Resultante

Mit der Resultante können zwei Polynome auf gemeinsame Faktoren (Nullstellen) geprüft werden.

$$\begin{aligned} f &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \qquad && \operatorname{grad} f = m = 3 \qquad && a_i, b_j \in \mathbb{Z} \\ g &= b_4x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + ab_1x + b_0 && \operatorname{grad} g = n = 4 && \end{aligned}$$

$$\operatorname{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \square & \square & \square \\ \square & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \square & \square \\ \square & \square & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \square \\ \square & \square & \square & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \\ b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \square & \square \\ \square & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \square \\ \square & \square & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 \end{vmatrix} \qquad \operatorname{Res}(f,g)^\top = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_3 & \square & \square & \square & b_4 & \square & \square \\ a_2 & a_3 & \square & \square & b_3 & b_4 & \square \\ a_1 & a_2 & a_3 & \square & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \square & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ \square & \square & a_0 & a_1 & \square & b_0 & b_1 \\ \square & \square & \square & a_0 & \square & \square & b_0 \end{vmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \mid \cdot x^6 \\ \mid \cdot x^5 \\ \mid \cdot x^4 \\ \mid \cdot x^3 \\ \mid \cdot x^2 \\ \mid \cdot x \\ \end{array}$$

Die Resultante ist die Determinante einer $(m+n) \times (m+n)$ Matrix (Sylvestermatrix).
In den ersten n Zeilen stehen die Koeffizienten von f, in jeder Zeile jeweils um eine Stelle nach rechts versetzt, analog sind die letzten m Zeilen gebildet. Alle übrigen Stellen werden mit Nullen aufgefüllt.

Jeweils die i-te Zeile von $\operatorname{Res}(f,g)^\top$ wird mit x^{m+n+i} multipliziert und zur letzten Zeile addiert.
Dies verändert also nur die letzte Zeile.

$$\begin{vmatrix} a_3 & \square & \square & \square & b_4 & \square & \square \\ a_2 & a_3 & \square & \square & b_3 & b_4 & \square \\ a_1 & a_2 & a_3 & \square & b_2 & b_3 & b_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \square & a_0 & a_1 & a_2 & b_0 & b_1 & b_2 \\ \square & \square & a_0 & a_1 & \square & b_0 & b_1 \\ x^3 \cdot f & x^2 \cdot f & x \cdot f & f & x^2 \cdot g & x \cdot g & g \end{vmatrix}$$

Die Determinante wird nach Laplace entwickelt.

$$\operatorname{Res}(f,g) = f(d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0) + g(c_2x^2 + c_1x + c_0) \qquad \text{Unterdeterminanten} \quad d_i, c_j \in \mathbb{Z}$$

allgemein:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f,g) &= f(d_{n-1}x^{n-1} + d_{n-2}x^{n-2} + \ldots + d_0) + g(c_{m-1}x^{m-1} + c_{m-2}x^{m-2} + \ldots + c_0) \\ &= fF + gG \end{aligned}$$

$\operatorname{Res}(f,g)$ ist von x unabhängig. Dann folgt:
Wenn f und g eine gemeinsame Nullstelle haben, $f(\alpha) = g(\alpha) = 0$, dann ist $\operatorname{Res}(f,g) = 0$.

Sei umgekehrt $\mathrm{Res}(f,g)=0$.

$$\begin{aligned} 0 &= fF + gG \qquad\qquad \mathrm{grad}\,F = n-1,\ \ \mathrm{grad}\,G = m-1 \\ -fF &= gG \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{grad}\,G < \mathrm{grad}\,f$ muss mindestens ein unzerlegbarer Faktor von f in g enthalten sein,
in $\mathbb{C}$ gibt es dann eine gemeinsame Nullstelle α, $f(\alpha)=g(\alpha)=0$.

In $\mathbb{C}$ gilt damit:
$\mathrm{Res}(f,g)=0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ und g haben eine gemeinsame Nullstelle.

$$\begin{aligned} f &= 2x^2+x-1 \\ g &= 3x^4-x^3+4x^2+x-2 \end{aligned}$$

$$\mathrm{Res}(f,g) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -35$$

Die Resultante lässt sich auch durch die Nullstellen α_i von f und β_j von g angeben. Sei (z. B. in $\mathbb{C}$):
$f(x) = a\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)$ und $g(x) = b\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_j)$

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,g) &= a^n\prod_{i=1}^{m} g(\alpha_i) \\ &= (-1)^{mn} b^m \prod_{j=1}^{n} f(\beta_j) \\ &= a^n b^m \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n}(\alpha_i-\beta_j) \end{aligned}$$

Beachte: Der Produktterm ist genau dann null, wenn eine gemeinsame Nullstelle vorliegt.
Der Faktor $a^n b^m$ erscheint aufgrund der Determinantenregeln plausibel. a ist in den Elementen von n Spalten enthalten, b in den Elementen von m Spalten.

wird fortgesetzt