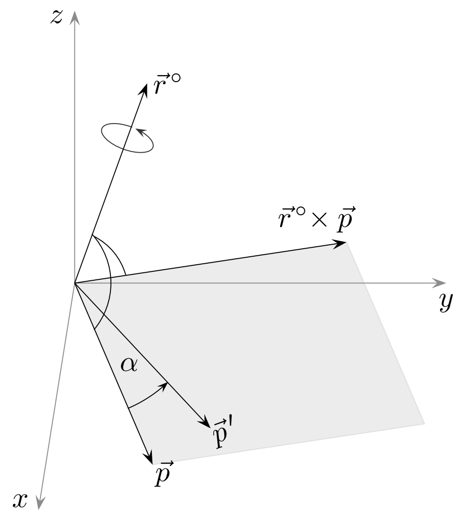
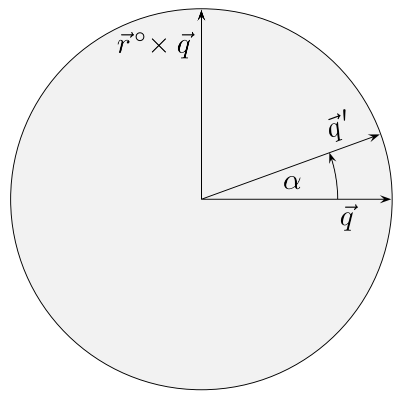
Quaternionen und Drehungen

Im Folgenden werden Drehungen im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe des Kreuzproduktes beschrieben und der Bezug zu den Quaternionen hergestellt.
Der Zusammenhang von einer Verkettung von Drehungen und der Quaternionen-Multiplikation wird ersichtlich.

Die Drehachse möge durch den Ursprung verlaufen und durch einen Einheitsvektor $\vec{r}^\circ$ gegeben sein.
Die Länge 1 wird die Darstellung vereinfachen.



Zunächst betrachten wir den Fall, dass der Vektor $\vec{q}$, der um den Winkel α um $\vec{r}^\circ$ gedreht werden soll, in der zu $\vec{r}^\circ$ senkrechten Ebene liegt.
In dieser Ebene liegen auch die mit $\vec{q}$ gleichlangen Vektoren $\vec{q}\,'$ und $\vec{r}^\circ \times \vec{q}$,
$|\,\vec{r}^\circ \times \vec{q}\,| = |\,\vec{r}^\circ|\,|\,\vec{q}\,|\sin 90^\circ = |\,\vec{q}\,|$.



Für $\vec{q}\,'$ erhalten wir damit die Gleichung:

$$\vec{q}\,' = \cos\alpha\ \vec{q} + \sin\alpha\ \vec{r}^\circ \times \vec{q}$$

Im allgemeinen Fall ist ein Vektor $\vec{p} = \vec{q} + \lambda\vec{r}^\circ$ zu drehen,
wobei $\vec{q}$ in der zu $\vec{r}^\circ$ senkrechten Ebene liegt. Für $\vec{q} = \vec{p} - \lambda\vec{r}^\circ$ gilt daher,

$$\vec{p}\,' - \lambda\vec{r}^\circ = \underbrace{\cos\alpha\,(\vec{p} - \lambda\vec{r}^\circ)}_{\cos\alpha\,\vec{p} - \cos\alpha\,\lambda\vec{r}^\circ} + \sin\alpha\ \underbrace{\vec{r}^\circ \times (\vec{p} - \lambda\vec{r}^\circ)}_{\vec{r}^\circ \times \vec{p}} \qquad \text{beachte:}\ \ (\vec{p} - \lambda\vec{r}^\circ)\,' = \vec{p}\,' - \lambda\vec{r}^\circ$$

Aus der Lage von $\vec{q}$ folgt $\vec{r}^\circ(\vec{p} - \lambda\vec{r}^\circ) = 0$, und damit $\lambda = \vec{r}^\circ\vec{p}$.
Einsetzen, Umstellen und Ausklammern liefert die Rodrigues-Formel (1840):

$$\vec{p}\,' = (\vec{r}^\circ\vec{p})[1 - \cos\alpha]\,\vec{r}^\circ + \cos\alpha\ \vec{p} + \sin\alpha\ \vec{r}^\circ \times \vec{p}$$

Quaternionen und Drehungen

Die Quaternionen

$$\mathbb{A} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

wurden 1843 vom irischen Mathematiker W. Hamilton auf der vergeblichen Suche nach einer dreidimensionalen Erweiterung der komplexen Zahlen entdeckt[1]. Hierfür war eine vierte Dimension unabdingbar. Zeitgleich entwickelte Grassmann eine derartige Verknüpfung. Die Multiplikation ist durch

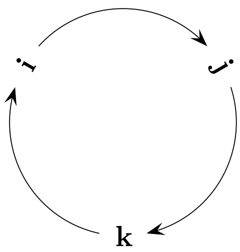
$$\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1$$

$$\mathbf{ij} = -\mathbf{ji} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{jk} = -\mathbf{kj} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{ki} = -\mathbf{ik} = \mathbf{j} \qquad \text{(entspricht dem Kreuzprodukt)}$$

festgelegt. Die Kommutativität musste aufgegeben werden. Die übrigen Rechenregeln bleiben gültig.

Alternative Schreibweisen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xa - yb - zc - wd \\ xb + ya + zd - wc \\ xc - yd + za + wb \\ xd + yc - zb + wa \end{pmatrix}$$



$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{AB} = [ab - \vec{a}\cdot\vec{b},\, a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

Durch die Aufteilung in einen skalaren und vektoriellen Teil wird der Bezug zum Skalar- und Vektorprodukt sichtbar.

Die Rodrigues-Formel kann in der Sprache der Quaternionen formuliert werden:

$$[0, \vec{p}\,'] = \mathbb{V}\,[0, \vec{p}]\,\mathbb{V}^*$$

$\vec{p}$ ist dem Quaternion $[0, \vec{p}]$ zugeordnet.
Ein Stern* kennzeichnet den konjugierten Vektor $\mathbb{A}^* = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.
In $\mathbb{V}$ sind sowohl der Achsenvektor $\vec{r}^{\circ}$ als auch der Drehwinkel α enthalten.
Auch ist $|\mathbb{V}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = 1$. Das Geheimnis soll gelüftet werden:

$$\mathbb{V} = [\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\circ}]$$

$$\mathbb{V}^* = [\cos\tfrac{\alpha}{2}, -\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\circ}] \qquad \text{Die Verwendung von } \tfrac{\alpha}{2} \text{ statt } \alpha \text{ wird gleich verständlich.}$$

$[0, \vec{p}\,'] = \mathbb{V}\,[0, \vec{p}]\,\mathbb{V}^*$ wird zunächst für $\vec{p} \perp \vec{r}^{\circ}$ durch (einfaches) Ausrechnen bestätigt.

$$[\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\circ}]\,\underbrace{[0, \vec{p}][\cos\tfrac{\alpha}{2}, -\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^{\circ}]}_{[0,\, \cos\frac{\alpha}{2}\vec{p} - \sin\frac{\alpha}{2}(\vec{p}\times\vec{r}^{\circ})]} = \ldots = [0, \vec{p}\,']$$

Benutzt wird: $\cos\alpha = \cos^2\tfrac{\alpha}{2} - \sin^2\tfrac{\alpha}{2}, \quad \sin\alpha = 2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2}$

$\vec{p} \times \vec{r}^{\circ} = -\,\vec{r}^{\circ} \times \vec{p}, \quad \vec{r}^{\circ} \times (\vec{p} \times \vec{r}^{\circ}) = \vec{p}$

[1] Rodrigues stellte 1840 Drehungen im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Quaternionen dar.

Quaternionen und Drehungen

Es verbleibt, $[0, \vec{p}\,' + \lambda \vec{r}^\circ] = \mathbb{V}\,[0, \vec{p} + \lambda \vec{r}^\circ]\,\mathbb{V}^*$ nachzuweisen.

Aufgrund der Distributivität ist das gleichbedeutend mit $[0, \vec{r}^\circ] = \mathbb{V}\,[0, \vec{r}^\circ]\,\mathbb{V}^*$.

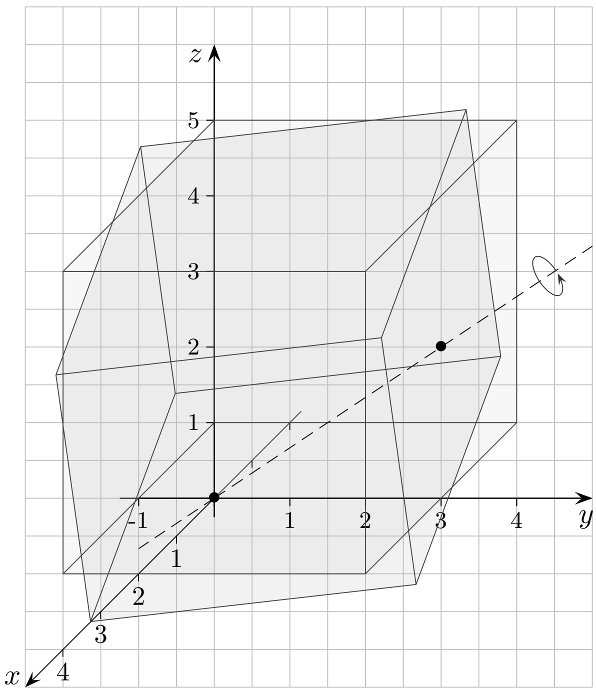
$$[\cos\tfrac{\alpha}{2}, \sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^\circ]\,\underbrace{[0, \vec{r}^\circ][\cos\tfrac{\alpha}{2}, -\sin\tfrac{\alpha}{2}\,\vec{r}^\circ]}_{[\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}\,\vec{r}^\circ]} = \ldots = [0, \vec{r}^\circ]$$

Benutzt wird: $\quad (\sin\tfrac{\alpha}{2})^2 + (\cos\tfrac{\alpha}{2})^2 = 1$

Beispiel

$$\vec{r}^\circ = \frac{1}{\sqrt{13}}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \quad \alpha = 20°, \quad \cos\tfrac{\alpha}{2} = 0{,}9848, \quad \sin\tfrac{\alpha}{2} = 0{,}1736$$

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad \vec{p}_1\,' = \begin{pmatrix}2{,}449\\3{,}435\\3{,}347\end{pmatrix}$$



Zusammengesetzte Drehung

Die Hintereinanderausführung von 2 Drehungen kann durch eine Drehung ersetzt werden.

$$\vec{p} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{V}\,[0,\vec{p}\,]\,\mathbb{V}^* \quad \longrightarrow \quad [0,\vec{p}\,'] = \mathbb{W}\mathbb{V}\,[0,\vec{p}\,]\,\mathbb{V}^*\,\mathbb{W}^*$$

Aufgrund von $\mathbb{V}^*\mathbb{W}^* = (\mathbb{W}\mathbb{V})^*$ können der Drehwinkel und die Achsenrichtung durch ein Quaternionenprodukt ermittelt werden.

Als Beispiel betrachten wir eine 90°-Drehung $\mathbb{R}_x$ um die x-Achse
gefolgt von einer 90°-Drehung $\mathbb{R}_z$ um die z-Achse.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}_x &= \cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{\pi}{4}\,\mathbf{i} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{i}) \\
\mathbb{R}_z &= \cos\tfrac{\pi}{4} + \sin\tfrac{\pi}{4}\,\mathbf{k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{k}) \\
\mathbb{R}_z\mathbb{R}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{k})\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\mathbf{i}) = \frac{1}{2}(1+\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) \\
&= \cos\tfrac{\pi}{3} + \sin\tfrac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})
\end{aligned}$$

$\mathbb{R}_z\mathbb{R}_x$ entspricht einer Drehung um $\frac{2}{3}\pi$ oder 120° um $\vec{r} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Quaternionenschiefkörper $\mathbb{H}$

$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$

$|\mathbb{A}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

$\mathbb{A}\mathbb{A}^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Bemerkenswert: $|\mathbb{A}\mathbb{B}| = |\mathbb{A}||\mathbb{B}|$

Beweis:

$$|\mathbb{A}||\mathbb{B}| = (\mathbb{A}\mathbb{A}^*)(\mathbb{B}\mathbb{B}^*) = \mathbb{A}(\mathbb{B}\mathbb{B}^*)\mathbb{A}^* = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{B}^*\mathbb{A}^*) = (\mathbb{A}\mathbb{B})(\mathbb{A}\mathbb{B})^* = |\mathbb{A}\mathbb{B}|$$

$\mathbb{B}\mathbb{B}^* \in \mathbb{R}$, daher vertauschbar

$\mathbb{A}^{-1} = \dfrac{1}{\mathbb{A}\mathbb{A}^*}\mathbb{A}^*$

Für $|\mathbb{A}| = 1$ (Einheitsquaternion) gilt damit $\mathbb{A}^{-1} = \mathbb{A}^*$.

Vektoren können dividiert werden.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k} \\ \mathbb{A}^* &= -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \\ \mathbb{A}^{-1} &= \tfrac{1}{9}(-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) \\ \mathbb{A}\mathbb{A}^{-1} &= 1 \end{aligned}$$

Die Division von Vektoren beschäftigte Hamilton viele Jahre.
“Well, Papa, can you multiply triplets?“ “No, I can only add and subtract them.“

$$\mathbb{A} = [0, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [0, \vec{b}]$$

Die Frage war, wie muss das Produkt gewählt werden, damit bei gegebenem $\mathbb{A}\mathbb{B}$ und $\mathbb{A}$ der Faktor $\mathbb{B}$ eindeutig bestimmt ist, durch $\mathbb{A}$ also geteilt werden kann?

Die Antwort lautet:

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [-\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a} \times \vec{b}]$$

Die Richtungsvektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ legen eine Ursprungsebene fest.
Wenn $\vec{a}$ gegeben ist, liegt $\vec{b}$ also in der Ebene mit dem Normalenvektor $\vec{a} \times \vec{b}$ und schließt mit $\vec{a}$ einen bestimmten Winkel α ein. α ist in $\vec{a}\cdot\vec{b}$ verpackt. Somit sind 4-Tupel erforderlich.
Aus $[-\vec{a}\cdot\vec{b},\ \vec{a} \times \vec{b}]$ ergeben sich die Rechenregeln für **i**, **j**, **k**.

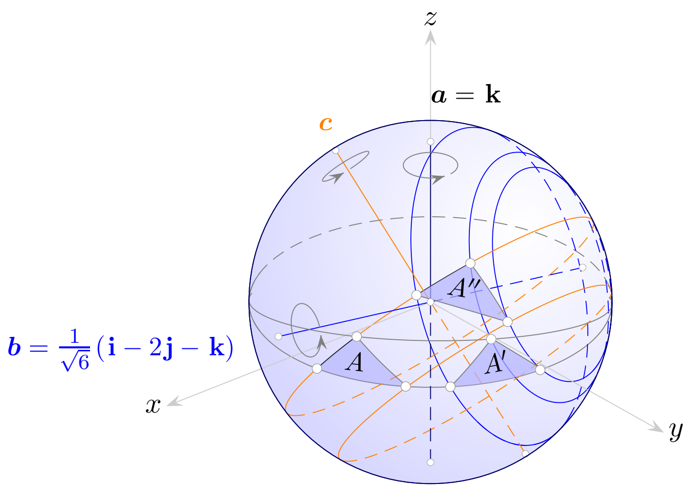
$[a, \vec{a}][1, \vec{0}] = [a, \vec{a}]$ legt die Verallgemeinerung

$$\mathbb{A} = [a, \vec{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \vec{b}]$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [ab - \vec{a}\cdot\vec{b},\ a\vec{b} + b\vec{a} + \vec{a} \times \vec{b}]$$

nahe.

Hintereinanderausführung zweier Drehungen



Wir drehen die Kugel mit $D_{\boldsymbol{a},\,\alpha}$ um $\boldsymbol{a}$ mit dem Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$, anschließend mit $D_{\boldsymbol{b},\,\beta}$ um $\boldsymbol{b}$ mit dem Winkel $\beta = \frac{\pi}{5}$, so dass A in A' und A' in A'' übergehen. Es gibt offensichtlich eine Drehung $D_{\boldsymbol{c},\,\gamma}$ um $\boldsymbol{c}$ mit $A \to A''$.

Jedoch ist keineswegs ersichtlich, dass $D_{\boldsymbol{c},\,\gamma}$ die anderen beiden Drehungen ersetzt.
Nun ja, es wurde bewiesen.

$$
\begin{array}{r|rcl}
D_{\boldsymbol{a},\,\alpha} & \mathbb{A} & = & \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}\,\mathbf{k} \\[2ex]
D_{\boldsymbol{b},\,\beta} & \mathbb{B} & = & \cos\frac{\pi}{10} + \frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k})\sin\frac{\pi}{10} \\[2ex]
D_{\boldsymbol{c},\,\gamma} & \mathbb{BA} & = & \cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}}\Big[\big(\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} - 2\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8}\big)\mathbf{i} - \\[2ex]
 & & & \quad \big(2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8}\big)\mathbf{j} + \big(\sqrt{6}\cos\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8}\big)\mathbf{k}\Big] \\[3ex]
 & \gamma & = & 2\arccos\big(\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{8} + \frac{1}{\sqrt{6}}\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{\pi}{8}\big) \approx 44{,}07^\circ
\end{array}
$$

Zur Erinnerung:
Die Rotation um einen normierten Vektor $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ mit dem Winkel α
wird durch die Quaternion

$$\mathbb{A} = \big(\cos\tfrac{\alpha}{2},\, x\sin\tfrac{\alpha}{2},\, y\sin\tfrac{\alpha}{2},\, z\sin\tfrac{\alpha}{2}\big) = \big(\cos\tfrac{\alpha}{2},\, (x, y, z)\sin\tfrac{\alpha}{2}\big) = \big(\cos\tfrac{\alpha}{2} + (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k})\sin\tfrac{\alpha}{2}\big)$$

erfasst.
Wegen $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ gilt $|\mathbb{A}| = 1$.

Quaternionen und Drehungen   alternativ   Coxeter 1946

$$\mathbb{A} = [a, \boldsymbol{a}], \quad \mathbb{B} = [b, \boldsymbol{b}]$$
$$\mathbb{A}\mathbb{B} = [ab - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ a\boldsymbol{a} + b\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}]$$

1. $\mathbb{A}$ ist genau dann eine reine Einheitsquaternion, wenn $\mathbb{A}^2 = -1$ ist.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= d + a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k} \\ \mathbb{A}^2 &= -a^2 - b^2 - c^2 + d^2 + 2d(a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}) \end{aligned}$$

2. $\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{a}]$ und $\mathbb{B} = [0, \boldsymbol{b}]$ reine Quaternionen, dann gilt: $\mathbb{A} \perp \mathbb{B} \iff \mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A}$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{B} &= [-\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] \\ \mathbb{B}\mathbb{A} &= [-\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}] \\ -\mathbb{B}\mathbb{A} &= [\quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] \qquad \mid -(\,\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}\,) = \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \end{aligned}$$

$$\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A} \iff -\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \iff \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0 \iff \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b} \iff \mathbb{A}\perp\mathbb{B}$$

3. $\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{a}]$ und $\mathbb{B} = [0, \boldsymbol{b}]$ reine Quaternionen und $|\mathbb{A}| = 1$, dann gilt: $\mathbb{A} \perp \mathbb{B} \iff \mathbb{A}\mathbb{B}\mathbb{A} = \mathbb{B}$

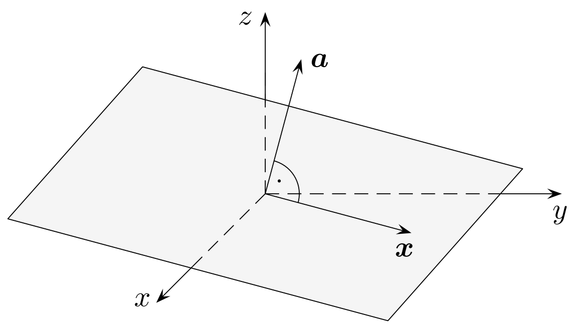
$\mathbb{A}\mathbb{B} = -\mathbb{B}\mathbb{A} \quad |\,\mathbb{A} \quad$ 2. und 1.

4. Wir betrachten für $\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{a}]$, $|A| = 1$ und $\mathbb{P} = [0, \boldsymbol{p}]$ die Transformation $\mathbb{P} \to \mathbb{P}' = \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}$.

   a) Es ist $\mathbb{P}' = [0, \boldsymbol{p}']$ eine reine Quaternion mit $|\mathbb{P}'| = |\mathbb{P}|$.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A} &= [0, \boldsymbol{a}][0, \boldsymbol{p}][0, \boldsymbol{a}] \\ &= [-\boldsymbol{a}\boldsymbol{p},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{p}][0, \boldsymbol{a}] \\ &= [-\underbrace{(a\times\boldsymbol{p})\cdot\boldsymbol{a}}_{0},\ \dots\ ] \\ |\mathbb{A}\mathbb{P}\mathbb{A}| &= |\mathbb{A}||\mathbb{P}||\mathbb{A}| = |\mathbb{P}| \end{aligned}$$

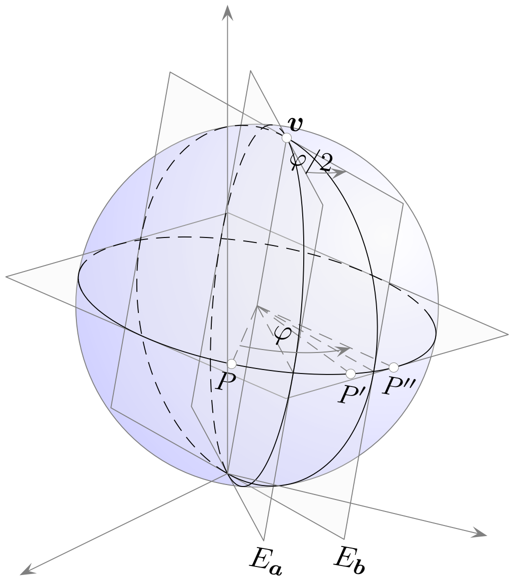
   b) Sei $E_{\boldsymbol{a}}$ die Ebene mit dem Normalenvektor $\boldsymbol{a}$ durch den Ursprung.
   Die Transformation ist eine Spiegelung des Raumes an der Ebene $E_{\boldsymbol{a}}$.



Jeder Punkt der Ebene bleibt fest und jeder zu $E_{\boldsymbol{a}}$ orthogonale Vektor $\lambda\boldsymbol{a}$ ändert seine Richtung. Die Transformation ist linear.

$\mathbb{A}[0, \boldsymbol{x}]\mathbb{A} = [0, \boldsymbol{x}] \quad |3.$

$\mathbb{A}[0, \lambda\boldsymbol{a}]\mathbb{A} = \lambda[0, \boldsymbol{a}][0, \boldsymbol{a}][0, \boldsymbol{a}] = -\lambda[0, \boldsymbol{a}] = [0, -\lambda\boldsymbol{a}] \quad |1.$



5. Die Drehung $D_{\boldsymbol{v},\varphi}$ kann als Doppelspiegelung an zwei Ebenen dargestellt werden, die sich unter einem Winkel von $\varphi/2$ schneiden. $\boldsymbol{v} = (\ell, m, n)$ ist der Einheitsvektor entlang der Schnittgeraden.

   $\mathbb{P} \to \mathbb{P}'' = (\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(\mathbb{A}\mathbb{B}) = (-\mathbb{B}\mathbb{A})\mathbb{P}(-(\mathbb{B}\mathbb{A})^*) \qquad | \ \mathbb{A}\mathbb{B} = (\mathbb{B}\mathbb{A})^*$ siehe unter 2.

6. $-\mathbb{B}\mathbb{A} = [\cos\frac{\varphi}{2}, \boldsymbol{v}\sin\frac{\varphi}{2}] = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbb{V}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \mathbb{V} = \ell\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}$

$$\begin{aligned} -\mathbb{B}\mathbb{A} &= [\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}] \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \cos\tfrac{\varphi}{2} && |\ \ |\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1 \\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} &= \boldsymbol{v}\sin\tfrac{\varphi}{2} && |\ \ |\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}| = \sin\tfrac{\varphi}{2} \end{aligned}$$

zusammengefasst

Drehung $D_{\boldsymbol{v},\varphi} \qquad \mathbb{P} \to \mathbb{P}'' = \mathbb{R}\mathbb{P}\mathbb{R}^*, \quad \mathbb{R} = \cos\frac{\varphi}{2} + \mathbb{V}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \mathbb{V} = \ell\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k}, \quad |\mathbb{V}| = 1$

$\mathbb{R}^* = \cos\frac{\varphi}{2} - \mathbb{V}\sin\frac{\varphi}{2}$

$\mathbb{R}$ konjugiert, statt φ wird $-\varphi$ eingesetzt, $\sin(-\varphi) = -\sin(\varphi)$

Matrixdarstellung von Quaternionen siehe Möbiustransformation

Euler Winkel

Startseite