

Quantile

Bei einer Prüfung sind von 20 Studenten folgende Punktzahlen erzielt worden:

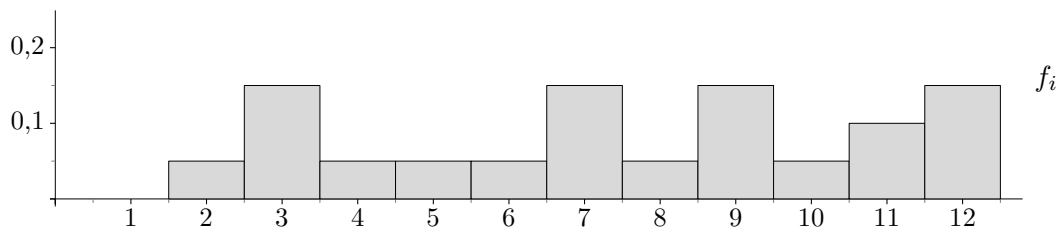
3	10	12	5	7
12	7	11	6	9
8	9	3	4	3
12	11	2	7	9

- a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, die Varianz und Standardabweichung, den Variationskoeffizienten, sowie die Spannweite.
- b) Ermitteln Sie die Quantile $x_{0,25}$, $x_{0,40}$, $x_{0,75}$ und $x_{0,80}$, sowie den Quartilsabstand.

absolute und relative Häufigkeiten

x_i	h_i	f_i
2	1	0,05
3	3	0,15
4	1	0,05
5	1	0,05
6	1	0,05
7	3	0,15
8	1	0,05
9	3	0,15
10	1	0,05
11	2	0,10
12	3	0,15
	20	1

arithmetisches Mittel, Varianz ...



- a) Bestimmen Sie das arithmetische Mittel, die Varianz und Standardabweichung, den Variationskoeffizienten, sowie die Spannweite.

x_i	h_i	f_i	$x_i \cdot h_i$	$x_i^2 \cdot h_i$
2	1	0,05	2	4
3	3	0,15	9	27
4	1	0,05	4	16
5	1	0,05	5	25
6	1	0,05	6	36
7	3	0,15	21	147
8	1	0,05	8	64
9	3	0,15	27	243
10	1	0,05	10	100
11	2	0,10	22	243
12	3	0,15	36	242
	20	1	150	1336

$$\bar{x} = \frac{150}{20} = 7,5$$

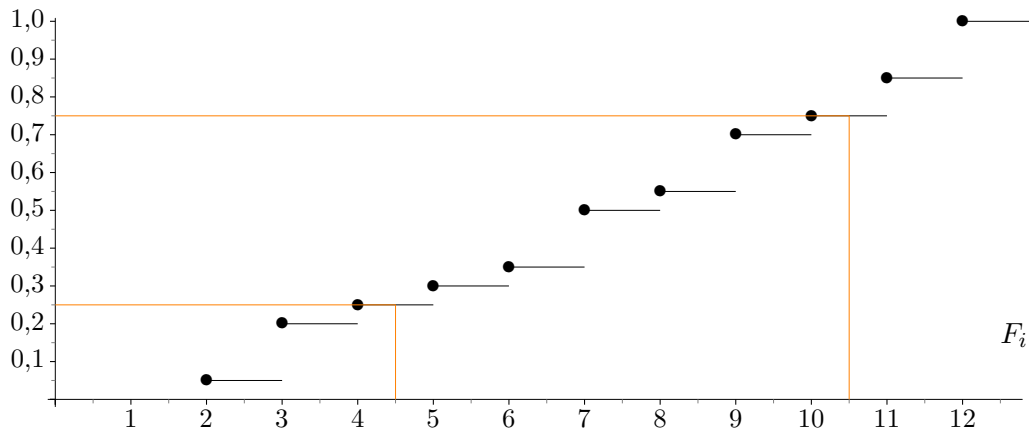
$$s^2 = \frac{1336}{20} - 7,5^2 = 10,55$$

$$s = \sqrt{10,55} = 3,248$$

$$V = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{10,55}}{7,5} = 0,433$$

$$R = a_{12} - a_1 = 12 - 2 = 10$$

Quantile



b) Ermitteln Sie die Quantile $x_{0,25}$, $x_{0,40}$, $x_{0,75}$ und $x_{0,80}$, sowie den Quartilsabstand.

kumulierte relative Häufigkeiten F_i

x_i	h_i	f_i	F_i
2	1	0,05	0,05
3	3	0,15	0,2
4	1	0,05	0,25
5	1	0,05	0,3
6	1	0,05	0,35
7	3	0,15	0,5
8	1	0,05	0,55
9	3	0,15	0,7
10	1	0,05	0,75
11	2	0,10	0,85
12	3	0,15	1
	20	1	

$$x_{0,25} = 4,5$$

In welchem Bereich $[0, k]$ liegen 25% der niedrigsten Punkte?

2 3 3 3 4 5 6 7 7 7 8 9 9 9 10 11 11 12 12 12

Jeder Wert hat die Häufigkeit $\frac{1}{20}$.

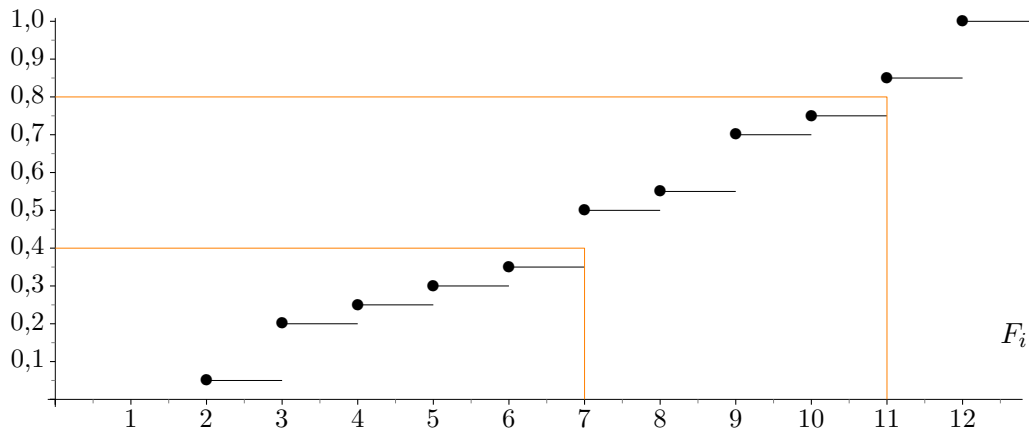
Die Mitte 4,5 garantiert, dass die Daten in zwei disjunkte Teilmengen mit den Häufigkeiten 25% und 75% aufgeteilt werden.

Wenn α mit einem F_i -Wert übereinstimmt, so gilt:

$$x_\alpha = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

$$x_{0,75} = 10,5$$

Quantile



b) Ermitteln Sie die Quantile $x_{0,25}$, $x_{0,40}$, $x_{0,75}$ und $x_{0,80}$, sowie den Quartilsabstand.

kumulierte relative Häufigkeiten F_i

x_i	h_i	f_i	F_i
2	1	0,05	0,05
3	3	0,15	0,2
4	1	0,05	0,25
5	1	0,05	0,3
6	1	0,05	0,35
7	3	0,15	0,5
8	1	0,05	0,55
9	3	0,15	0,7
10	1	0,05	0,75
11	2	0,10	0,85
12	3	0,15	1
	20	1	

$$x_{0,40} = 7$$

In welchem Bereich $[0, k]$ liegen 40% der niedrigsten Punkte?

2 3 3 3 4 5 6 7 7 7 8 9 9 9 10 11 11 12 12 12

Jeder Wert hat die Häufigkeit $\frac{1}{20}$.

Alle unteren Werte, die mit der Häufigkeit von 40% auftreten, liegen im Intervall $[0, 7]$.

(Der Anteil dieser Werte beträgt sogar 50%).

Stimmt α nicht mit einem F_i -Wert überein, so ist der F_i -Wert zu suchen, der α gerade überschreitet.

Der zugehörige Datenwert ist das Quantil.

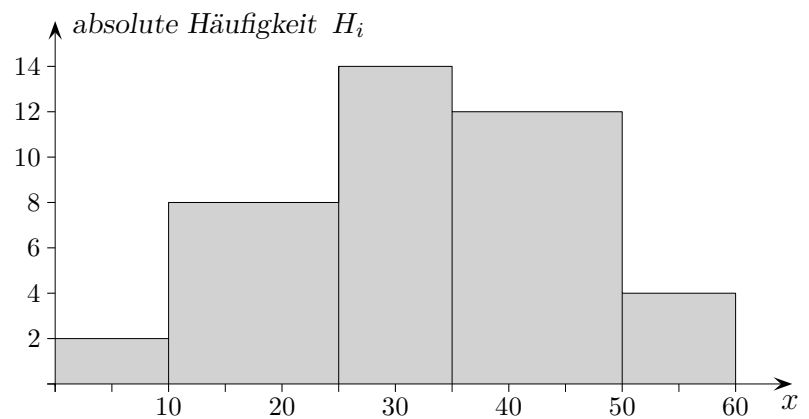
$$x_{0,80} = 11$$

$$s_Q = x_{0,75} - x_{0,25} = 10,5 - 4,5 = 6$$

Quantile einer in Klassen eingeteilten Stichprobe

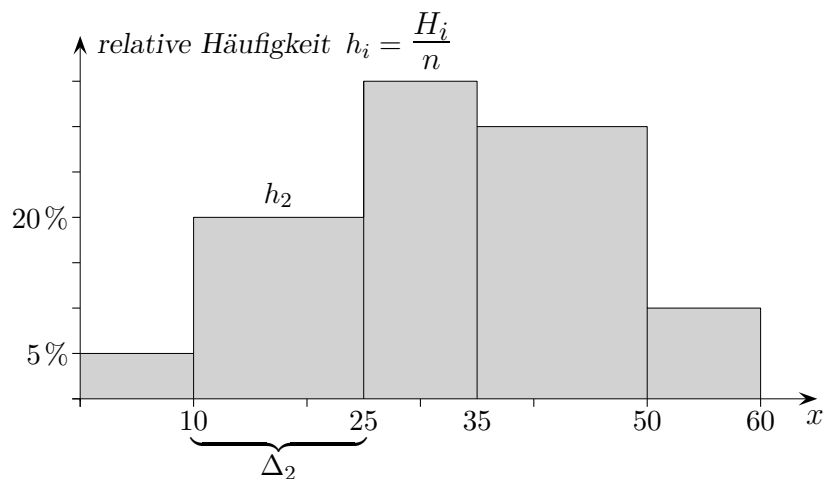
Mit einer Stichprobe sollen die Längen von Fischen eines Gewässers ermittelt werden. Um die Daten übersichtlich darzustellen, wird eine Klasseneinteilung vorgenommen.

Länge (cm)	$x \leq 10$	$10 < x \leq 25$	$25 < x \leq 35$	$35 < x \leq 50$	$50 < x \leq 60$
absolute Häufigkeit	2	8	14	12	4



Um die Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen, mit denen Fische einer bestimmten Länge gefangen werden können, werden die relativen Häufigkeiten berechnet.

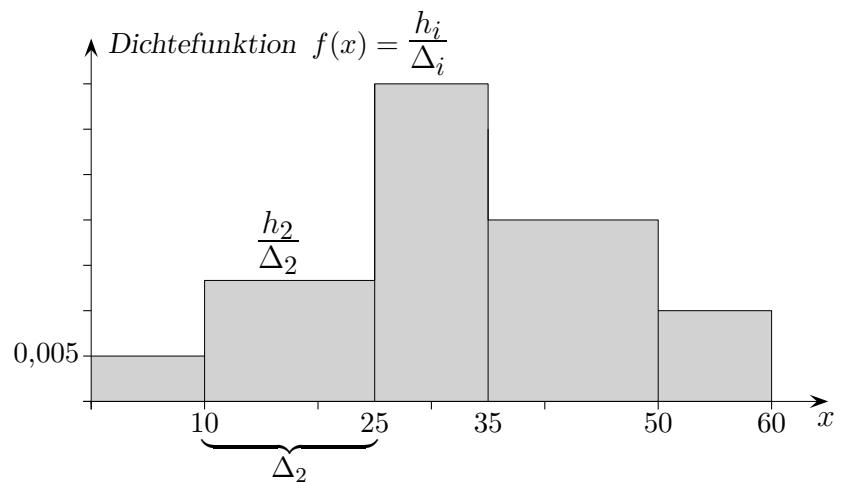
Länge (cm)	$x \leq 10$	$10 < x \leq 25$	$25 < x \leq 35$	$35 < x \leq 50$	$50 < x \leq 60$
relative Häufigkeit	5%	20%	35%	30%	10%



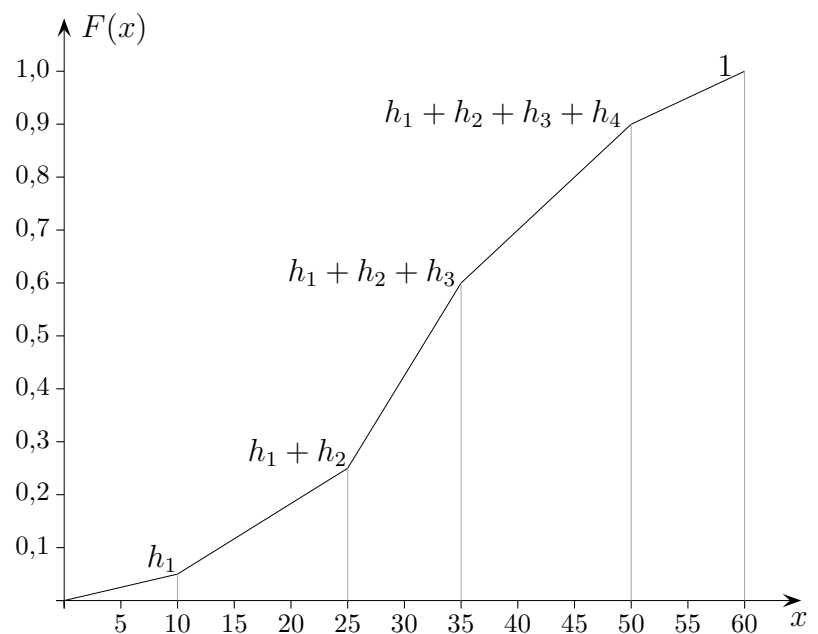
Quantile einer in Klassen eingeteilten Stichprobe

Der Bezug zu stetigen Zufallsvariablen wird durch die Dichtefunktion hergestellt. Mit ihr können Wahrscheinlichkeiten durch die Berechnung von Flächen ermittelt werden. Die relativen Häufigkeiten sind durch die Klassenbreiten zu dividieren. Der Inhalt der Fläche unterhalb der Dichtefunktion beträgt dann 1 (hier 0,9995).

Länge (cm)	$x \leq 10$	$10 < x \leq 25$	$25 < x \leq 35$	$35 < x \leq 50$	$50 < x \leq 60$
Dichte	0,005	0,0133	0,035	0,020	0,010

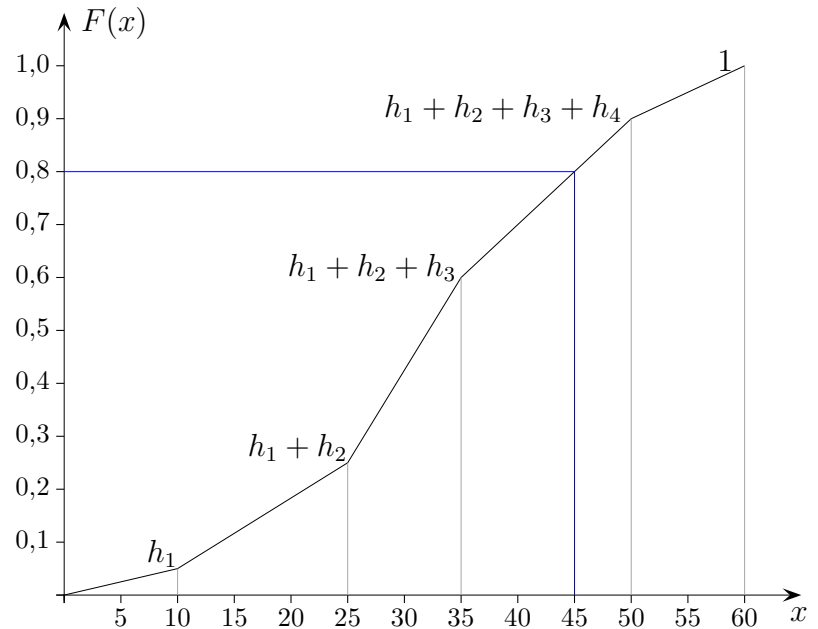


Für die Verteilungsfunktion F sind lediglich die relativen Häufigkeiten zu kumulieren.



Quantile einer in Klassen eingeteilten Stichprobe

Wir ermitteln das 0,8-Quantil.



Hierzu kann die Gleichung der Geraden auf dem Intervall $[35; 50]$ ermittelt werden.

$$\begin{aligned} y &= m(x - 35) + F(35) \\ &= \frac{h_4}{50 - 35}(x - 35) + F(35) \end{aligned}$$

Die Gleichung nach x umgestellt ergibt mit $y = 0,8$ das gesuchte Quantil.

$$\begin{aligned} x &= \frac{y - F(35)}{h_4}(50 - 35) + 35 \\ x_{0,8} &= 45 \end{aligned}$$

Um ein p -Quantil zu ermitteln, ist die zugehörige Klasse $[a_i, b_i]$ mit $F(a_i) < p \leq F(b_i)$ zu suchen. Zur Klasse gehöre die relative Häufigkeit h_i . Dann gilt:

$$x_p = \frac{p - F(a_i)}{h_i}(b_i - a_i) + a_i$$