -1$ und $y_2 = 3$.

Berechnung mit Maple

$$\begin{aligned} x+y+z &= 6 \\ x^2+y^2+z^2 &= 14 \\ x^3+y^3+z^3 &= 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &:= x+y+z-6 \\ g &:= x^2+y^2+z^2-14 \\ h &:= x^3+y^3+z^3-36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} fg &:= \mathit{resultant}(f,g,x) \\ &= 2y^2+2yz+2z^2-12y-12z+22 \end{aligned}$$

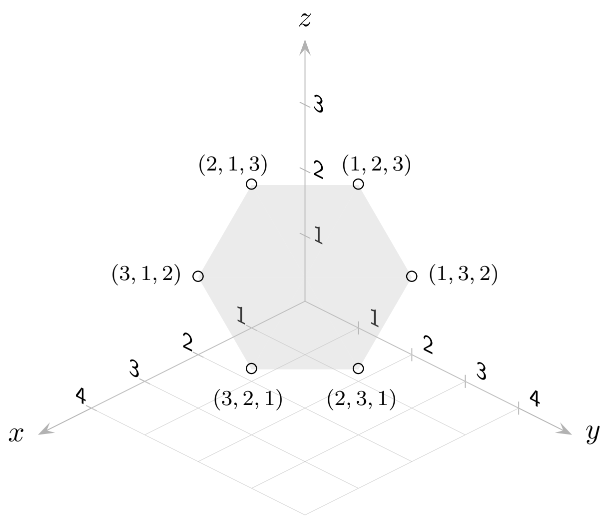
$$\begin{aligned} fh &:= \mathit{resultant}(f,h,x) \\ &= -3y^2z-3yz^2+18y^2+36yz+18z^2-108y-108z+180 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathit{resultant}(fg,fh,y) &= 36(z^3-6z^2+11z-6)^2 \\ \mathit{factor}(\%) &= 36(z-1)^2(z-2)^2(z-3)^2 \\ z_1 &= 1 \\ z_2 &= 2 \\ z_3 &= 3 \end{aligned}$$

$z_1 = 1$ in $fg = 0$ und $fh = 0$ eingesetzt ergibt jeweils $y_1 = 2$ und $y_2 = 3$.
x erhalten wir durch Einsetzen in die Ursprungsgleichungen.

6 Lösungen (Polynome vom Grad 1,2 und 3): $(1,2,3)$, $(1,3,2)$ und die übrigen Permutationen von $(1,2,3)$.

Die 1. Gleichung ist eine Ebenengleichung, die 2. Gleichung beschreibt eine Kugel um den Ursprung.
Die Lösungen liegen auf dem Schnittkreis.



Berechnung mit Maple

$$
\begin{aligned}
y - 3x + 5 &= 0 \\
x^2 + y^2 - 5 &= 0 \\
y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f &:= y - 3x + 5 \\
g &:= x^2 + y^2 - 5 \\
h &:= y - x^3 + 3x^2 - 3x + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fg &:= \mathit{resultant}(f, g, y) \\
&= 10x^2 - 30x + 20
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
fh &:= \mathit{resultant}(f, h, y) \\
&= -x^3 + 3x^2 - 4
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
10x^2 - 30x + 20 &= 0 \qquad\qquad = 10(x-1)\color{blue}{(x-2)} \\
x_1 &= 1, \;\; x_2 = \color{blue}{2} \\
-x^3 + 3x^2 - 4 &= 0 \qquad\qquad = -(x+1)\color{blue}{(x-2)}^2 \\
x_1 &= -1, \;\; x_{2/3} = \color{blue}{2}
\end{aligned}
$$